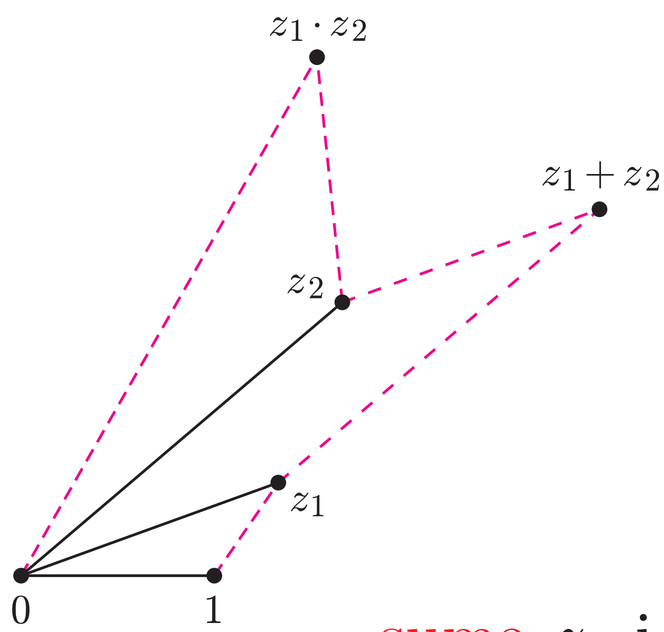
Liczby zespolone historycznie i genetycznie

Praca matematyków w 90% polega na staraniu się,
by dobrze zrozumieć, co robili nasi poprzednicy.
Nie ulega bowiem wątpliwości, że powstawanie nowych pojęć
i nowych twierdzeń nosi na sobie – poza merytoryczną treścią –
wiele elementów przypadkowych, wiele technicznych
niedoskonałości.
W efekcie pojęcia matematyczne zmieniają swój kształt z biegiem
czasu, by kolejnym pokoleniom prezentować się w coraz czystszej,
a przez to prostszej, bardziej zrozumiałej postaci.

Koronnym przykładem może tutaj być rachunek różniczkowy, zbyt zagmatwany w pracach takich gigantów jak Newton, Leibniz, Euler czy Lagrange nawet dla nich samych, a dziś dostępny nawet dla licealistów.

W przypadku pojęć używanych w wielu postaciach
(jak np. liczby zespolone), kolejność ich pojawiania się
właściwie zawsze jest odmienna od ich matematycznej genezy.

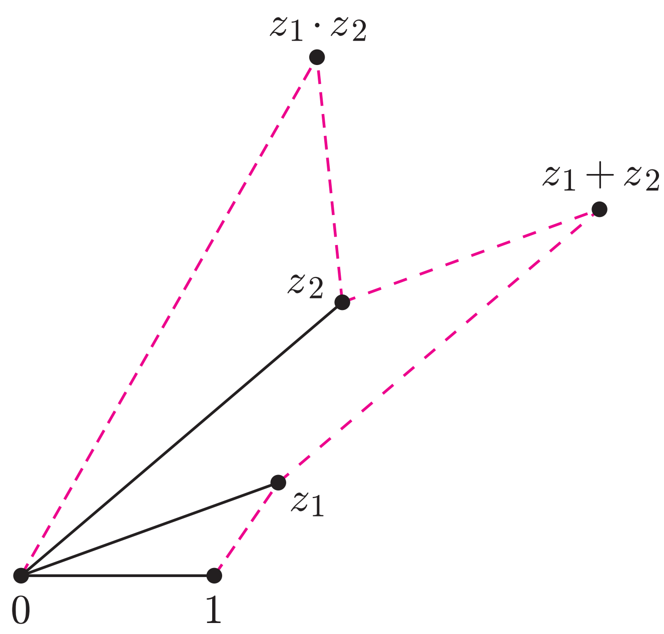
Liczby zespolone zaistniały w *Ars magna* Cardana jako twór
z założenia transcendentalny, magiczny, nienależący
do świata liczb, a służący do uzyskiwania wbrew rozsądkowi
poprawnych pierwiastków równań algebraicznych stopnia 3
w przypadku, gdy tych pierwiastków jest trzy.
Nieśmiała próba racjonalizacji w *Algebrze* Bombellego niewiele
to zmieniała i dopiero pomysł Eulera, by tę transcendentalność
sprowadzić na ziemię przez wprowadzenie liczb urojonych
(zwanych też głuchymi) jakoś sytuował liczby zespolone względem
liczb, choć "porządnych" liczb z nich nie czynił. W każdym razie
wiadomo było, jak – zgodnie z regułami algebry – nimi operować.
Tenże Euler wskazał związki liczb zespolonych z geometrią
(tzw. płaszczyzna Gaussa).
Gauss dowodząc algebraicznej domkniętości liczb zespolonych
zapewnił im pozycję pełnoprawnych liczb, a dojrzały kształt
algebraiczny i geometryczny nadał im niebawem Hamilton.



