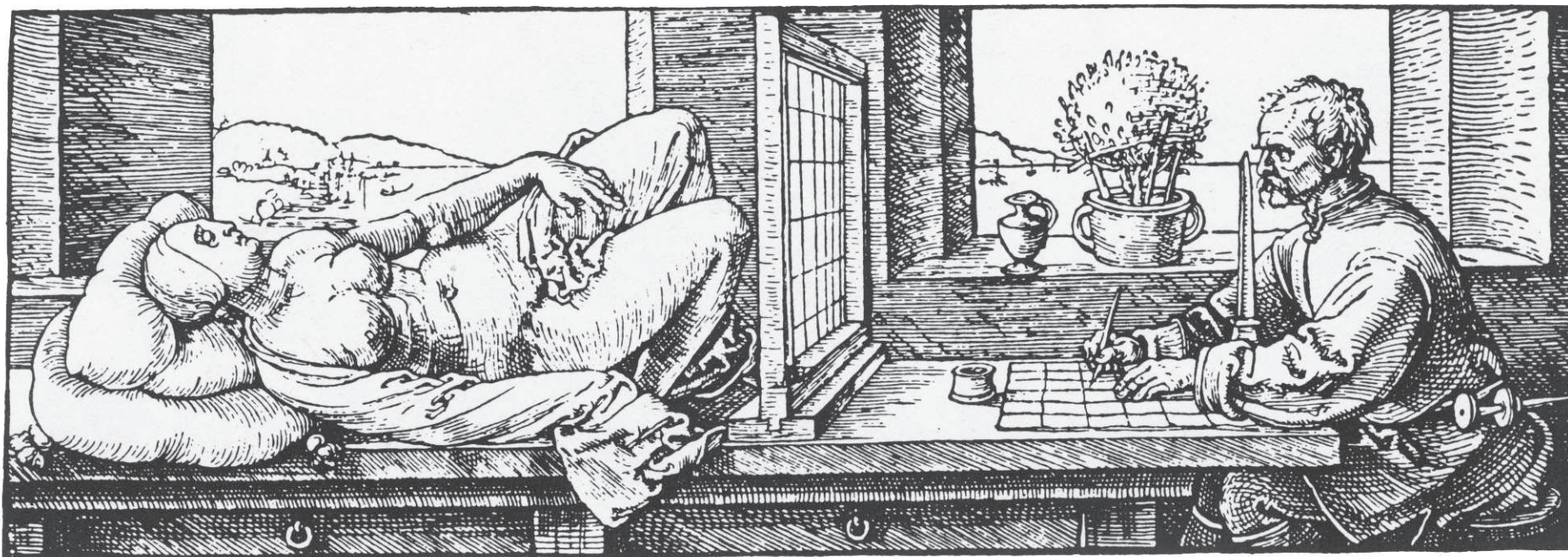


Geometria rzutowa

oglądana z różnych stron



Albrecht Dürer, Matematyka dla dorosłych, 1525

Felix Klein (1849–1925)

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische

1872

Forschungen

To jest prawdziwy **Program Erlangeński**,

a nie jego prymitywne resztki

sprzedawane w ramach geometrii analitycznej:

dwa obiekty są jednakowe, gdy mają tę samą grupę automorfizmów

to znacznie więcej niż izomorfizm!

(obiekty nie muszą być podobnie sformalizowane).

Pozwala to **utożsamiać obiekty** pochodzące “z różnych szuflad”
oraz stosować w danej dziedzinie fakty uzyskane w innej.

Felix Klein (1849–1925)

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische

1872

Forschungen

To jest prawdziwy **Program Erlangeński**,

a nie jego prymitywne resztki

sprzedawane w ramach geometrii analitycznej:

dwa obiekty są jednakowe, gdy mają tę samą grupę automorfizmów

to znacznie więcej niż izomorfizm!

(obiekty nie muszą być podobnie sformalizowane).

Ale też pozwala dla danego pojęcia matematycznego

uzyskiwać **różne realizacje, różne modele**,

co umożliwia oczywiste unaocznianie różnych jego własności.

Powiedzmy dobitniej,
w każdym modelu
możemy tak dalece bezpośrednio
zobaczyć pewne własności modelowanego obiektu,
że uwalnia nas to od dowodzenia,
iż takie własności mu przysługują.

Byłoby zapewne przesadą stwierdzenie,
że mając odpowiedni kalejdoskop modeli
możemy dowodzenie zastąpić
potrząsaniem tym kalejdoskopem,

но стремиться надо

a więc do roboty.

Klasyczny model geometrii rzutowej

to malarska perspektywa zbieżna.

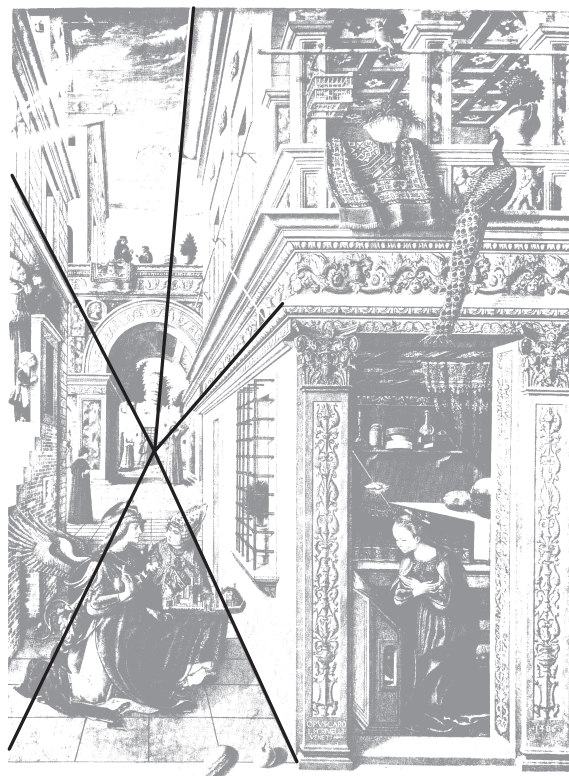
Polegała ona na odkryciu, że ponieważ oddalający się równoległe odcinek widzimy pod coraz mniejszym kątem, domniemać można, iż “w końcu” proste równoległe zbiegają się w jednym punkcie.

I tak płaszczyzna afiniczna wzbogacona została przez dodatkowe punkty (ongiś kierunki) oraz o dodatkową prostą z nich złożoną.



Klasyczny model geometrii rzutowej

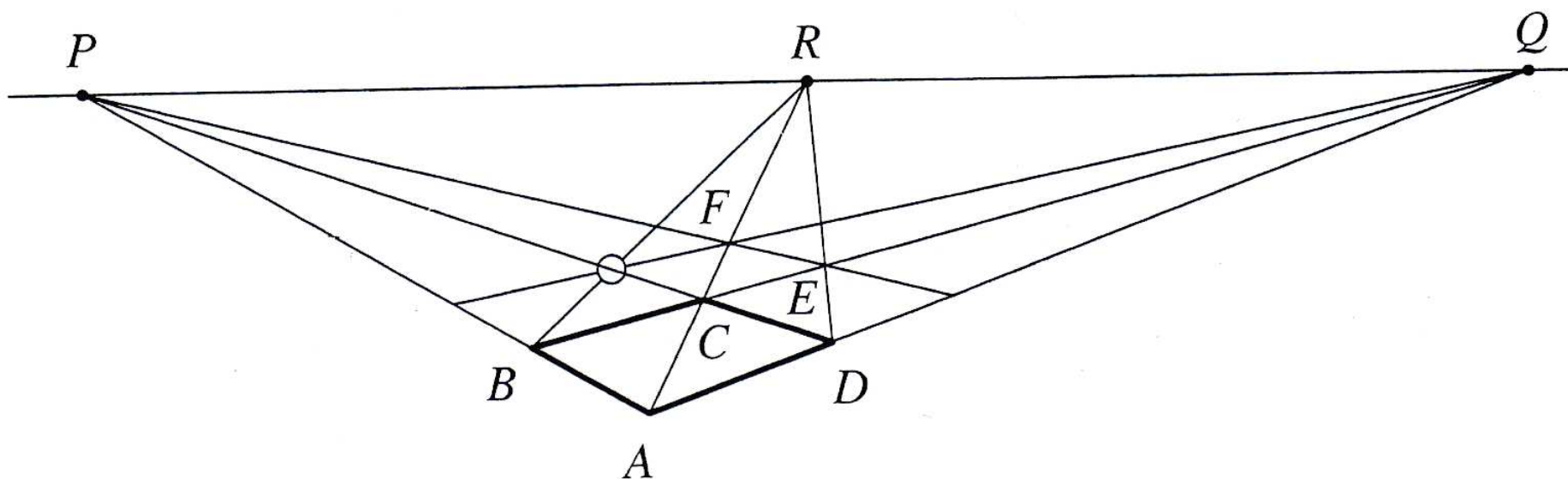
to malarska perspektywa zbieżna.



Polegała ona na odkryciu, że ponieważ oddalający się równoległe odcinek widzimy pod coraz mniejszym kątem, domniemać można, iż “w końcu” proste równoległe zbiegają się w jednym punkcie.

