Załącznik do szczegółowych zasad dyplomowania na kierunku matematyka

ZAGADNIENIA NA EGZAMIN LICENCJACKI

WSTĘP DO MATEMATYKI

1. Relacja (częściowego) porządku. Przykłady własności zbiorów liniowo uporządkowanych, których nie musi mieć każdy zbiór (częściowo) uporządkowany, i własności zbiorów dobrze uporządkowanych, których nie musi mieć każdy zbiór liniowo uporządkowany. Pojęcie izomorfizmu porządkowego. Lemat Kuratowskiego-Zorna, przykłady zastosowań.
2. Równoliczność zbiorów. Co to znaczy, że moc zbioru *A* jest mniejsza od mocy zbioru *B*? Twierdzenie Cantora (moc zbioru X jest mniejsza od mocy zbioru potęgowego zbioru X). Twierdzenie Cantora-Bernsteina. Przykłady zbiorów przeliczalnych i nieprzeliczalnych. Czy każdy zbiór nieprzeliczalny jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych? Czy istnieje zbiór o największej mocy?
3. Własności obrazu i przeciwobrazu zbioru względem funkcji. Zachowanie operacji obrazu i przeciwobrazu względem działań na zbiorach.Równoliczność obrazu zbioru A z odpowiednim zbiorem ilorazowym zbioru A.

ANALIZA MATEMATYCZNA

1. Ciągi liczb rzeczywistych. Zbieżność ciągu, warunek Cauchy'ego, zupełność zbioru liczb rzeczywistych.
2. Szeregi liczbowe, zbieżność bezwzględna i warunkowa. Przykłady kryteriów zbieżności i ich zastosowań.
3. Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji i odwzorowań. Twierdzenie o osiąganiu kresów przez funkcję ciągła na przedziale domkniętym. Przykład funkcji ciągłej niejednostajnie ciągłej.
4. Pochodna funkcji:
   - zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych;
   - odwzorowania z przestrzeni R^n o wartościach w R^m.
5. Pochodne cząstkowe. Obliczanie pochodnych.
6. Twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej (twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a). Przykład zastosowania.

7. Szeregi potęgowe; przedział zbieżności, różniczkowanie i całkowanie szeregu potęgowego, przykłady.
8. Ekstrema funkcji:
   - jednej zmiennej;
   - wielu zmiennych.
   - Warunki konieczne i dostateczne. Przykład wyznaczania ekstremum.
9. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym, twierdzenie o funkcji odwrotnej i twierdzenie o funkcji uwikłanej. Pojęcie rozmaitości różniczkowej.
10. Całka funkcji jednej zmiennej. Całka nieoznaczona i oznaczona. Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Obliczanie całek.
11. Konstrukcja całki i miary Lebesgue'a oraz miary powierzchniowej. Przykład zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a
12. Całki iterowane (twierdzenie Fubiniego). Przykłady obliczania całek iterowanych.
13. Wzór na całkowanie przez podstawienie:
   - dla funkcji jednej zmiennej;
   - dla funkcji wielu zmiennych.
   - Przykład zastosowania.
14. Twierdzenie o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy w teorii całki Lebesgue'a. Przykład zastosowania.
15. Przykład wzoru zamieniającego całkę po obszarze na płaszczyźnie na całkę po brzegu tego obszaru.

GEOMETRIA Z ALGEBRĄ LINIOWĄ

1. Rozwiązywanie układów równań liniowych. Elementarne operacje na macierzach, metoda eliminacji Gaussa. Twierdzenia Kroneckera-Cappellego i Cramera.
2. Ciała: definicja, przykłady. Liczby zespolone: własności, postać trygonometryczna, pierwiastkowanie, zasadnicze twierdzenie algebry.
3. Przestrzenie liniowe: definicja, przykłady. Układy liniowo niezależne, bazy, wymiar przestrzeni liniowej.
4. Przekształcenia liniowe: definicja, przykłady, macierz przekształcenia liniowego. Monomorfizmy, epimorfizmy, izomorfizmy. Jądro i obraz przekształcenia liniowego.
5. Przestrzenie własne i wartości własne endomorfizmów liniowych, sposoby ich znajdowania. Podobieństwo macierzy, diagonalizowalność, postać Jordana macierzy, twierdzenie Jordana.
6. Rząd, wyznacznik i ślad macierzy. Sposoby obliczania. Przykłady

