Zegar obrotowy

Zegar tautochroniczny (patrz **cykloida**) został skonstruowany, by zapewnić precyzyjny pomiar czasu niezbędny w żegludze dla ustalania długości geograficznej (jak wiadomo długość geograficzna to $15°$ razy godzinowy odstęp pomiędzy południem na Greenwich i południem w miejscu dokonywania pomiaru). Na ten cel były przez admiralicje Holandii i Anglii ofiarowywane ogromne pieniądze.

Zegar tautochroniczny Huygensa był bardzo dokładny, ale kołysanie statków powodowało, iż wahadło nie wahało się w płaszczyźnie, czego ta konstrukcja wymagała.

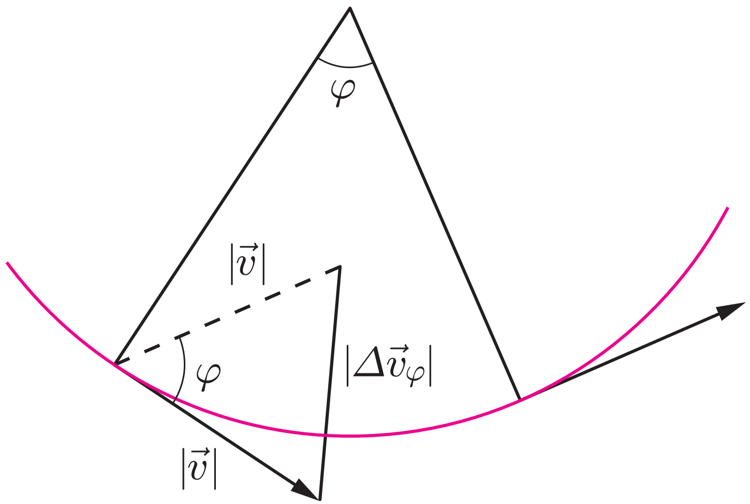
Huygens postanowił więc skonstruować zegar odporny na kołysanie. Tu ciężarek wahadła miał wykonywać obroty. Chodziło o zorganizowanie jego ruchu tak, aby okres tych obrotów nie zależał od tego, jaki będzie ich promień.

Każdy, kto kręcił kiedyś ciężarkiem na sznurku, wie,
że podstawowym zjawiskiem, jakie temu towarzyszy jest

siła odśrodkowa.

Galileusz wiedział, że istnieją siły wywierane przez więzy, przykładem jest to redukcja częsci grawitacji przez równię pochyłą, ale też właśnie siła odśrodkowa, lecz nie znalazł matematycznego opisu dla tej ostatniej.

Musiał więc Huygens zrobić to sam.



Spójrzmy na ciało poruszające się jednostajnie po okręgu o promieniu R z prędkością $\vec{v}$. W ciągu czasu t przebywa ono łuk okręgu o kącie środkowym φ. O taki sam kąt zmieni się, oczywiście, kierunek jego prędkości. Zmiana ta ma wielkość

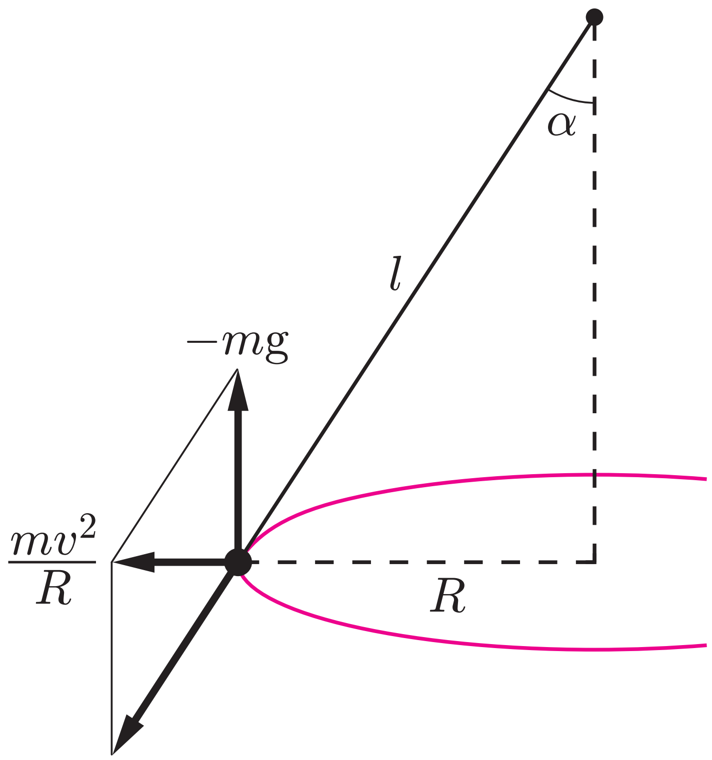
$$|\Delta\vec{v}_\varphi| = 2 \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\tfrac{\varphi}{2}.$$