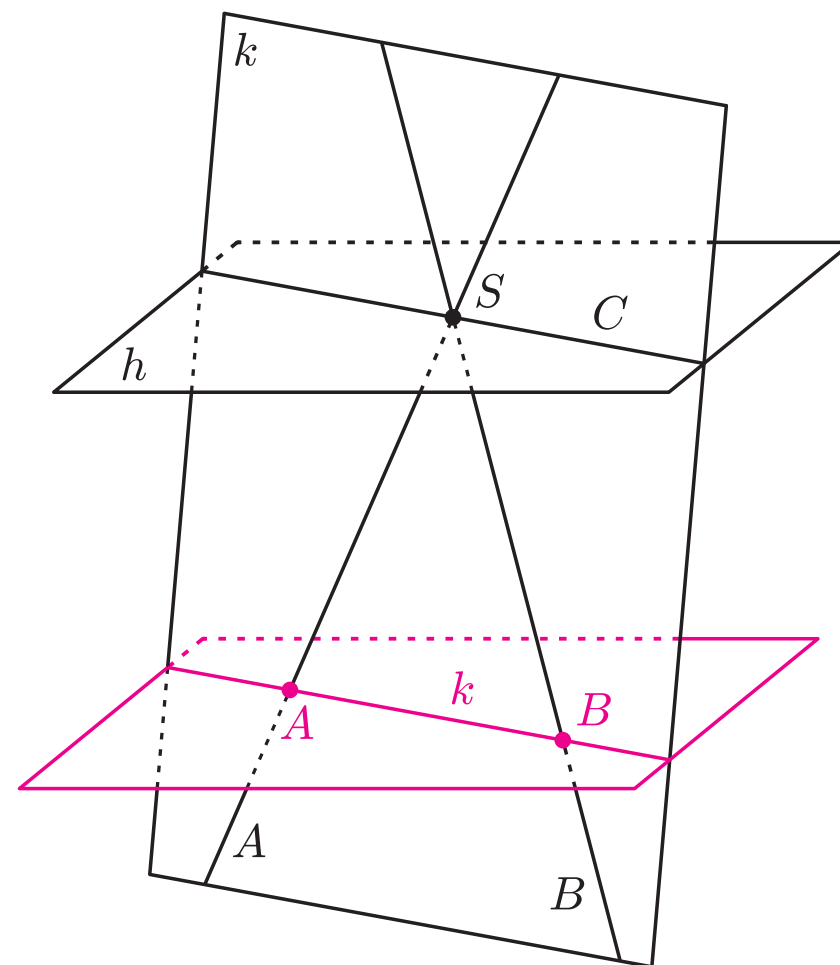
I tak płaszczyzna afiniczna wzbogacona została przez dodatkowe punkty (ongiś kierunki) oraz o dodatkową prostą z nich złożoną.

A stała się teorią matematyczną,
bo już nawet przy rysowaniu parkietażu z kwadratowych płytek



pojawiały się niedające się intuicyjnie objaśnić niespodzianki.

Model środkowy,
dawne punkty
stają się prostymi przez środek,
dawne proste –
płaszczyznami przez środek;
nie brakuje żadnej prostej
ani płaszczyzny przez środek.



Model środkowy,

dawne punkty

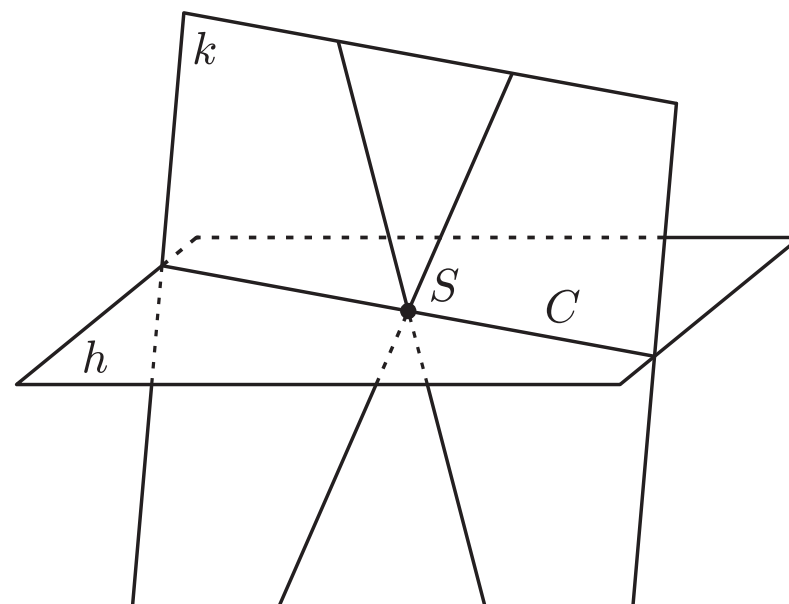
stają się prostymi przez środek,

dawne proste –

płaszczyznami przez środek;

nie brakuje żadnej prostej

ani płaszczyzny przez środek.



Po odrzuceniu klasycznej płaszczyzny widzimy, że

1. płaszczyzna rzutowa jest jednorodna,

Model środkowy,

dawne punkty

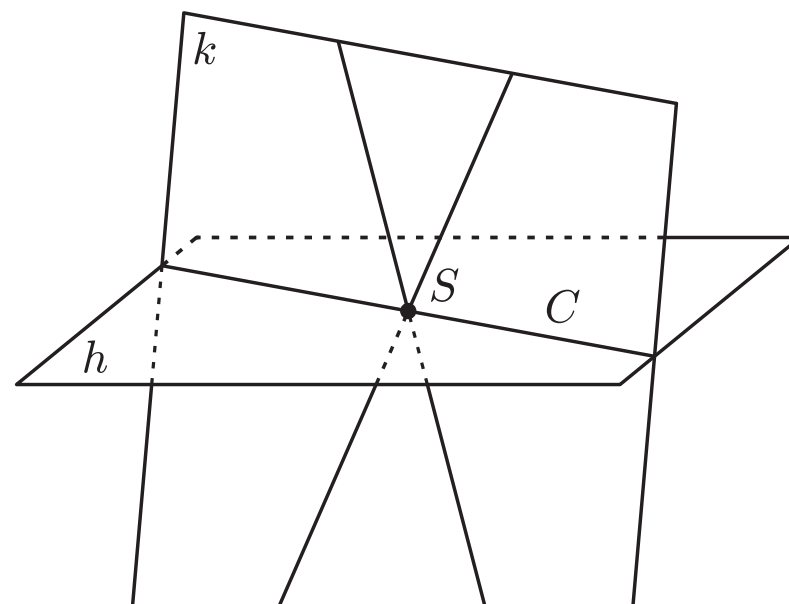
stają się prostymi przez środek,

dawne proste –

płaszczyznami przez środek;

nie brakuje żadnej prostej

ani płaszczyzny przez środek.



Po odrzuceniu klasycznej płaszczyzny widzimy, że

1. płaszczyzna rzutowa jest jednorodna,
2. jej punkty można opisać trójkami liczb $[a, b, c]_{\sim}$ z dokładnością do proporcjonalności, płaszczyzny też $[p, q, r]_{\sim}$, a ich incydencję zależnością $ap + bq + cr = 0$,

Model środkowy,

dawne punkty

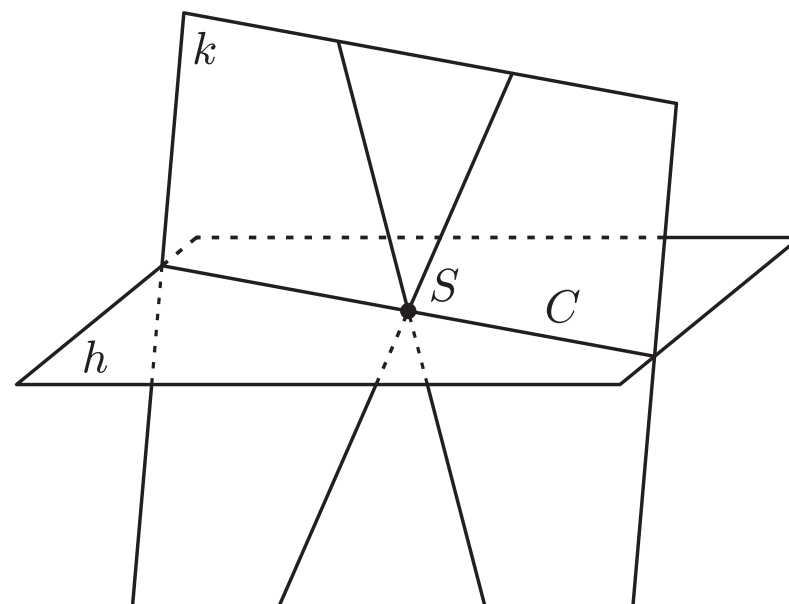
stają się prostymi przez środek,

dawne proste –

płaszczyznami przez środek;

nie brakuje żadnej prostej

ani płaszczyzny przez środek.



Po odrzuceniu klasycznej płaszczyzny widzimy, że

1. płaszczyzna rzutowa jest jednorodna,
2. jej punkty można opisać trójkami liczb $[a, b, c]_{\sim}$ z dokładnością do proporcjonalności, płaszczyzny też $[p, q, r]_{\sim}$, a ich incydencję zależnością $ap + bq + cr = 0$,
3. mamy więc **dualność!**

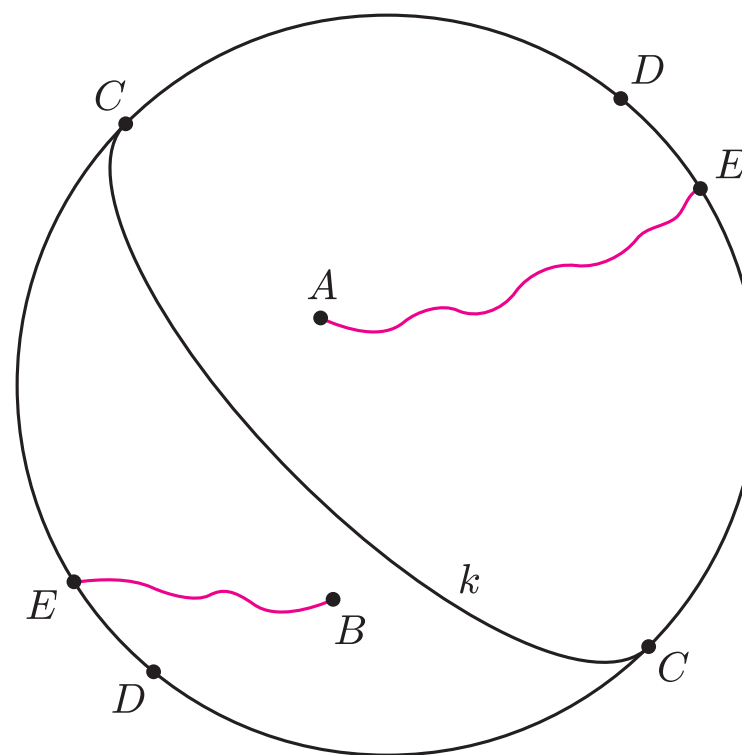
Model sferyczny, czysto roboczy
powstaje jako szkody wyrządzone przez model środkowy
na sferze o środku w $(0, 0, 0)$:
punkty to pary antypodycznych punktów sfery,
proste to okręgi wielkie.