Tymczasem genetycznie liczby zespolone
to algebra punktów płaszczyzny
z wyróżnionymi na niej
dwoma punktami 0 i 1
i dwiema operacjami: przesunięciem
i podobieństwem spiralnym
(to drugie to złożenie obrotu
i jednokładności o tym samym środku):
suma z_1 i z_2 to przesunięcie z_1 o $\overrightarrow{0z_2}$ (lub z_2 o $\overrightarrow{0z_1}$),
iloczyn z_1 i z_2 to wynik obrotu z_1 o $\sphericalangle 10z_2$ (lub z_2 o $\sphericalangle 10z_1$)
oraz (w obu przypadkach) jednokładności o skali $|0z_1| \cdot |0z_2|$.

Inaczej: domykamy $z_1 0 z_2$ do równoległoboku (to suma)
i budujemy trójkąt $z_2 0 (z_1 \cdot z_2)$ podobny do trójkąta $10z_1$
i tak samo zorientowany (”symetryczną” sytuację, której nie ma
na rysunku, każdy wyobrazi sobie z łatwością).

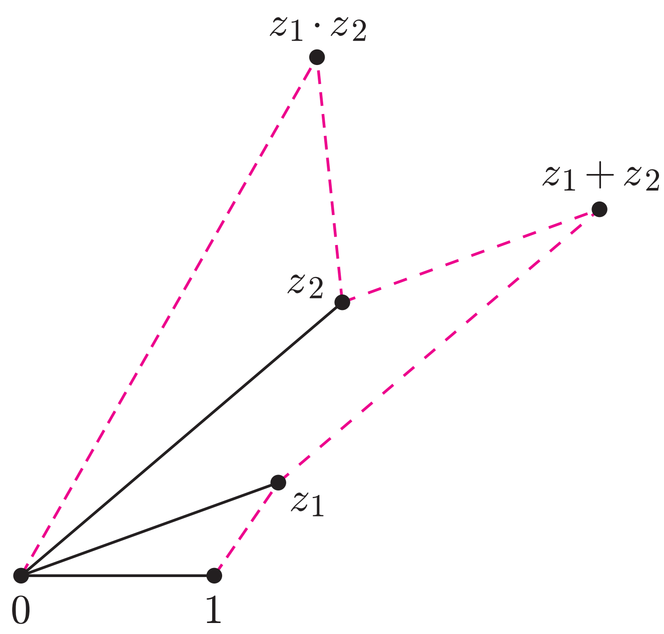
Stąd inne postaci liczb zespolonych wynikają ”bezboleśnie”.



Takie ujęcie liczb zespolonych pozwala zauważyć, że każda z nich jest określona przez liczbę r mówiącą, ile razy musiał się przedłużyć wektor 1, aby ją otrzymać i liczbę φ mówiącą, o jaki kąt wektor 1 musiał się obrócić.
Pierwszą z tych liczb nazywamy **modułem** liczby zespolonej, a drugą jej **argumentem**.

Jeżeli przedstawimy liczbę zespoloną w postaci (r, φ), to – wobec powyższych uwag – wzór na mnożenie będzie wyglądał tak:

$$(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2).$$



Takie ujęcie liczb zespolonych pozwala zauważyć, że każda z nich jest określona przez liczbę r mówiącą, ile razy musiał się przedłużyć wektor 1, aby ją otrzymać i liczbę φ mówiącą, o jaki kąt wektor 1 musiał się obrócić.
Pierwszą z tych liczb nazywamy **modułem** liczby zespolonej, a drugą jej **argumentem**.

Jeżeli przedstawimy liczbę zespoloną w postaci (r, φ), to – wobec powyższych uwag – wzór na mnożenie będzie wyglądał tak:

$$(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2).$$

Przetłumaczenie tego na zwykłe współrzędne kartezjańskie daje (bez rachunków!) wzór zwany nazwiskiem de Moivre'a

$$r_1(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2) = (r_1 \cdot r_2)\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$

co łatwo się uogólnia na wzory mówiące o potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Hamilton zauważył, że rachunki na liczbach zespolonych można wyrazić bezpośrednio za pomocą współrzędnych kartezjańskich.

Dodawanie ma bardzo prostą postać $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, bo tak się przecież dodaje wektory. Wzór na mnożenie też nie jest zbyt skomplikowany $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,
co jest prostą konsekwencją wzoru de Moivre'a: jeśli
$(a,b)=(r_1\cos\varphi_1, r_1, \sin\varphi_1)$, a $(c,d)=(r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2)$, to

$$
\begin{aligned}
(a,b)\cdot(c,d) &= (r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1)\cdot(r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2) = \\
&= ((r_1\cdot r_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2),\ (r_1\cdot r_2)\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = \\
&= (r_1\cdot r_2)\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \\
&\qquad\qquad \cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2\big) = \\
&= \big(r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2-r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2, \\
&\qquad r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2+r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2\big) = \\
&= (ac-bd, ad+bc).
\end{aligned}
$$

Z tego wynikają historycznie wcześniejsze postaci liczb zespolonych.

Zauważmy, że każda liczba zespolona da się przedstawić jako
$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$
Takie $(1, 0)$ to po prostu 1 – każdy może sprawdzić, jak się przez $(1, 0)$ mnoży. Natomiast
$$(0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$
co jest zwykłą minus jedynką, i to też można sprawdzić mnożąc.

