Równania algebraiczne
pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego oraz wyższych stopni
i egzotyczne liczby

Równania pierwszego stopnia

$$ax = b$$

umieli rozwiązywać już Sumerowie 5 tysięcy lat temu:

$$x = \frac{b}{a}$$

i po sprawie.

Równania pierwszego stopnia

$$ax = b$$

umieli rozwiązywać już Sumerowie 5 tysięcy lat temu:

$$x = \frac{b}{a}$$

i po sprawie.

Ale tego, co robili z równaniami stopnia 2, dziś nie rozumiemy,

a ponadto

– choć często uzyskiwali dobre rezultaty, to jednak nie zawsze.

Równania drugiego stopnia

$$x^2 + ax = b$$

Grecy rozwiązywali coraz sprawniej,

Równania drugiego stopnia

$$x^2 + ax = b$$

Grecy rozwiązywali coraz sprawniej, by wreszcie – gdy powstawało cesarstwo rzymskie – robić to tak:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \quad \text{czyli} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4};$$

Równania drugiego stopnia

$$x^2 + ax = b$$

Grecy rozwiązywali coraz sprawniej, by wreszcie
– gdy powstawało cesarstwo rzymskie – robić to tak:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \quad \text{czyli} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4};$$

jeśli więc $b + \dfrac{a^2}{4} \geq 0$, to mamy $\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{b + \dfrac{a^2}{4}}\right)^2 = 0,$

Równania drugiego stopnia

$$x^2 + ax = b$$

Grecy rozwiązywali coraz sprawniej, by wreszcie – gdy powstawało cesarstwo rzymskie – robić to tak:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \quad \text{czyli} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4};$$

jeśli więc $b + \dfrac{a^2}{4} \geq 0$, to mamy $\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{b + \dfrac{a^2}{4}}\right)^2 = 0,$

a zatem (różnica kwadratów)

$$\left(x + \frac{a}{2} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right) \cdot \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right) = 0,$$

Równania drugiego stopnia

$$x^2 + ax = b$$

Grecy rozwiązywali coraz sprawniej, by wreszcie
– gdy powstawało cesarstwo rzymskie – robić to tak:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \quad \text{czyli} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4};$$

jeśli więc $b + \dfrac{a^2}{4} \geq 0$, to mamy $\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{b + \dfrac{a^2}{4}}\right)^2 = 0$,

a zatem (różnica kwadratów)

$$\left(x + \frac{a}{2} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right) \cdot \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right) = 0,$$

i w końcu $x = -\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{b + \dfrac{a^2}{4}}$.

Równania drugiego stopnia

$$x^2 + ax = b$$

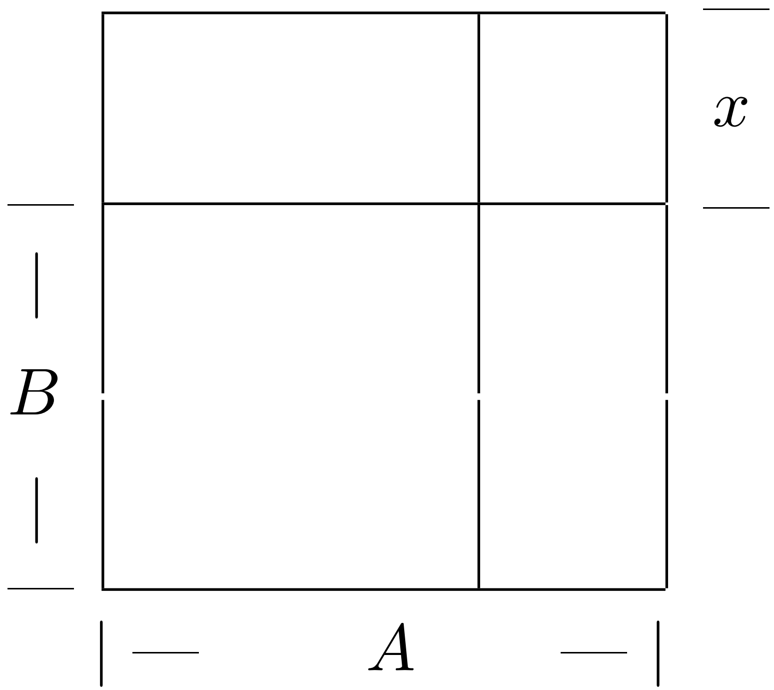
Grecy rozwiązywali coraz sprawniej, by wreszcie
– gdy powstawało cesarstwo rzymskie – robić to tak:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \quad \text{czyli} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4};$$