Model na półsferze, wykonany po konsultacji z optykiem:
to, co widać,
gdy widać dokładnie pół sfery;

Model sferyczny, czysto roboczy
powstaje jako szkody wyrządzone przez model środkowy
na sferze o środku w $(0, 0, 0)$:
punkty to pary antypodycznych punktów sfery,
proste to okręgi wielkie.

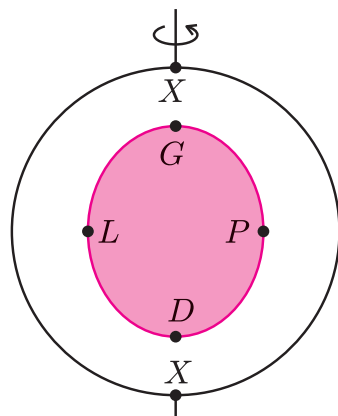
Model na półsferze, wykonany po konsultacji z optykiem:

to, co widać,
gdy widać dokładnie pół sfery;
np. żadna prosta nie oddzieli
Boba od Alicji
(nawet gdy jest nietrzeźwy!),
czyli
prosta nie rozcina płaszczyzny,
co więcej
płaszczyzna leży po jednej stronie
każdej swojej prostej.



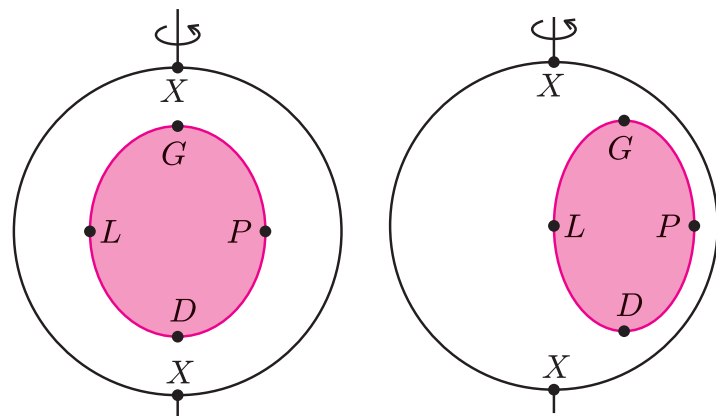
Główną zaletą modelu na półsfery jest to, że można, nie ruszając się z miejsca oglądać go z różnych stron: wystarczy obracać!

Rozważmy więc dziurę:



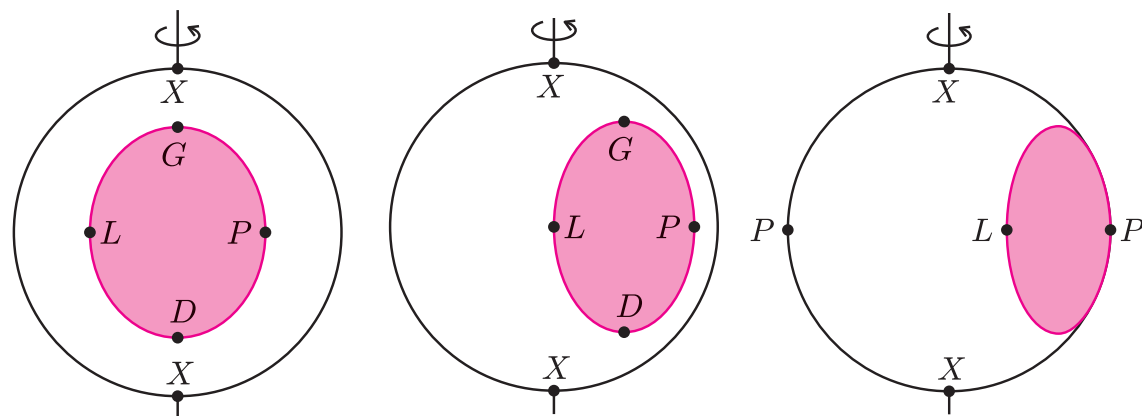
Główną zaletą modelu na półsfery jest to, że można, nie ruszając się z miejsca oglądać go z różnych stron: wystarczy obracać!

Rozważmy więc dziurę:



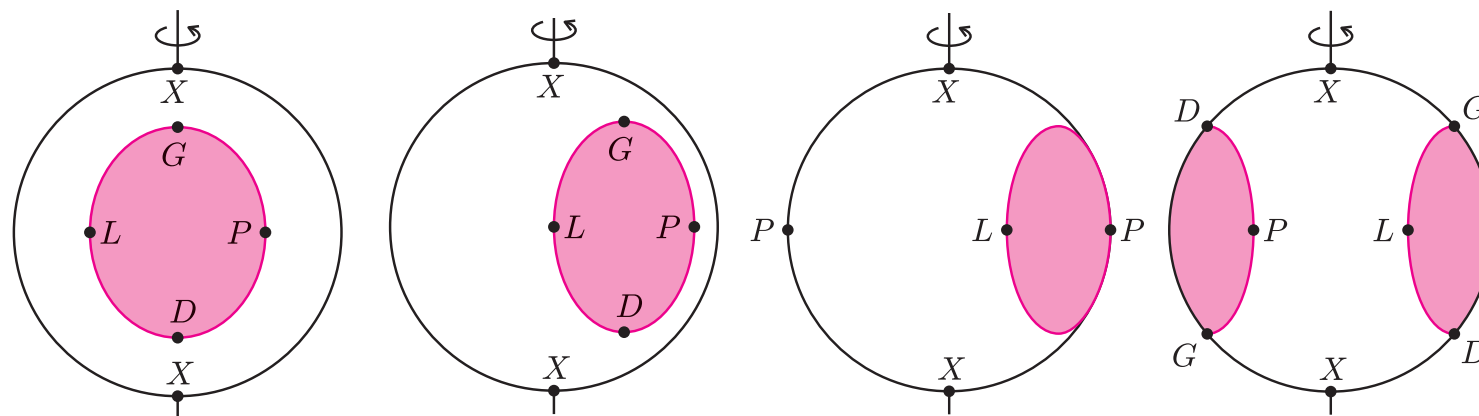
Główną zaletą modelu na półsfery jest to, że można, nie ruszając się z miejsca oglądać go z różnych stron: wystarczy obracać!

Rozważmy więc dziurę:



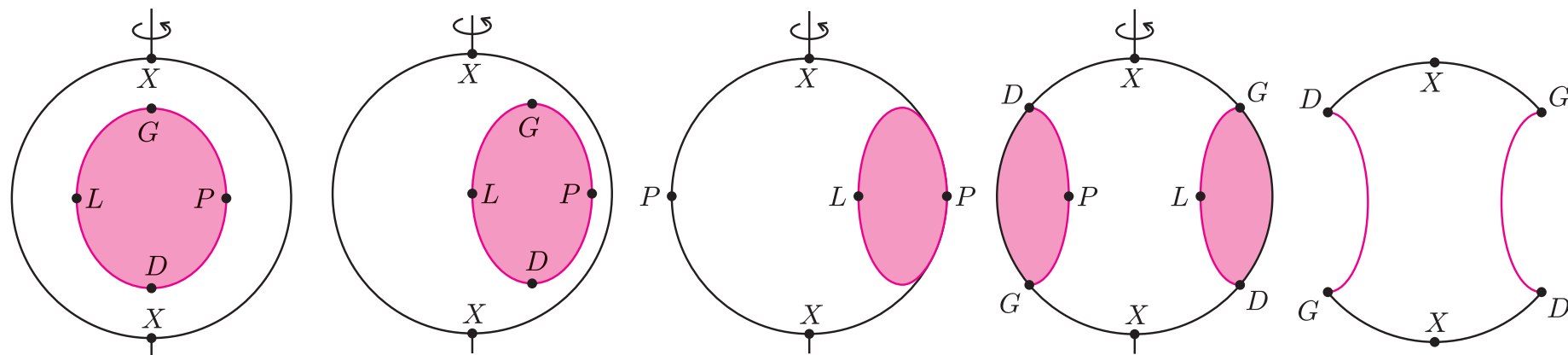
Główną zaletą modelu na półsferyze jest to, że można, nie ruszając się z miejsca oglądać go z różnych stron: wystarczy obracać!

Rozważmy więc dziurę:



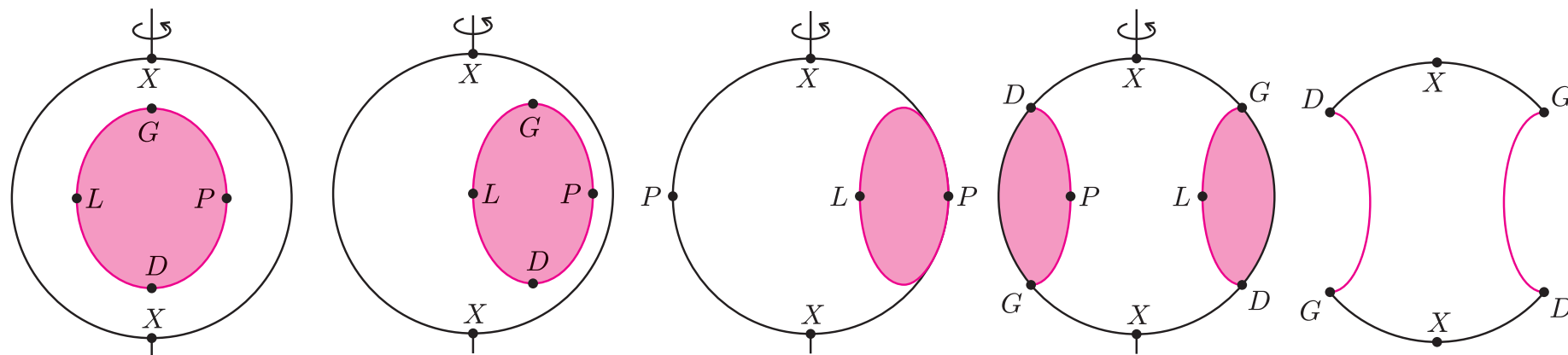
Główną zaletą modelu na półsferyze jest to, że można, nie ruszając się z miejsca oglądać go z różnych stron: wystarczy obracać!

