Całka Eudoksosa

czyli

metoda wyczerpywania

czyli

całkowanie Starożytnych

Metoda wyczerpywania

Eudoksos (−408;−355)

Jeśli z jakiejś figury płaskiej (przestrzennej) wyjmiesz więcej niż połowę,
z tego co zostanie znów wyjmiesz więcej niż połowę
i będziesz tak postępował dalej,
to suma pól (objętości) wyjętych części
dowolnie dokładnie przybliży pole (objętość) tej figury.

Uzasadnia to następujący rachunek.

Oznaczmy poszukiwane pole (objętość) figury przez S, a kolejno wyjmowane fragmentów (nie muszą być w jednym kawałku) przez $U_1, U_2, U_3, \ldots$ Z założenia $U_1 \geqslant \frac{1}{2}S$ i $U_k \geqslant \frac{1}{2}(S-(U_1+\ldots+U_{k-1}))$.

Wykażemy, że $U_1 + U_2 + \ldots + U_n \geq S \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

Dla $n = 1$ mamy tak z założenia. Jeśli więc dla pewnego k powyższa zależność ma miejsce, mamy też

$U_1 + U_2 + \ldots + U_{k+1} \geqslant$

$\geqslant U_1 + U_2 + \ldots + U_k + \frac{1}{2}\big(S - (U_1 + U_2 + \ldots + U_k)\big) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \big(S + (U_1 + U_2 + \ldots + U_k)\big) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \left(S + S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)\right) =$

$= S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)$, co kończy dowód.

Zatem mamy $S \geqslant (U_1 + U_2 + \ldots) \geqslant S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = S.$

Pozostaje pytanie, jak dowodzono, równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

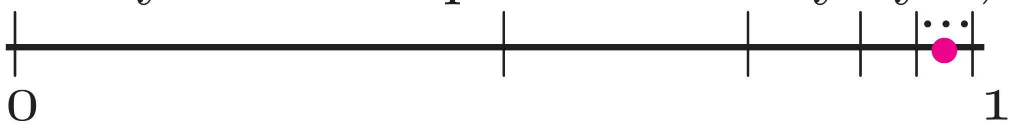
Eudoksos wykorzystywał w tym celu *aksjomat Archimedesa*,

(nazwa ahistoryczna, Archimedes był o 121 lat młodszy od Eudoksosa)

który orzeka, że dowolnie małymi krokami można przejść dowolnie długą drogę, czyli dla dowolnych dodatnich a i b

istnieje takie naturalne n, że $n \cdot a > b$.

Zabierając z odcinka kolejno połowę tego, co jeszcze zostało, za każdym razem pozostawiamy tyle, ile zabraliśmy w danym kroku



zabierając $\frac{1}{2^n}$, zostawiamy $\frac{1}{2^n}$.

Całego odcinka nie przekroczymy – wystarczy więc wykazać, że nic nie zostawimy; niech punkt • będzie odległy od 1 o x.

Wobec aksjomatu Archimedesa istnieje takie n, że $n \cdot x > 1$.

A stąd $x > \frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}$. Zatem po n krokach przekroczymy •.

W konsekwencji $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ nie jest mniejsza od 1.

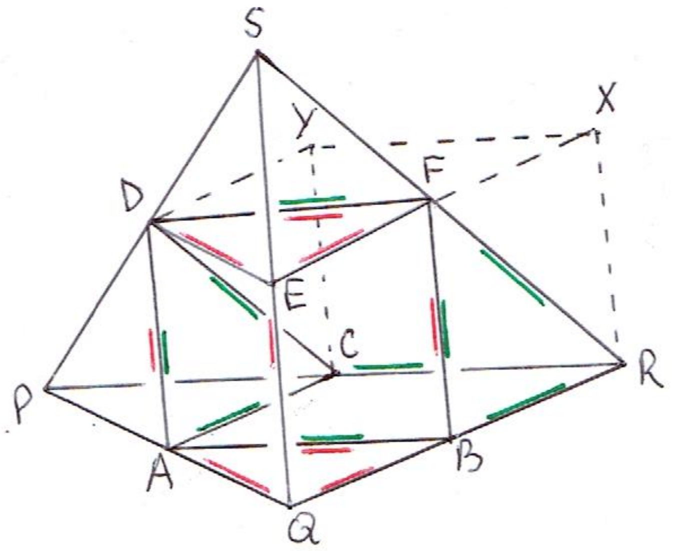
Zastosowanie metody wyczerpywania przez Euklidesa (*Elementy*, Księga XII, twierdzenie 3) do obliczenia objętości czworościanu (czyli dowolnego wielościanu, bo każdy można podzielić na czworościany) stworzyło problem, który czekał na rozwiązanie 2300 lat

(nawet problem piątego postulatu Euklidesa czekał krócej – zaledwie 1400 lat)

Metoda wyczerpywania zawiera przejście nieskończone – czy objętości czworościanu nie da się obliczyć bez takiego przejścia?