zastosowań.
7. Przestrzenie przekształceń liniowych. Funkcjonały liniowe, przestrzeń sprzężona do przestrzeni liniowej, baza sprzężona.
8. Formy dwuliniowe i kwadratowe: definicje, przykłady, macierz formy dwuliniowej. Diagonalizacja form dwuliniowych i kwadratowych, twierdzenie o bezwładności.
9. Iloczyny skalarne: definicja, przykłady, kryterium Sylvestera. Przestrzenie euklidesowe, miary, kąty. Izometrie.

ALGEBRA DLA MSEM:

1. Relacje równoważności. Klasy abstrakcji, zbiór ilorazowy.
2. Relacja porządku częściowego i liniowego, elementy maksymalne i największe.
3. Porównywanie mocy zbiorów. Zbiory przeliczalne, nieprzeliczalne. Przeliczalność sumy i iloczynu kartezjańskiego zbiorów przeliczalnych. Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych. Twierdzenie Cantora.
4. Ciała: definicja, przykłady. Liczby zespolone: własności, postać trygonometryczna, pierwiastkowanie, zasadnicze twierdzenie algebry.
5. Rozwiązywanie układów równań liniowych. Operacje elementarne na macierzach, metoda eliminacji Gaussa.
6. Przestrzenie liniowe: definicja, przykłady. Układy liniowo niezależne, bazy, wymiar przestrzeni liniowej.
7. Przekształcenia liniowe: definicja, przykłady, macierz przekształcenia liniowego. Monomorfizmy, epimorfizmy, izomorfizmy. Jądro i obraz przekształcenia liniowego.
8. Rząd, wyznacznik i ślad macierzy. Sposoby obliczania. Przykłady zastosowań.
9. Endomorfizmy przestrzeni liniowych. Macierz endomorfizmu w bazie, zależność od bazy, macierze podobne. Wektory i wartości własne endomorfizmów liniowych, sposoby ich znajdowania. Podobieństwo macierzy, diagonalizowalność, postać Jordana macierzy, twierdzenie Jordana.
10. Formy dwuliniowe i kwadratowe: definicje, przykłady, macierz formy dwuliniowej.
11. Iloczyny skalarne: definicja, przykłady, kryterium Sylvestera. Przestrzenie euklidesowe, miary, kąty. Izometrie.
12. Grupa, grupa abelowa, podgrupa. Grupy permutacji. Warstwy grupy względem podgrupy, twierdzenie Lagrange'a. Homomorfizm grup, jądro homomorfizmu, dzielnik normalny, grupa ilorazowa,

twierdzenie o homomorfizmie. Działanie grupy na zbiorze.

13. Pierścienie przemienne z 1, homomorfizmy. Ideał, pierścień ilorazowy, twierdzenie o homomorfizmie. Pierścień K[X] i ideały w nim.

WSTĘP DO INFORMATYKI

1. Problem algorytmiczny i jego rozwiązanie. Przykłady.
2. Funkcje i procedury rekurencyjne. Przykłady.
3. Metoda programowania “dziel i rządź". Zastosowania.
4. Dynamiczne struktury danych: listy, stos, kolejki, drzewa binarnych poszukiwań.
5. Sposoby reprezentacji grafu, przeszukiwanie grafu wszerz i w głąb. Zastosowania.
6. Złożoność obliczeniowa algorytmu. Przykłady algorytmów o różnej złożoności obliczeniowej.
7. Hipoteza P=NP, sformułowanie, znaczenie i konsekwencje
8. Reprezentacja i arytmetyka liczb rzeczywistych w komputerze.