Rozważmy więc dziurę:



Główną zaletą modelu na półsfery jest to, że można, nie ruszając się z miejsca oglądać go z różnych stron: wystarczy obracać!

Rozważmy więc dziurę:



Okazuje się, że płaszczyzna rzutowa to

sklejenie brzegami wstęgi Möbiusa i koła.

Wynika stąd, że płaszczyzna rzutowa jest **nieorientowalna**,
i byłaby jednostronna, gdyby dała się **zanurzyć w \mathbb{R}^3** ,
ale **nie daje się** –

to jednak sprawdzimy w realu.

Najlepszy model w realu stworzył Archimedes posługując się ciężarami i wyporami.

Dla dwóch punktów materialnych A i B

obdarzonych masami m_A i m_B

środek ciężkości S spełnia warunek $m_A \overrightarrow{SA} + m_B \overrightarrow{SB} = 0$,
czyli $m_A : m_B = \overrightarrow{SB} : \overrightarrow{AS}$,

co w szkole bojącej się wektorów nazywa się dźwignią jednostronną lub dwustronną.

Środek ciężkości punktów A i B leży na prostej AB

chyba że $m_A + m_B = 0$

– wtedy należy do prostej dodać dodatkowy punkt,

zamykając ją w prostą rzutową.

Sprawdźmy sami:

●
1

●
2

Sprawdźmy sami:

●
1

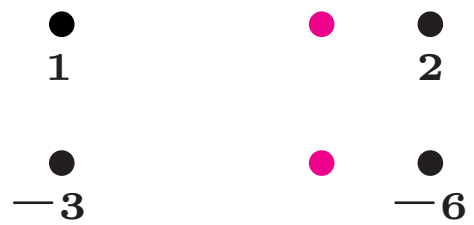


●
2

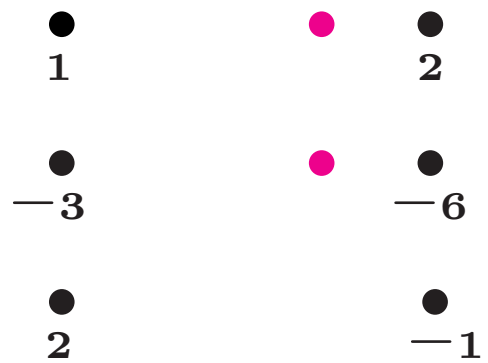
Sprawdźmy sami:



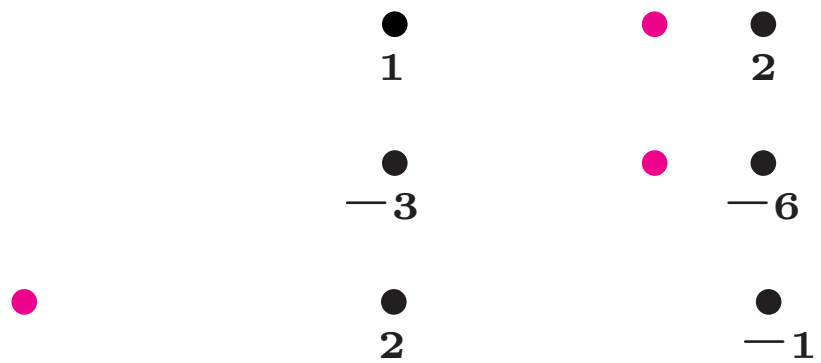
Sprawdźmy sami:



Sprawdźmy sami:



Sprawdźmy sami:



Sprawdźmy sami:



1



2



-3



-6



2



-1



2



-3

Sprawdźmy sami:



1



2



-3



-6



2



-1



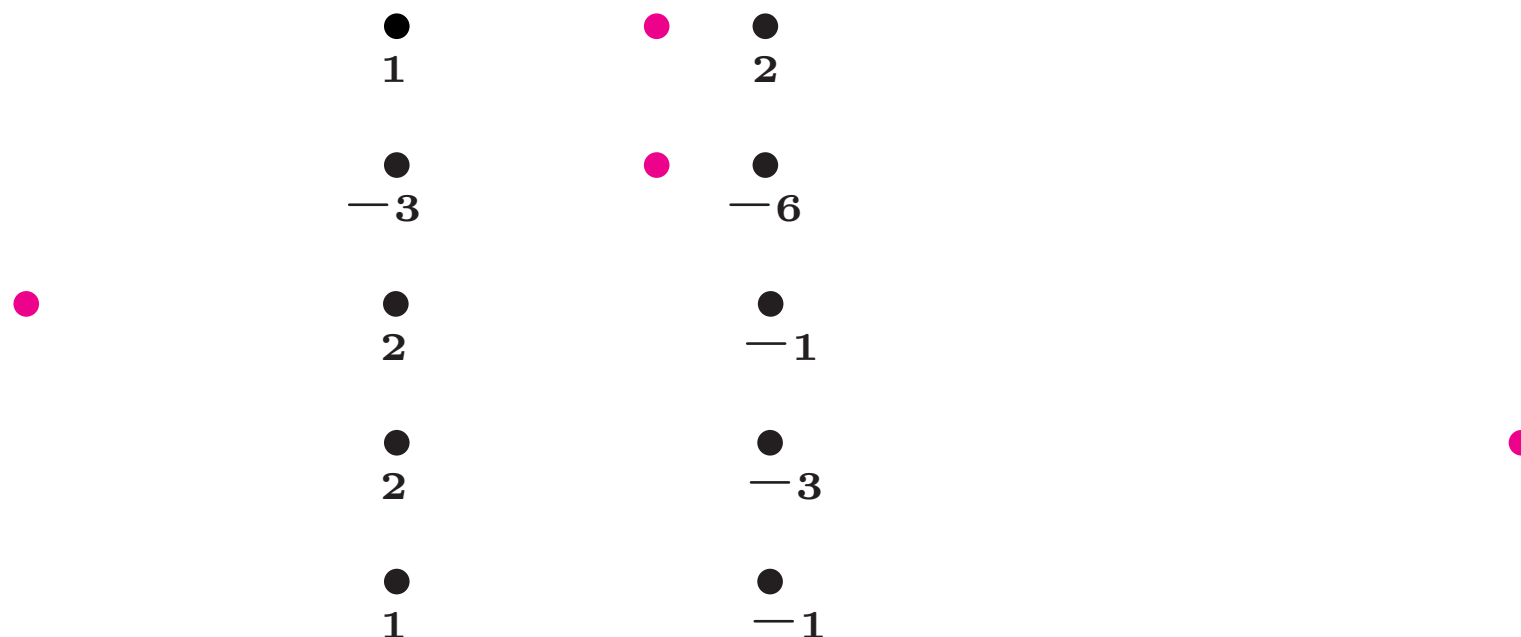
2



-3



Sprawdźmy sami:



Jak widać odpowiednio obciążając ustalone dwa punkty możemy środek ciężkości umieścić w dowolnym punkcie prostej rzutowej.

Te obciążenia to **współrzędne barycentryczne**,
są dane z dokładnością do proporcjonalności.

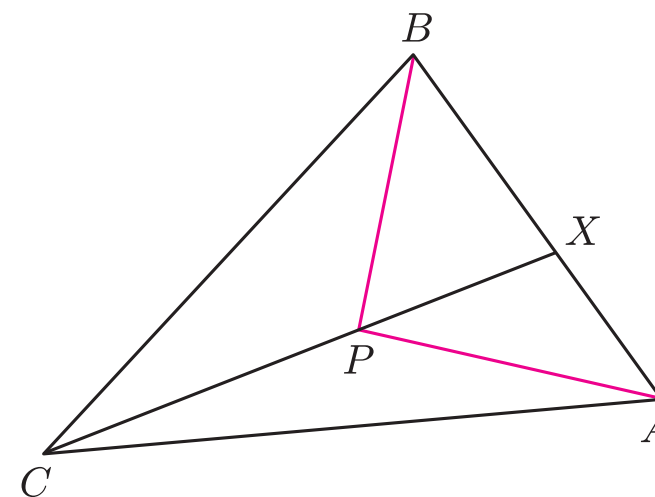
Aby to przenieść na dowolny wymiar, należy wskazać odpowiednik zasady “**ramię razy siła**” w dowolnym wymiarze.

Odpowiednikiem zasady “ramię razy siła” na płaszczyźnie jest następujące spostrzeżenie

Jeśli środkiem ciężkości pm (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) jest punkt P , to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to pole trójkąta XYZ .

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} \frac{m_A}{m_B} &= \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \\ &= \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}. \end{aligned}$$



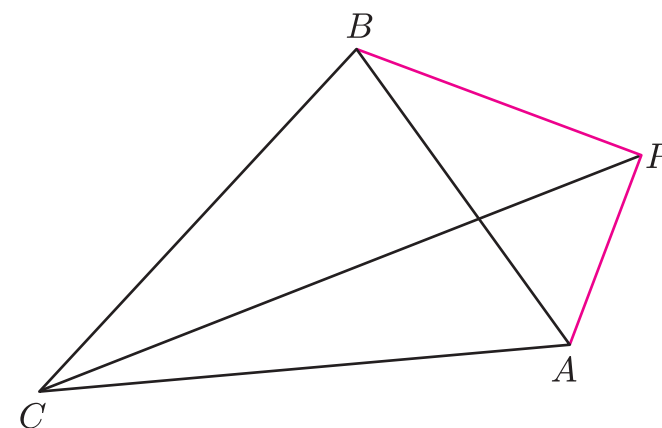
Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.

Odpowiednikiem zasady “ramię razy siła” na płaszczyźnie jest następujące spostrzeżenie

*Jeśli środkiem ciężkości pm (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) jest punkt P , to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to *zorientowane* pole trójkąta XYZ .*

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} \frac{m_A}{m_B} &= \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \\ &= \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}. \end{aligned}$$



Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.

Gdy chcemy, aby dotyczyło to całej płaszczyzny, powinniśmy posługiwać się pojęciem pola *zorientowanego*.

Gdy ustalimy trójkąt ABC , możemy liczby $(\Delta_{BCP}, \Delta_{CAP}, \Delta_{ABP})$ uznać za współrzędne punktu P .