Liczba $(0, 1)$ jest oznaczana przez i (od *imaginarius*), nazywana *jednostką urojoną* i stanowi wielką tajemnicę dla różnego rodzaju filozofów (bo jak to możliwe, aby kwadrat był ujemny…), co cofa ich do czasów Cardana.

Z owego i (już rozsądnie) korzystał jego wynalazca, Leonard Euler, uzyskując ciekawe rezultaty.

Tak algebraicznie ujęte liczby zespolone to sumy $a + ib$,

gdzie a i b to liczby rzeczywiste.

Rachunki na nich przeprowadza się tak jak na wielomianach,
pamiętając zawsze, że $i^2 = -1$.

Na przykład wzór na mnożenie wyprowadza się
przy tej interpretacji tak:

$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$

Tak algebraicznie ujęte liczby zespolone to sumy $a + ib$,

gdzie a i b to liczby rzeczywiste.

Rachunki na nich przeprowadza się tak jak na wielomianach, pamiętając zawsze, że $i^2 = -1$.

Na przykład wzór na mnożenie wyprowadza się przy tej interpretacji tak:

$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Euler używał także mieszanego sposobu zapisywania liczb zespolonych z użyciem zarówno i, jak też modułu i argumentu:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Pozwoliło mu to na znalezienie zależności

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

wiążącej funkcje wykładnicze i trygonometryczne, a której szczególnym przypadkiem jest sławny wzór zawierający "wszystkie stałe matematyczne"

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Symbolika Eulera jest najczęściej dziś stosowanym sposobem używania liczb zespolonych.

Wiąże się z tym istotne nieporozumienie związane z wyrażeniami $\mathrm{Re}\ z$ i $\mathrm{Im}\ z$, częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby z.

Gdy $z = a + ib$, piszemy, że $\mathrm{Re}\ z = a$ i $\mathrm{Im}\ z = b$, w czym nie widać niczego dziwnego.

Tymczasem gdy mamy liczbę zespoloną z określenie jej części rzeczywistej i części urojonej nie jest możliwe metodami algebraicznymi, a nawet nie jest możliwe podanie algebraicznej (czyli sformułowanej za pomocą 0, 1, +, $\cdot$) definicji liczby rzeczywistej, podanie formuły spełnianej tylko przez liczby rzeczywiste.

Powszechnie używana definicja: *z jest liczbą rzeczywistą, gdy $\bar{z} = z$* jest poprawna, ale by to sprzężenie $\overline{(a + ib)} = (a - ib)$ zdefiniować trzeba już wcześniej dysponować rozbiciami liczb zespolonych na części rzeczywiste i urojone.

Jak dalece jednak jesteśmy przywiązani do używania jednostki urojonej i może świadczyć fakt, iż Hamilton, twórca wzoru

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

obywającego się bez żadnych "urojeń",
pracując bezowocnie nad stworzeniem algebry przestrzeni trójwymiarowej (później Frobenius udowodnił, że to niemożliwe) i już owocnie nad stworzeniem algebry przestrzeni czterowymiarowej, sukces odniósł dopiero, gdy odwołał się do obiektów wyimaginowanych, tym razem czterech.

Uzyskane obiekty – kwaterniony – mają kształt analogiczny do liczb zespolonych Eulera:
$a + ib + jc + kd$, gdzie a, b, c, d to liczby rzeczywiste,
a i, j, k liczbami rzeczywistymi nie są
i spełniają warunki $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

O tym zaś, jak matematycy, śledzący dokonania swych poprzedników, potrafią je udoskonalić świadczy fakt, iż Artur Cayley stwierdził, że wzór Hamiltona definiujący mnożenie liczb zespolonych, przy niewielkiej modyfikacji pozwala wyeliminować z definicji kwaternionów wszelkie "imaginacje", określając kwaterniony jako pary liczb zespolonych, a ich mnożenie wzorem

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c}),$$

gdzie użyte jest poprzednio wspomniane sprzężenie.

O tym zaś, jak matematycy, śledzący dokonania swych poprzedników, potrafią je udoskonalić świadczy fakt,
iż Artur Cayley stwierdził, że wzór Hamiltona definiujący mnożenie liczb zespolonych, przy niewielkiej modyfikacji pozwala wyeliminować z definicji kwaternionów wszelkie "imaginacje", określając kwaterniony jako pary liczb zespolonych,
a ich mnożenie wzorem

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c}),$$

gdzie użyte jest poprzednio wspomniane sprzężenie.

Stwierdzona przez Frobeniusa niemożność zbudowania przyzwoitej algebry przestrzeni trójwymiarowej sprowadza się do spostrzeżenia, iż
(przy "wektorowym dodawaniu") musiałyby pojawić się dzielniki zera

– a tego przyzwoitość nie dopuszcza.

Kwaterniony mają co prawda wadę, bo mnożenie nie jest tam przemienne,

ale uznano, że to daje się przebaczyć.

Frobenius udowodnił dalej, że przyzwoitość dopuszcza jedynie

przestrzenie 1, 2 i 4 wymiarowe.