Interesuje nas przyspieszenie. Ponieważ ruch jest jednostajny, więc wystarczy podzielić różnicę prędkości przez czas i sprawdzić, co się dzieje, gdy czas ten zmierza do zera.

Czas t to droga $R\varphi$ podzielona przez prędkość $|\vec{v}|$, więc

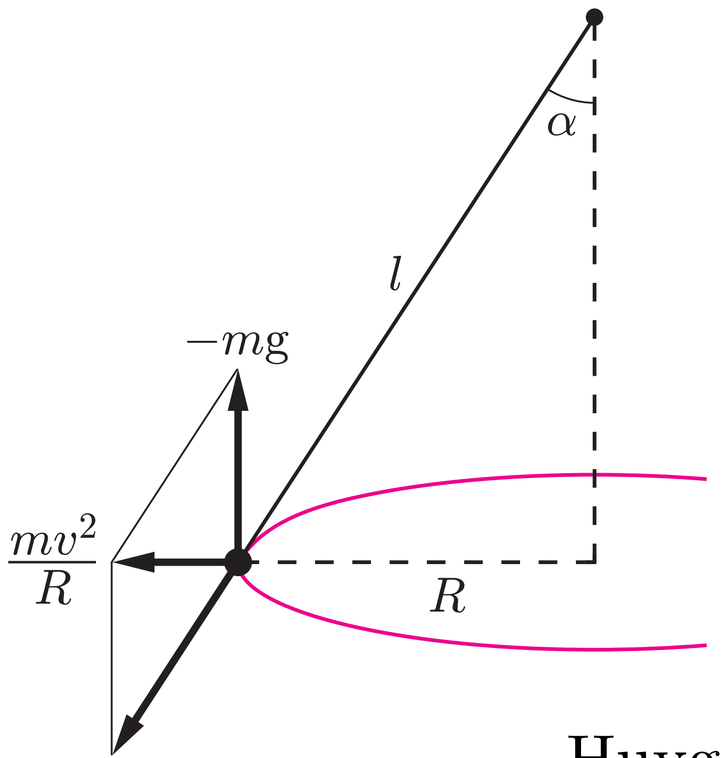
$$\frac{|\Delta\vec{v}_\varphi|}{t} = \frac{2|\vec{v}|\sin\varphi \cdot |\vec{v}|}{R\varphi} = \frac{\vec{v}^{\,2}}{R} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \longrightarrow \frac{\vec{v}^{\,2}}{R}.$$

Stąd siła odśrodkowa to $|F| = m \cdot \dfrac{\vec{v}^{\,2}}{R}$.



Nakładając warunek, by wahadło obrotowe było stabilne, czyli by jego obroty wywoływały siłę odśrodkową równoważącą siłę ciążenia, otrzymujemy $\frac{m\vec{v}^{\,2}}{R} = m\mathrm{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, czyli $|\vec{v}| = \sqrt{\mathrm{g}R\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, co pozwala obliczyć okres obiegu stabilnego wahadła obrotowego:

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\mathrm{g}}\ \mathrm{ctg}\,\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{\mathrm{g}}}.$$