Od razu widać, jak tę operację powtórzyć w dowolnym skończonym wymiarze n przypisując punktom przy ustalonym sympleksie odniesienia $n + 1$ liczb z dokładnością do proporcjonalności, stanowiących ich współrzędne barycentryczne.

Gdy ustalimy trójkąt ABC , możemy liczby $(\Delta_{BCP}, \Delta_{CAP}, \Delta_{ABP})$ uznać za współrzędne punktu P .

Od razu widać, jak tę operację powtórzyć w dowolnym skończonym wymiarze n przypisując punktom przy ustalonym sympleksie odniesienia $n + 1$ liczb z dokładnością do proporcjonalności, stanowiących ich współrzędne barycentryczne.

Dla punktów, których suma współrzędnych barycentrycznych jest niezerowa, można – rezygnując z proporcjonalności – używać **współrzędnych arealnych**

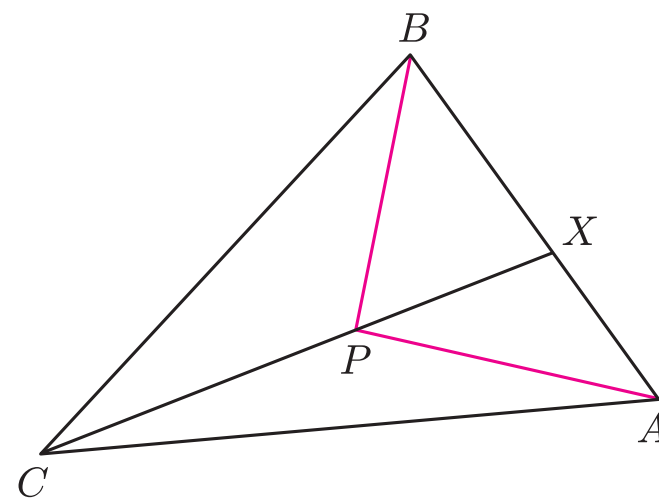
$$(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3) := \left(\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \right).$$

Mamy więc

$$\Delta(BCP) = \bar{m}_1 \cdot \Delta(ABC),$$

$$\Delta(CAP) = \bar{m}_2 \cdot \Delta(ABC),$$

$$\Delta(ABP) = \bar{m}_3 \cdot \Delta(ABC),$$



Mamy więc

$$\Delta(BCP) = \bar{m}_1 \cdot \Delta(ABC),$$

$$\Delta(CAP) = \bar{m}_2 \cdot \Delta(ABC),$$

$$\Delta(ABP) = \bar{m}_3 \cdot \Delta(ABC),$$

Z czego natychmiast wynika, że gdy trójkątem odniesienia są

kartezjańskie punkty $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$,

to współrzędnymi arealnymi punktu

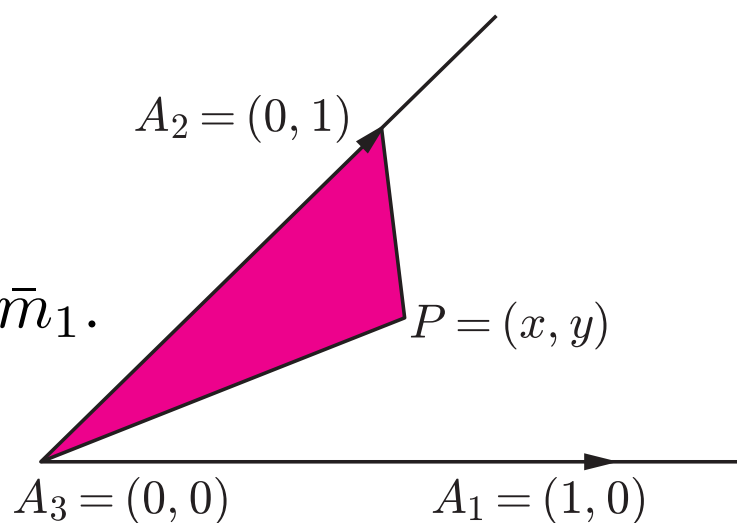
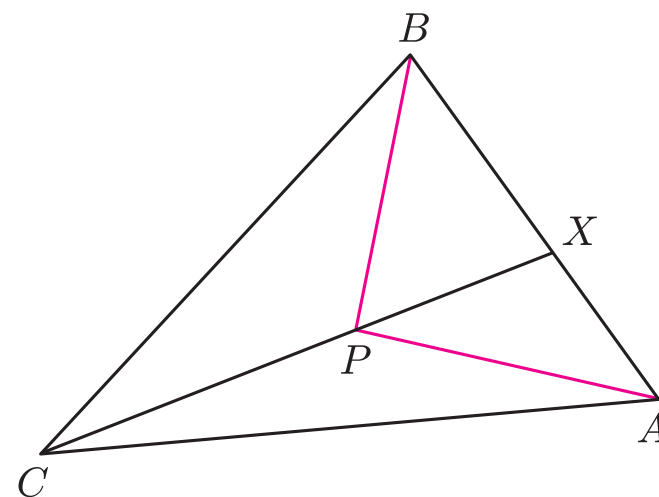
o współrzędnych kartezjańskich (x, y)

są $(x, y, 1 - x - y)$,

albowiem

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{m}_1.$$

Analogicznie, $y = \bar{m}_2$.



Dla punktów $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$,
danych przez swoje współrzędne arealne mamy zatem

$$\begin{aligned}
\Delta_{PQR} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 & 0 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 & 0 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_1 + p_2 + p_3 \\ q_1 & q_2 & q_1 + q_2 + q_3 \\ r_1 & r_2 & r_1 + r_2 + r_3 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Dla punktów $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$, danych przez swoje współrzędne arealne mamy zatem

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Punkty P, Q, R są więc współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ a równanie prostej } PQ \text{ to } \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{czyli } x_1 \cdot \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jak łatwo zauważyć, równanie to nie zmieni się, gdy przejdziemy do dowolnych współrzędnych barycentrycznych.

Z tego, że równanie prostej pozostaje liniowe można wyprowadzić wniosek, że stopień tworów algebraicznych rozważanego w geometrii rzutowej nie ulega zmianie.

Z proporcjonalności współrzędnych wynika natomiast **jednorodność wszelkich zależności geometrycznych.**

Dla przypomnienia:

funkcja f zmiennych x_1, \dots, x_n jest jednorodna w stopniu k ,
gdy spełnia warunek $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$,

na przykład wielomian $x^5 + 3xyz^3 - 7x^2y^2z + xy^2z^2$
jest jednorodny w stopniu 5.

Funkcja jednorodna nie musi być wielomianem,
a nawet stopień jednorodności nie musi być liczbą całkowitą
– śmieszny przykład z Fichtengolca:

$x^\pi \sin \frac{x}{y} + y^\pi \cos \frac{y}{x}$ jest jednorodny w stopniu π .

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$$

Ale ma miejsce bardzo ważne twierdzenie,
leżące u podstaw geometrii algebraicznej:

*Funkcja jednorodna w stopniu k i gładka w stopniu k
(czyli mająca k ciągłych pochodnych) jest wielomianem.*

Powód (a właściwie dowód) to dwa oczywiste fakty:

pochodne cząstkowe funkcji m -jednorodnej są $(m - 1)$ -jednorodne;

i ma miejsce **wzór Eulera** $\sum_i^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \cdot x_i = k \cdot f(x_1, \dots, x_n)$.

Stąd indukcyjnie mamy tezę, bo

0-jednorodna funkcja klasy C^0 , czyli ciągła,

spełnia dla każdego t warunek $f(tx_1, \dots, tx_n) = 1 \cdot f(x_1, \dots, x_n)$,

czyli jest stała, a więc jest wielomianem.

IV problem Hilberta: zmetryzować płaszczyznę rzutową,
czyli wskazać taką metrykę,
że proste rzutowe (dane nam wraz z przestrzenią)
okażą się prostymi lub okręgami wielkimi w sensie metryki.

Prosta w metryce ρ to taki zbiór punktów,
że dla dowolnych trzech z nich A, B, C zachodzi

$$\begin{aligned}\rho(AB) + \rho(BC) &= \rho(AC) \vee \\ \vee \rho(BC) + \rho(CA) &= \rho(BA) \vee \\ \vee \rho(CA) + \rho(AB) &= \rho(CB).\end{aligned}$$

Okrąg wielki w metryce ρ to taki zbiór punktów,
w którym istnieją takie trzy punkty A, B, C ,
że dla każdego z punktów X tego zbioru zachodzi

$$\begin{aligned}\rho(AX) + \rho(XB) &= \rho(AB) \vee \\ \vee \rho(BX) + \rho(XC) &= \rho(BC) \vee \\ \vee \rho(CX) + \rho(XA) &= \rho(CA).\end{aligned}$$

Odpowiedź:

Georg Hamel, *Über die Geometrien in denen Geraden die Kürzesten sind*, Math. Ann. 57(1903), 231-264

Jeżeli metryzujemy całą płaszczyznę rzutową, jedyną możliwością jest wzięcie metryki, w której w modelu na półsferze odległość będziemy mierzyli nitką – to się nazywa **metryka eliptyczna**.

Odpowiedź:

Georg Hamel, *Über die Geometrien in denen Geraden die Kürzesten sind*, Math. Ann. 57(1903), 231-264

Jeżeli metryzujemy całą płaszczyznę rzutową, jedyną możliwością jest wzięcie metryki, w której w modelu na półsferze odległość będziemy mierzyli nitką – to się nazywa **metryka eliptyczna**.

W przypadku, gdy usuniemy jedną prostą, czyli będziemy metryzowali płaszczyznę afiniczną, będzie to jedna z **metryk Minkowskiego**.

A gdy będziemy metryzowali (otwarty) wypukły podzbiór płaszczyzny afinicznej – jedna z **metryk Hilberta**.

Obie te rodziny metryk opisane są za pomocą zbioru wypukłego, w pierwszym przypadku środkowo symetrycznego.

Obierzmy zbiór wypukły domknięty i środkowo symetryczny (zwany niedawno jeszcze ciałem cechującym) i mianujemy go kołem jednostkowym.