ALGEBRA

1. Podstawowe struktury algebraiczne: grupy, pierścienie, ciała i ich homomorfizmy. Przykłady :
    - grup – grupy permutacji, grupy izometrii, grupy macierzy;
    - pierścieni – pierścień wielomianów, pierścień szeregów formalnych, pierścień funkcji ciągłych;
    - ciał – ciała liczbowe, ciało funkcji wymiernych, ciała skończone.
2. Konstrukcje ilorazowe na przykładzie grup i pierścieni. Przykłady: abelianizacja grupy, rozszerzenie ciała o pierwiastek wielomianu.
3. Związki pomiędzy rzędem grupy i rzędami podgrup, twierdzenia Lagrange’a, Cauchy’ego i Sylowa.
4. Działania grupy na zbiorach - orbity, grupy izotropii, zbiór orbit. Przykłady: działanie grupy na zbiorze warstw względem podgrupy, działanie grupy na zbiorze swoich elementów przez automorfizmy wewnętrzne. Przykłady zastosowań.
5. Iloczyn prosty grup, klasyfikacja skończonych grup abelowych.
6. Własności elementów pierścienia: elementy odwracalne, dzielniki zera. Dziedziny całkowitości: elementy pierwsze i nierozkładalne. Dziedziny z jednoznacznością rozkładu i ich przykłady: pierścienie wielomianów, pierścień Gaussa.

7. Rozszerzenia ciał: elementy algebraiczne i przestępne. Ciała algebraicznie domknięte, algebraiczne domknięcie.

TOPOLOGIA

1. Pojęcie przestrzeni topologicznej. Topologia przestrzeni. Czy każda topologia pochodzi od jakiejś metryki? (wyjaśnij użyte pojęcia, podaj przykłady).
2. Definicja ciągłości funkcji dla przestrzeni metrycznych i dla przestrzeni topologicznych. Równoważność tych definicji w przypadku przestrzeni metrycznych (z uzasadnieniem).
3. Przestrzenie zwarte: definicja, przykłady. Metryczny warunek zwartości. Zwarte podzbiory przestrzeni R^n, funkcje ciągłe określone na przestrzeni zwartej.
4. Przestrzenie metryczne zupełne: definicje, przykłady. Czy przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna, czy przestrzeń zupełna i ograniczona jest zwarta (dlaczego tak/nie)?
5. Twierdzenie Baire'a. Dlaczego nie można opuścić żadnego z założeń tego twierdzenia?
6. Spójność i łukowa spójność przestrzeni topologicznych. Czy któraś z tych własności implikuje drugą? (przykład na brak wynikania w którąś stronę, wyjaśnij użyte pojęcia, podaj przykłady).
7. Homeomorficzność przestrzeni topologicznych, przykłady. Czy z istnienia ciągłej bijekcji $f: X \to Y$ wynika istnienie homeomorfizmu? Czy takie wynikanie ma miejsce przy jakichś szczególnych założeniach o przestrzeniach?