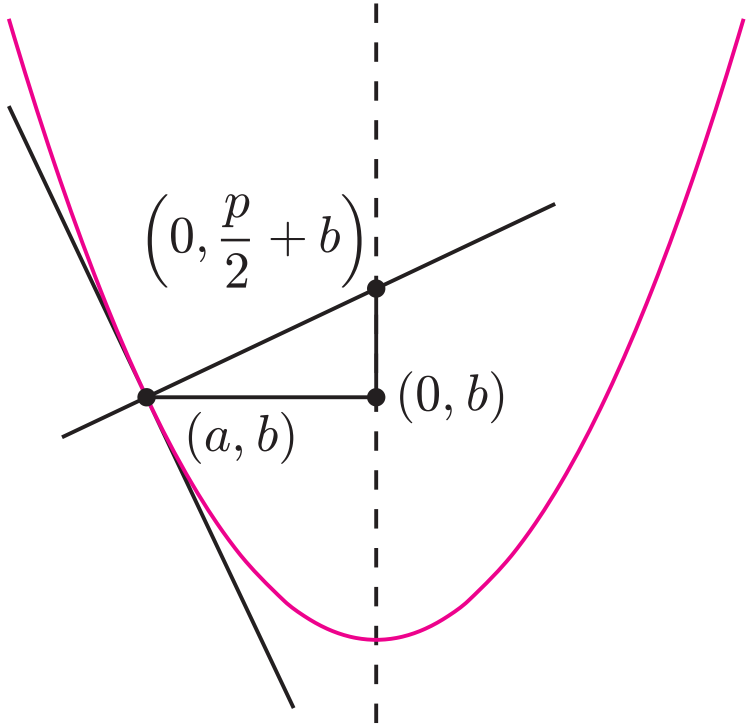


Nakładając warunek, by wahadło obrotowe było stabilne, czyli by jego obroty wywoływały siłę odśrodkową równoważącą siłę ciężenia, otrzymujemy $\frac{m\vec{v}^{\,2}}{R} = m\mathrm{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, czyli $|\vec{v}| = \sqrt{\mathrm{g}R\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, co pozwala obliczyć okres obiegu stabilnego wahadła obrotowego: $T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\mathrm{g}}\ \mathrm{ctg}\,\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{\mathrm{g}}}$.

Huygens wyciągnął z tego oczywisty wniosek: stabilne wahadła obrotowe mają ten sam okres, gdy wyrażenie w liczniku ostatniego ułamka jest dla nich równe,

I zaczął szukać krzywej mogącej być przekrojem osiowym obrotowej powierzchni o tej własności, że po jej każdym poziomym przekroju biegałoby stabilne wahadło o tym samym okresie.

Przydatność takiej powierzchni do budowy zegara morskiego jest oczywista: jeśli kołysanie przeniesie kulkę wahadła z jednego poziomu na drugi, okres pozostanie taki sam.



Poszukiwaną krzywą – przekrojem – okazała się parabola.
Styczna do paraboli danej równaniem $x^2 = py$ w punkcie $(a,\, b)$ dana jest równaniem $ax = \frac{1}{2}p(y + b)$.
Stąd prostopadła do stycznej ma równanie postaci $\frac{1}{2}px = -ay + A$, a gdy ma przechodzić przez $(a,\, b)$, musi być $A = a(\frac{1}{2}p + b)$.
Prosta ta przecina więc oś paraboli w punkcie $(0,\, y_0)$, gdzie $0 = -ay_0 + a(\frac{1}{2}p + b)$, czyli $y_0 = \frac{1}{2}p + b$,.
A zatem rzut na oś jest w dowolnym miejscu taki sam $\dfrac{1}{2}p$.

Wynika stąd, że dla wszystkich obrotowych wahadeł stabilnych, biegających po poziomych przekrojach powierzchni powstałej z obracania paraboli $x^2 = py$ wokół jej osi, okres obiegu jest taki sam i wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{\mathrm{g}}} = 2\pi\sqrt{\frac{p}{2\mathrm{g}}}$.