Wówczas metryka dana jako

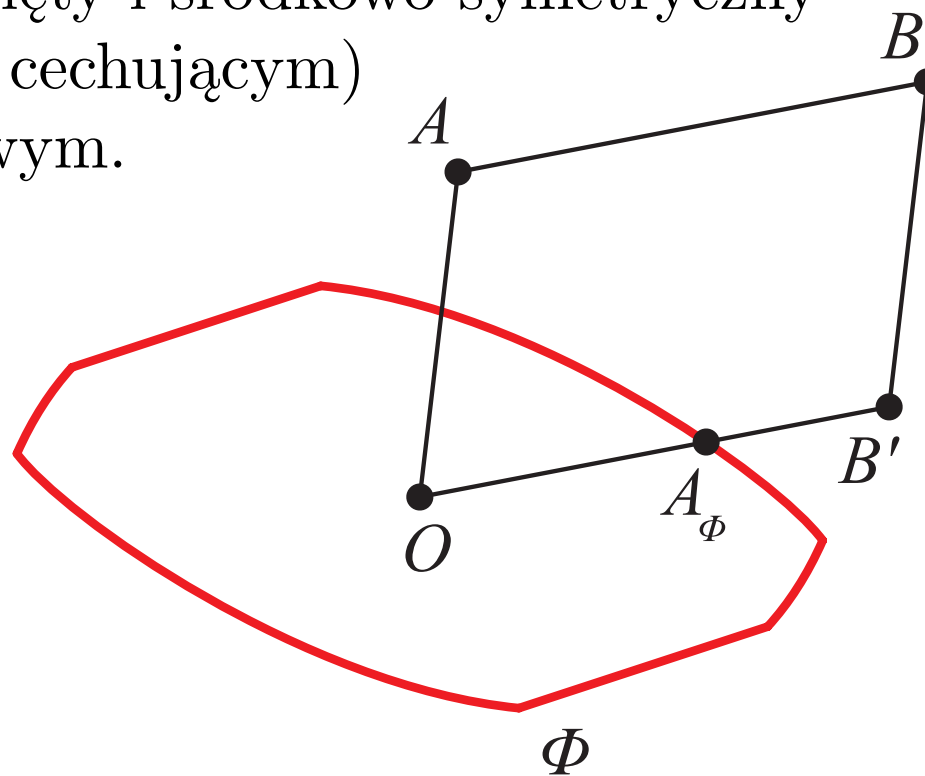
$$\rho_{\Phi}(AB) =: OB' / OA_{\Phi}$$

jest przesuwalna,

a wszelkie koła są

dylatacyjnymi obrazami

ciała cechującego.



Obie te rodziny metryk opisane są za pomocą zbioru wypukłego, w pierwszym przypadku środkowo symetrycznego.

Obierzmy zbiór wypukły domknięty i środkowo symetryczny (zwany niedawno jeszcze ciałem cechującym) i mianujemy go kołem jednostkowym.

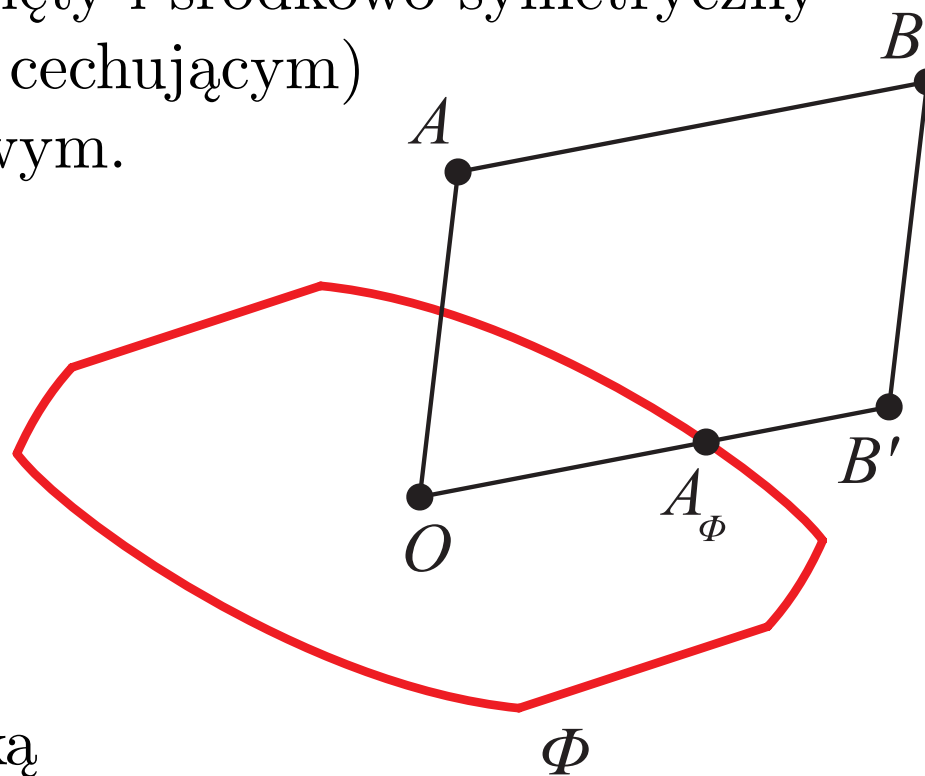
Wówczas metryka dana jako

$$\rho_{\Phi}(AB) =: OB' / OA_{\Phi}$$

jest przesuwalna, a wszelkie koła są dylatacyjnymi obrazami ciała cechującego.

Łatwo zauważyć, że taką metryką jest zarówno metryka miejska, jak maksimum.

Obie one dają tę samą geometrię, ale też nie metryzują płaszczyzny afinicznej w sensie IV problemu Hilberta.



“Cienkie” proste uzyskujemy, gdy
w brzegu ciała cechującego nie ma odcinków,
zatem metryka dana przez mocno wypukłe ciało cechujące
jest metryką Minkowskiego.

Geometria dana przez metrykę Minkowskiego zależy
od własności brzegu ciała cechującego,
np. jedyność opuszczania i wystawiania prostopadłej
ma miejsce tylko, gdy brzeg ten jest gładki.

Kolekcjonowanie takich zależności było ważnym
polem badawczym przez pierwszą połowę XX wieku.

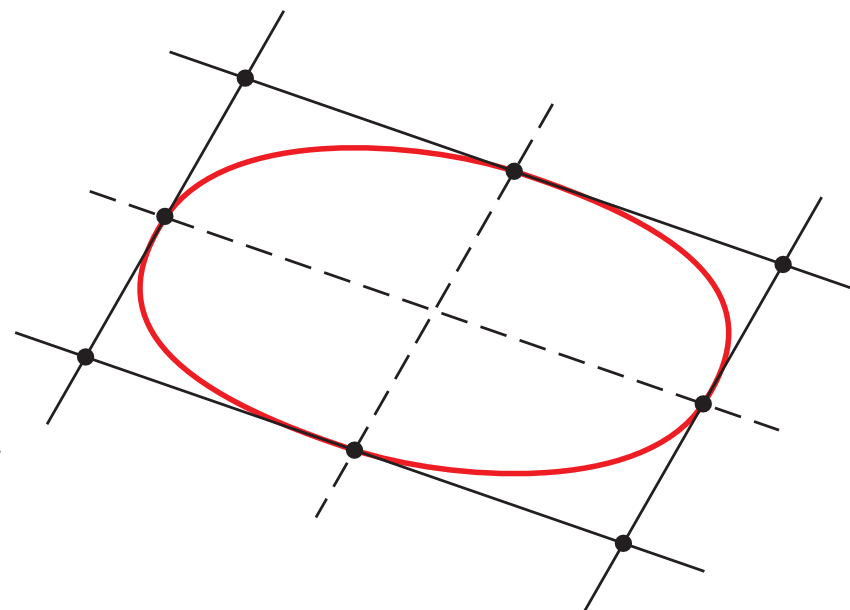
Szczególnie wyrafinowana w tej problematyce jest praca Johanna Radona

Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven

obalająca przekonanie, że gładki brzeg ciała cechującego mający własność równoległoboku musi być elipsą (a więc dawać **geometrię euklidesową**).

Własność równoległoboku:

jeśli opiszemy na Φ równoległobok, którego dwa przeciwległe boki są styczne do Φ w swoich środkach, to jest tak i dla drugiej pary boków.



Problematyka padła z winy rezultatu Karla Löwnera
(powtózonego niezależnie przez Felixa Behrenda):

*dla środkowo symetrycznego ciała wypukłego wśród elips o tym
samym środku istnieje dokładnie jedna o najmniejszym polu,*

wzmocnionego przez Fritza Johna spostrzeżeniem, że

*elipsa jednokładna z tą elipsą w skali $\sqrt{2}$ względem tegoż środka
symetrii zawiera owo ciało wypukłe.*

Problematyka padła z winy rezultatu Karla Löwnera (powtózonego niezależnie przez Felixa Behrenda):

dla środkowo symetrycznego ciała wypukłego wśród elips o tym samym środku istnieje dokładnie jedna o najmniejszym polu,

wzmocnionego przez Fritza Johna spostrzeżeniem, że

elipsa jednokładna z tą elipsą w skali $\sqrt{2}$ względem tegoż środka symetrii zawiera owo ciało wypukłe.

Nie trzeba wiele zachodu, by zauważyć, że wobec tego każda metryka Minkowskiego ρ_M jest ograniczona z dołu i z góry przez metrykę euklidesową ρ :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\rho \leq \rho_M \leq \rho,$$

gdzie n to wymiar przestrzeni.

Metryka ρ to metryka wyznaczona przez elipsę Löwnera jako przez ciało cechujące.

Okazało się więc, że w zakresie metryzowania płaszczyzny afinicznej nie ma nic istotnie różnego od geometrii euklidesowej.