Odpowiedź brzmi NIE (patrz **Dehn**).

Problem został przez Hilberta postawiony w 1900 roku na trzeciej pozycji, gdy idzie o ważność wówczas nierozwiązanych problemów, a to dlatego, że ustalenie pola wielokąta da się wykonać bez nieskończonościowego przejścia (patrz **konstrukcje**, str.27–31). Z tego wynika od razu ustalenie pola dowolnego graniastosłupa – po prostu mnożymy podstawę przez wysokość. Hilbert uważał, że nieumiejętność odpowiedzenia na pytanie o czworościan to dla matematyków wielki wstyd.



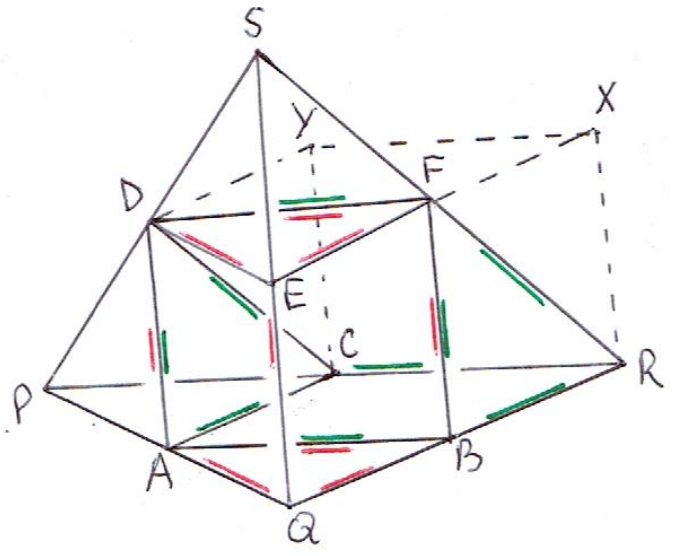
Punkty $ABCDEF$ są środkami krawędzi czworościanu $PQRS$. Euklides jako U_1 wyczerpał dwa wielościany $AQBDEF$ i $ABRCDF$. Pozostały dwa czworościany $DEFS$, który wsuwa się z zapasem (wzdłuż krawędzi QS) w $AQBDEF$, i $PACD$, wsuwający się (wzdłuż PR) w $ABRCDF$.

Zatem U_1 jest większe od połowy objętości $PQRS$ – warunek spełniony.

Jeśli $\mathcal{P}$ to pole PQR, a h to wysokość $PQRS$, to objętość graniastosłupa $AQBDEF$ to $(\frac{1}{4}\mathcal{P}) \cdot (\frac{1}{2}h) = \frac{1}{8}\mathcal{P}h$.

$ABRCDF$ to połowa graniastosłupa $ABRCDFXY$, więc jego objętość to $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\mathcal{P}) \cdot (\frac{1}{2}h) = \frac{1}{8}\mathcal{P}h$.

Zatem łącznie $U_1 = \frac{1}{4}\mathcal{P}h$.



Zostawały dwa czworościany podobne do wyjściowego w stosunku liniowym $\frac{1}{2}$. Podobna operacja wykonana na nich dawała

$U_2 = 2 \cdot (\frac{1}{2})^3 U_1 = \frac{1}{4} U_1.$

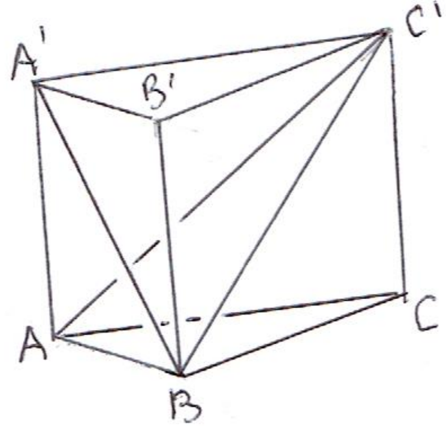
Iterując to postępowanie otrzymujemy $U_{k+1} = \frac{1}{4} U_k$.