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego. Globalność rozwiązań.
2. 2. Rozwiązywanie równań o zmiennych rozdzielonych, a także jednorodnych i niejednorodnych metodą uzmienniania stałej.
3. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach. Równania wyższych rzędów o stałych współczynnikach.
4. Stabilność i asymptotyczna stabilność rozwiązania stacjonarnego równań autonomicznych; w szczególności, dla układu liniowego.
5. Całki pierwsze.
6. Definicja potoku i orbity. Szkicowanie portretów fazowych autonomicznych układów liniowych o stałych współczynnikach w R^2.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Model doświadczenia losowego. Aksjomaty teorii prawdopodobieństwa. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo geometryczne. Paradoksy w teorii prawdopodobieństwa.
2. Prawdopodobieństwo warunkowe. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa. Przykłady zastosowań obu wzorów.
3. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych. Model probabilistyczny dla ciągu niezależnych doświadczeń. Schemat Bernoulliego i twierdzenie Poissona.
4. Zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa. Dystrybuanty, gęstości. Typy rozkładów (dyskretne, ciągłe). Parametry rozkładów (wartość oczekiwana i wariancja). Nierówność Czebyszewa.
5. Ważniejsze rozkłady prawdopodobieństwa (Bernoulliego, Poissona, wykładniczy, gaussowski). Przykłady zagadnień, w których pojawiają się poszczególne rozkłady.
6. Suma niezależnych zmiennych losowych. Wyznaczanie jej rozkładu (gęstości, dystrybuanty) przy użyciu pojęcia splotu funkcji.
7. Zbieżność zmiennych losowych określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej: według prawdopodobieństwa, prawie na pewno i według p-tego momentu. Związki między tymi rodzajami zbieżności.
8. Twierdzenia graniczne: prawa wielkich liczb, twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a jako szczególny przypadek centralnego twierdzenia granicznego. Przykłady zastosowań.

MATEMATYKA OBLICZENIOWA

1. Numeryczne rozkłady macierzy: trójkątno-trójkątny (LU) i ortogonalno-trójkątny (QR). Zastosowania do rozwiązywania układów równań algebraicznych liniowych. Koszt, własności numeryczne.
2. Normy wektorowe i macierzowe oraz ich własności. Wrażliwość numerycznych rozwiązań układu równań liniowych na zaburzenia danych.
3. Interpolacja wielomianowa. Wzór na resztę interpolacyjną i jego zastosowania.
4. Aproksymacja w przestrzeniach unitarnych oraz jednostajna.
5. Kwadratury interpolacyjne i złożone dla numerycznego całkowania funkcji jednej zmiennej. Zbieżność kwadratur złożonych.
6. Metody numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych skalarnych. Szybkość i warunki zbieżności tych metod.

STATYSTYKA/STATYSTYCZNA ANALIZA DANYCH

1. Estymatory
2. Przedziały ufności
3. Testowanie hipotez statystycznych
4. Model liniowy Gaussa

FUNKCJE ANALITYCZNE

1. Różniczkowalność w sensie zespolonym i jej związek z równaniami Cauchy'ego-Riemanna. Co funkcje holomorficzne mają wspólnego z odwzorowaniami konforemnymi podzbiorów płaszczyzny zespolonej? Funkcje harmoniczne i ich związek z funkcjami holomorficznymi.
2. Podstawowe funkcje elementarne w dziedzinie zespolonej: funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne, gałęzie logarytmu i potęgi zespolonej. Ich podstawowe własności. Grupa homografii. Obrazy prostych i okręgów w przekształceniu homograficznym. Homografie jako przekształcenia sfery Riemanna.
3. Całki krzywoliniowe. Twierdzenie Cauchy'ego o całkach po krzywych homotopijnych. Wzór całkowy Cauchy'ego. Indeks krzywej zamkniętej na płaszczyźnie zespolonej względem punktu tej płaszczyzny - definicja i podstawowe własności.
4. Różne charakteryzacje funkcji holomorficznych. Twierdzenie Morery. Twierdzenie Weierstrassa o ciągach funkcji holomorficznych.
5. Zasada maksimum. Twierdzenie Liouville'a. Zasadnicze Twierdzenie Algebry.
6. Twierdzenie Laurenta. Osobliwości punktowe (izolowane) funkcji holomorficznych - ich klasyfikacja i podstawowe własności. Twierdzenie Riemanna o osobliwości pozornej. Twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa. Twierdzenie o residuach i jego zastosowania.
7. Zera i bieguny funkcji meromorficznej. Ich związek z pochodną logarytmiczną funkcji - zasada argumentu. Twierdzenie Rouchégo.