Podobnie jest z metryzowaniem jej wypukłych podzbiorów. Tu działają wspomniane metryki Hilberta,

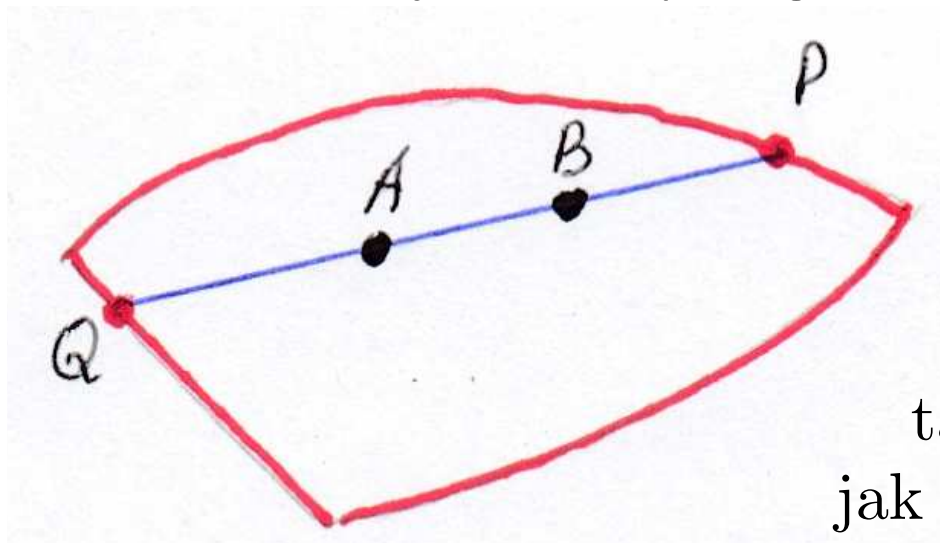
określone tak jak metryka geometrii Bolyai-Łobaczewskiego

w modelu Kleina:

$$\left| \ln \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} \right|$$

i przez metrykę modelu Kleina tak samo z obu stron ograniczone, jak metryki Minkowskiego są ograniczone przez metrykę euklidesową.

Nihil novi sub Sole?



Zauważmy, że metryka nie jest istotnym elementem opisu geometrii żyjących na płaszczyźnie (czy przestrzeni) rzutowej, jeśli spojrzymy na to po kleinowsku (niektórzy mówią: po bourbakistowsku).

Nasza szkolna geometria

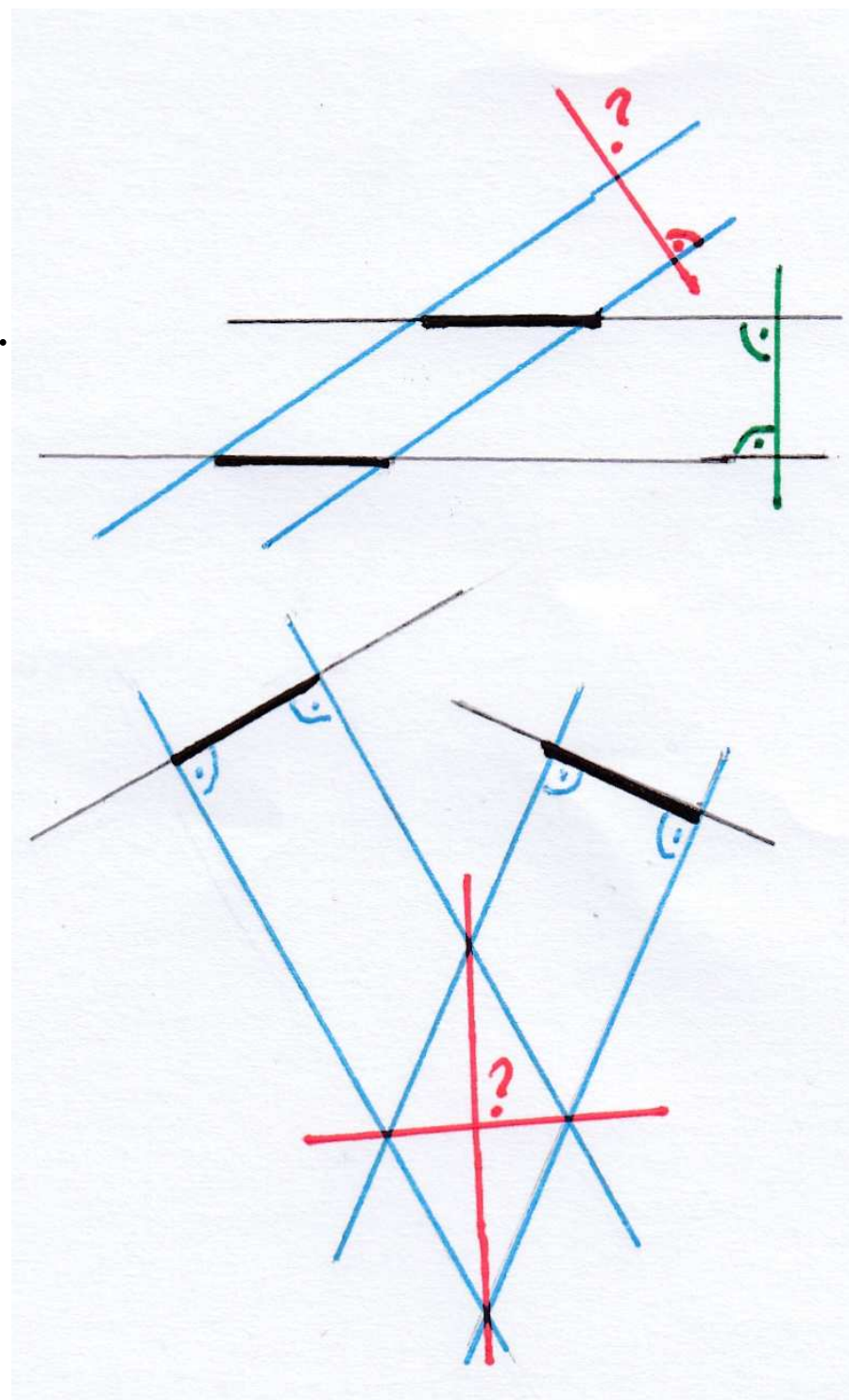
(jak geometria zaproponowana w *Elementach* Euklidesa) za grupę automorfizmów ma podobieństwa.

Nie chodzi w niej o **długość**, **lecz** o **przystawanie**.

Podobieństwa zaś można zdefiniować jako przekształcenia zachowujące proste i prostopadłość.

Tymi narzędziami z łatwością definiuje się przystawanie.

Np. w geometrii euklidesowej tak.

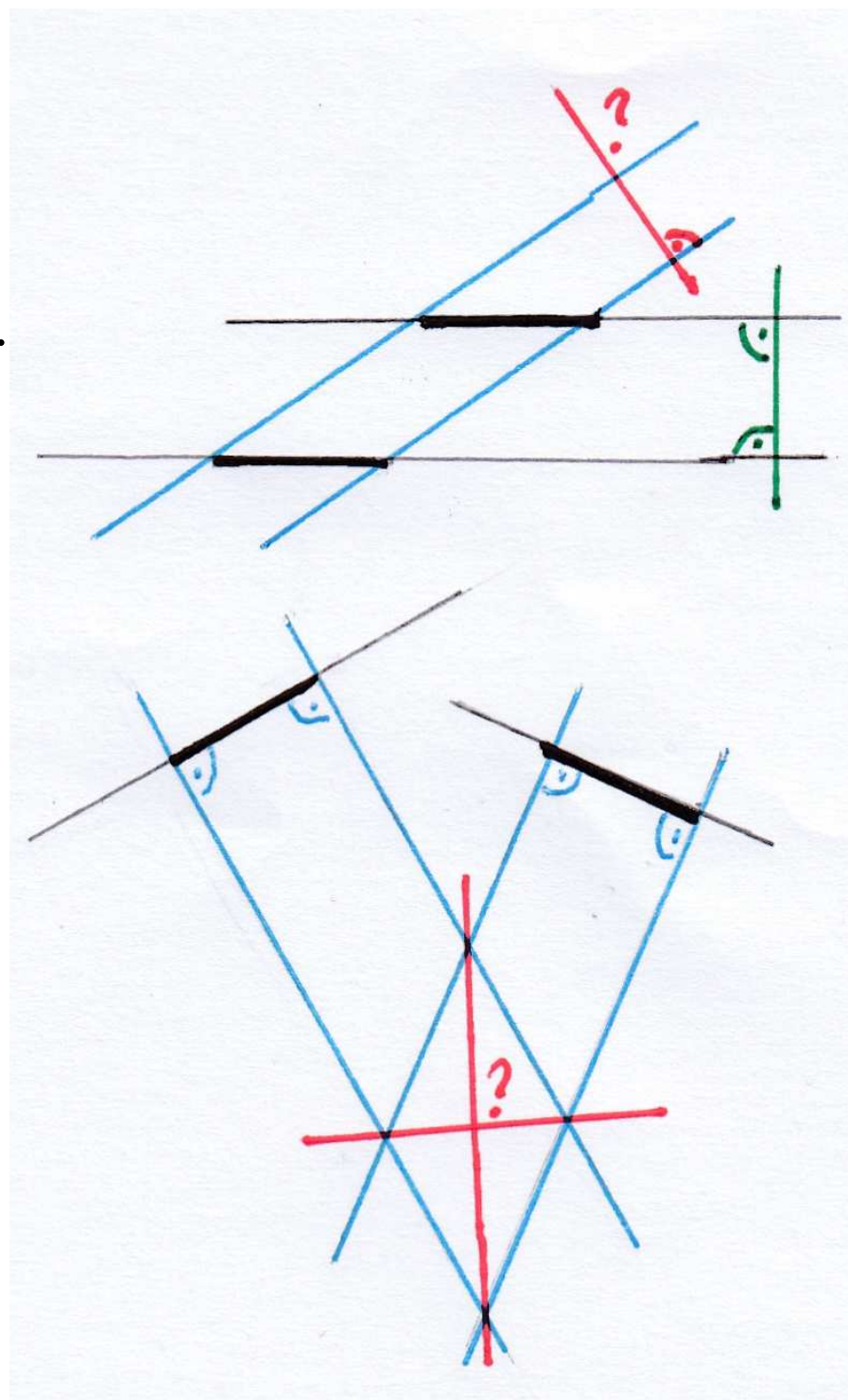


Tymi narzędziami z łatwością definiuje się przystawanie.