Zgodnie więc z metodą wyczerpywania otrzymamy końcowy rezultat

$$\mathcal{V} = U_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{1}{4}\mathcal{P}h \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\mathcal{P}h,$$

co odpowiada powszechnie dziś używanemu wzorowi.

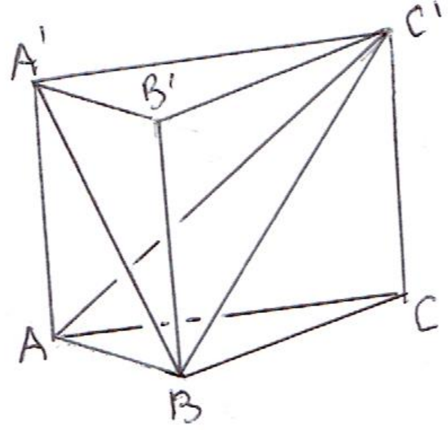
Ale Euklides tak nie zrobił.



Wyczerpywanie pokazało, że objętość czworościanu jest proporcjonalna do iloczynu pola podstawy (niezależnie od tego, którą ścianę za podstawę uznamy) przez wysokość (odpowiednią). Euklides współczynnik tej proporcjonalności ustalił nie arytmetycznie, lecz geometrycznie.

W wierzchołkach A i B czworościanu $ABCC'$ wystawiamy odcinki AA' i BB' równe i równoległe do CC'.
Łącząc A' z B, B' i C' oraz B' z C', otrzymujemy trzy czworościany, dające w sumie graniastosłup $ABCA'B'C'$.

Euklides dowodzi, że mają one taką samą objętość, a więc objętość każdego z nich to $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa.



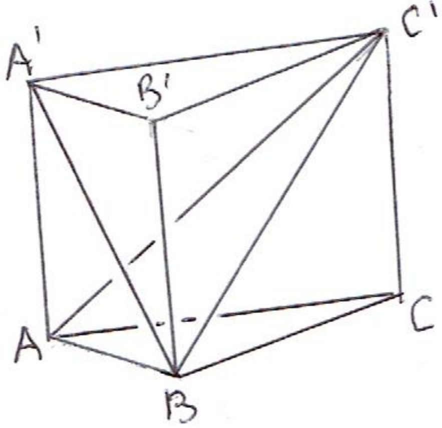
Oto ten dowód

(*Elementy*, Księga XII, twierdzenie 7).

Ponieważ ABC i $A'B'C'$ – podstawy czworościanów $ABCC'$ i $A'B'C'B$ – są identyczne, a czworościany te mają tę samą wysokość, więc mają też taką samą objętość.

Z kolei $A'B'B$ i $A'B'A$ – podstawy czworościanów $A'B'BC'$ i $A'B'AC'$ – są identyczne, a ponadto czworościany te mają wspólny wierzchołek i tym samym równą wysokość, więc i one mają tę samą objętość.

A ponieważ $A'B'C'B$ i $A'B'BC'$ to ten sam czworościan, więc wszystkie trzy czworościany mają tę samą objętość.



Przytoczony na poprzedniej stronie dowód, jak każdy dowód, ma założenia. Jednym z nich jest uzyskane poprzez wyczerpywanie spostrzeżenie, że objętość czworościanu dana jest przez $c \cdot \mathcal{P}h$, gdzie c jest stałą uniwersalną, czyli tą samą dla wszystkich czworościanów. Wiedział to Euklides, wiedział o tym Hilbert, formułując swój III problem, wiedział Max Dehn, rozwiązując ten problem (patrz **Dehn**), ale niestety nie wszyscy autorzy podręczników szkolnych o tym wiedzą. Dlatego widoczny tu rysunek niejednokrotnie podawany jest jako dowód poprawności wzoru na objętość czworościanu.

To daje asumpt do zapytania, czy w szkole uczymy matematyki, czy tylko korzystania z niej.

Metoda wyczerpywania jest obecna w wielu pracach Archimedesa, ale szczególnie ważne jest jej użycie w pracy *Pomiar koła* (patrz **pi**.