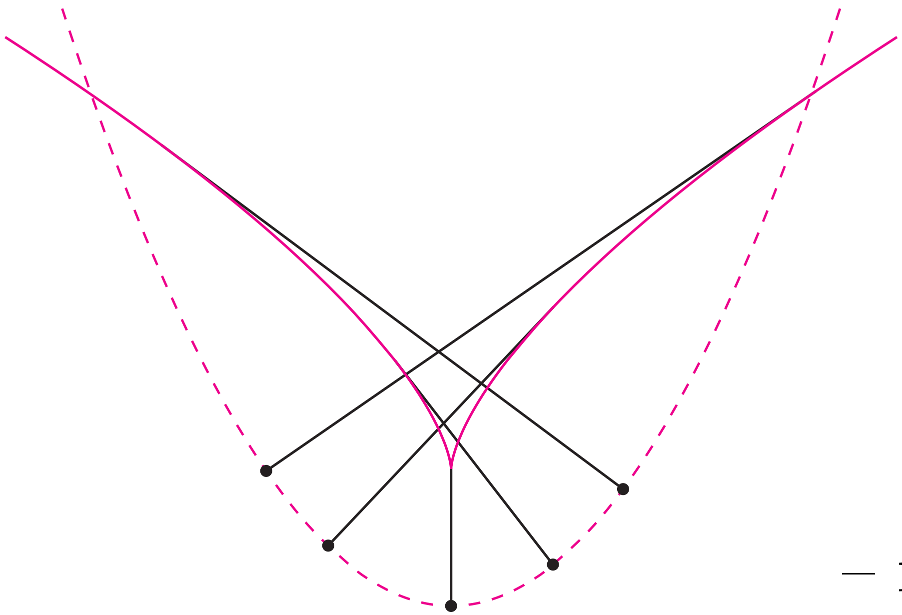
Wynika stąd, że dla wszystkich obrotowych wahadeł stabilnych, biegających po poziomych przekrojach powierzchni powstałej z obracania paraboli $x^2 = py$ wokół jej osi, okres obiegu jest taki sam i wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{p}{2g}}$.

Warto zwrócić uwagę na podobieństwo tego wzoru do wzoru na okres tautochronicznego wahadła płaskiego (patrz **cykloida**).

Nic przeto dziwnego, że Huygens również tu podjął poszukiwania odpowiedzi na pytanie: jaki przekrój powinna mieć szpulka, aby rozwijana z niej nić miała swój koniec na paraboli, czyli dla jakiej krzywej parabola jest ewolwentą?

Nie wchodząc w szczegóły rozważń Huygensa, popatrzmy na wynik. Jest nim parabola półsześcienna, będąca odpowiednio przeskalowaną i przesuniętą parabolą Neila (znanej jako krzywa o równaniu $x^2 = c \cdot y^3$).

Parabola $x^2 = py$ jest ewolwentą paraboli półsześciennej o równaniu $x^2 = \frac{2}{27p}(2y-p)^3$.



Kilka szczegółów: gdy nić zwisa z "dziobka", ma długość $\frac{1}{2}p$; koniec nici stycznej w punkcie $(\sqrt{2}p,\, 2p)$, gdzie parabola przecina parabolę półsześcienną, jest na poziomie "dziobka" – rozwinięte jest wtedy $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}p$ nici.

Warto też zauważyć, że nić rowija się "od środka".

Ta ostatnia uwaga spowodowała, iż tutaj nie może być mowy o nieruchomych kształtkach, z których nić będzie się odwijała. Huygens konstruował tylko leżącą po jednej stronie osi połowę jednej paraboli półsześciennej, która obracała się wraz z nicią.

Ta ostatnia uwaga spowodowała, iż tutaj nie może być mowy o nieruchomych kształtkach, z których nić będzie się odwijała. Huygens konstruował tylko leżącą po jednej stronie osi połowę jednej paraboli półsześciennej, która obracała się wraz z nicią.

Tym sposobem doszliśmy do sprawy technicznej realizacji tych pięknych pomysłów. Stosowne zegary powstały, ale żaden z nich nie spełnił pokładanych w nich nadziei tak Huygensa, jak brytyjskiej admiralicji, na to, że będą mogły być zegarami okrętowymi.
Faktyczny zegar okrętowy, sprężynowy, stosowany później przez blisko dwa stulecia, skonstruował – już po śmierci Huygensa – John Harrison. Potrzebował jednak aż 30 lat, by przekonać admiralicję w 1735 roku, że obiecana nagroda mu się należy.

Ale i w tym chronometrze jest wychwyt skonstruowany przez Huygensa.