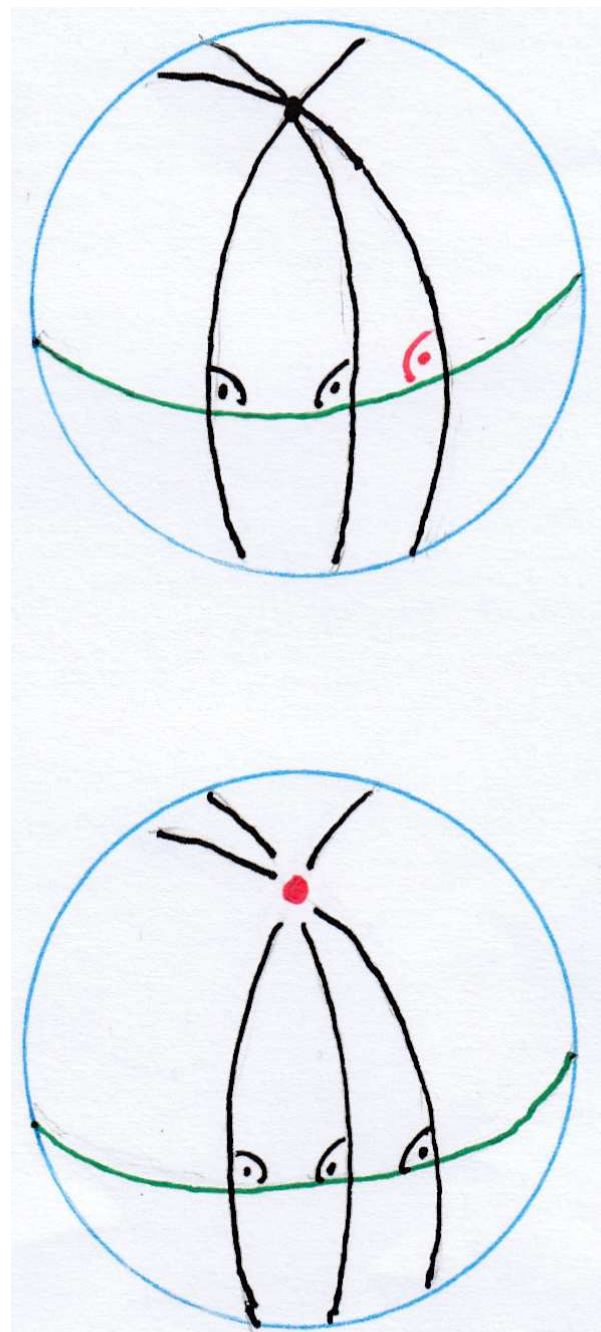
Np. w geometrii euklidesowej tak.

A w geometrii eliptycznej i hiperbolicznej (czyli Bolyaia-Łobaczewskiego) jeszcze łatwiej.

Natomiast w żadnej z tych geometrii nie trzeba ograniczać się do właściwego podzbioru płaszczyzny rzutowej (czy przestrzeni rzutowej).

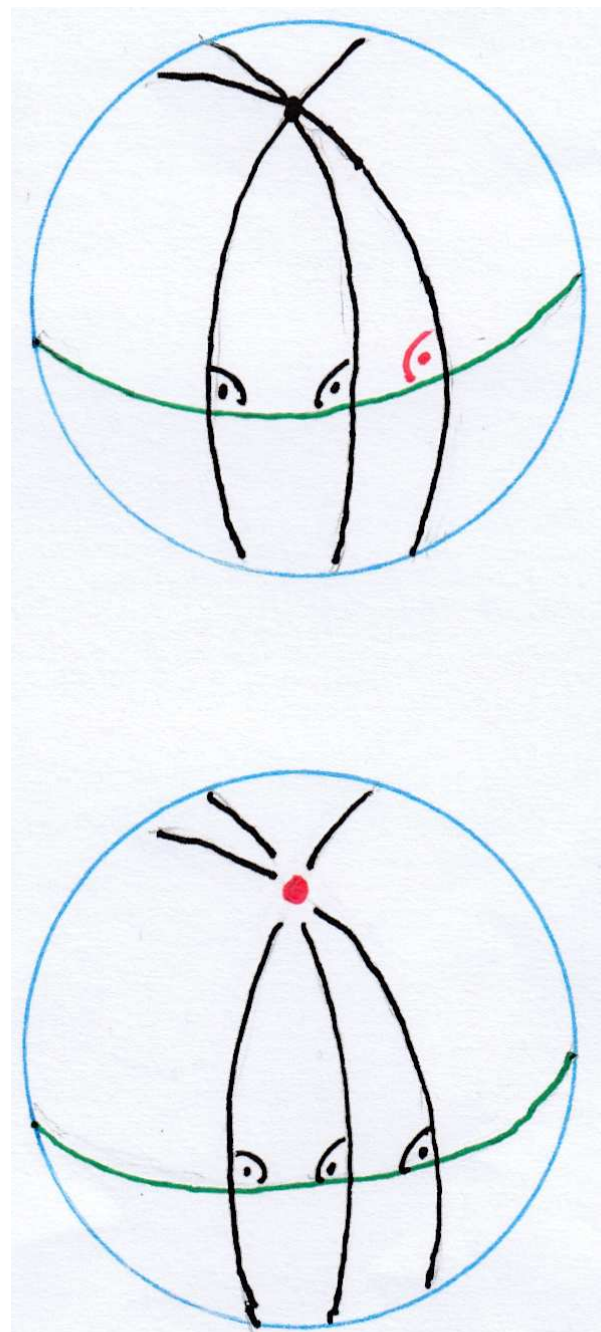


Prostopadłość bowiem
można rozpatrywać
w każdym przypadku
na całej płaszczyźnie rzutowej,
posługując się dwiema jej
własnościami na sferze.



Prostopadłość bowiem
można rozpatrywać
w każdym przypadku
na całej płaszczyźnie rzutowej,
posługując się dwiema jej
własnościami na sferze.

Jak to działa od razu widać
na rozciągniętej na całą
płaszczyznę rzutową
geometrii euklidesowej.



Uzyskane tą drogą geometrie na \mathbb{P}^2 (czy \mathbb{P}^n) są czterech rodzajów, rozdzielonych przez dwie własności:

R – istnieje prostokąt,

I – istnieje prosta izotropowa nieosobliwa

(czyli prostopadła do siebie, ale nie do wszystkich innych)

(taka jest np. styczna do brzegu modelu Kleina)

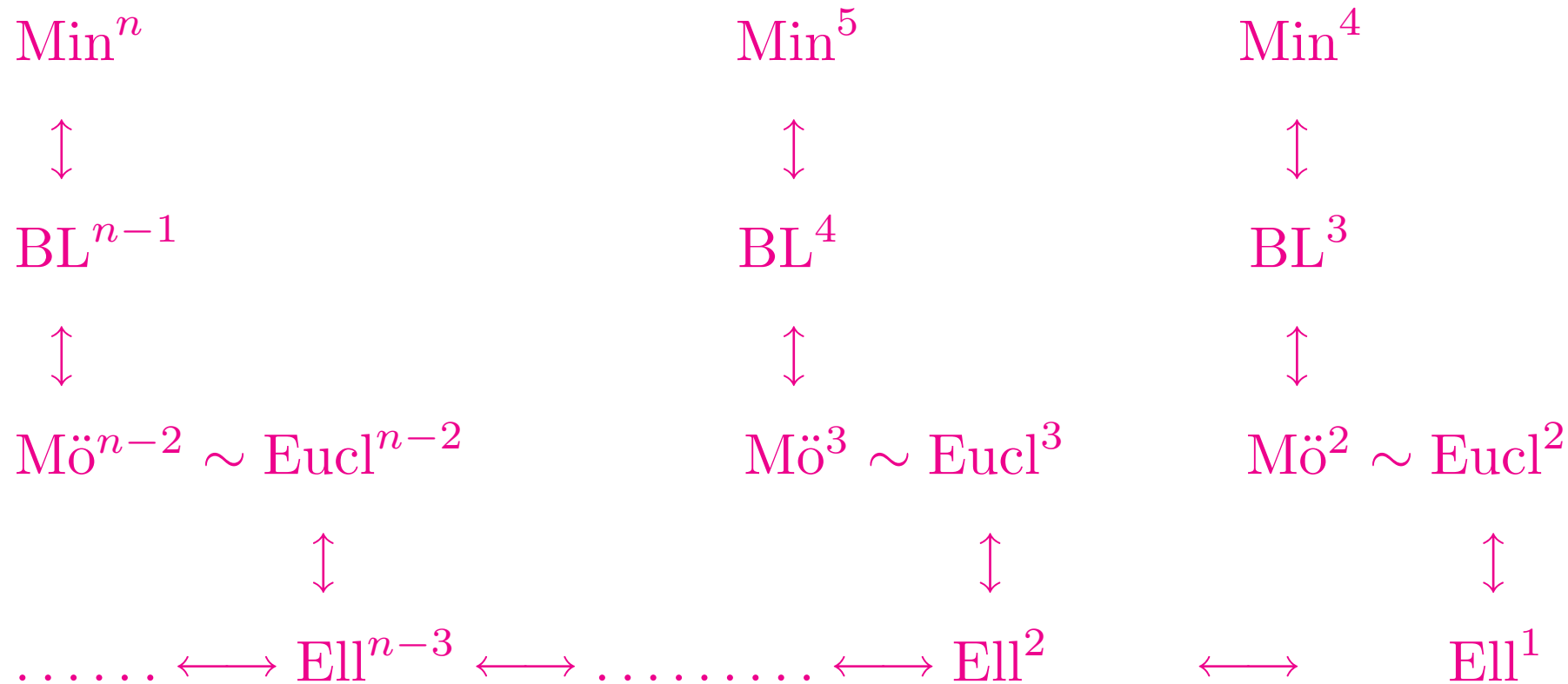
	R	\neg R
I	Min	BL
\neg I	Eucl	Ell

Niespodziewanie obok (riemanowskich) geometrii eliptycznych, parabolicznych (czyli euklidesowych)

i hiperbolicznych (Bolyaia–Łobaczewskiego)

pojawia się (nieriemannowska) czasoprzestrzeń.

Co więcej w \mathbb{P}^n występują wraz z każdą z nich wszystkie te geometrie niższych wymiarów



ale to już bajka na inny wieczór.