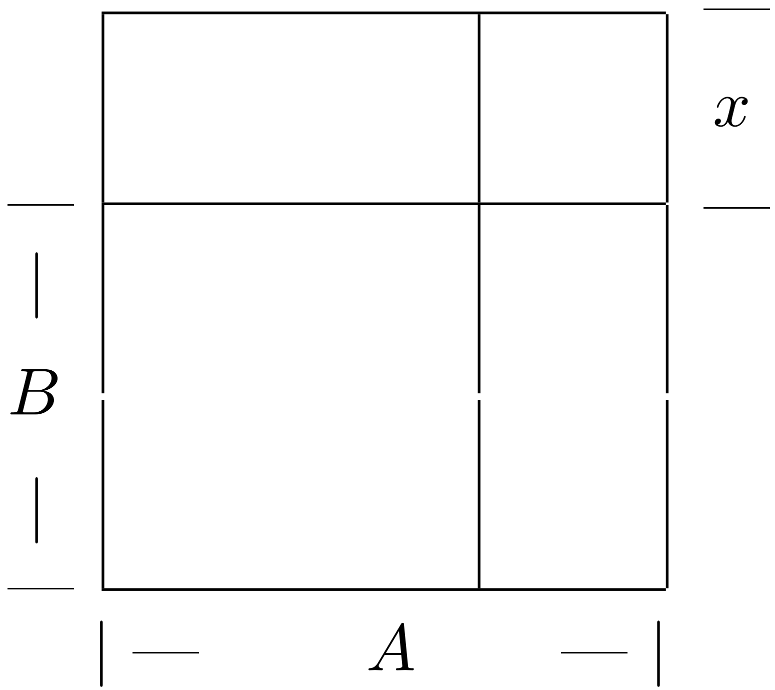
jeśli zaś $b + \frac{a^2}{4} < 0$, to mamy $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(b + \frac{a^2}{4}\right) > 0$,

i pierwiastków nie ma.

Tysiąc lat poźniej Arabowie równania drugiego stopnia rozwiązywali geometrycznie: aby rozwiązać równanie $x^2 + ax = b$ rysowali kwadrat z wyciętymi w rogach dwoma kwadratami

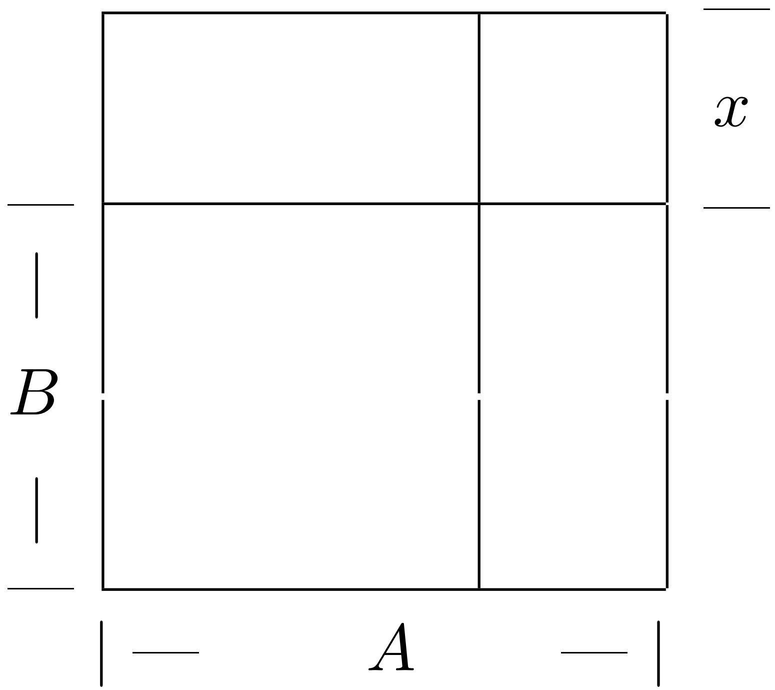


Tysiąc lat poźniej Arabowie równania drugiego stopnia rozwiązywali geometrycznie: aby rozwiązać równanie $x^2 + ax = b$ rysowali kwadrat z wyciętymi w rogach dwoma kwadratami



i zauważali, że pozostałość to dwa jednakowe prostokąty.

Tysiąc lat poźniej Arabowie równania drugiego stopnia rozwiązywali geometrycznie: aby rozwiązać równanie $x^2 + ax = b$ rysowali kwadrat z wyciętymi w rogach dwoma kwadratami

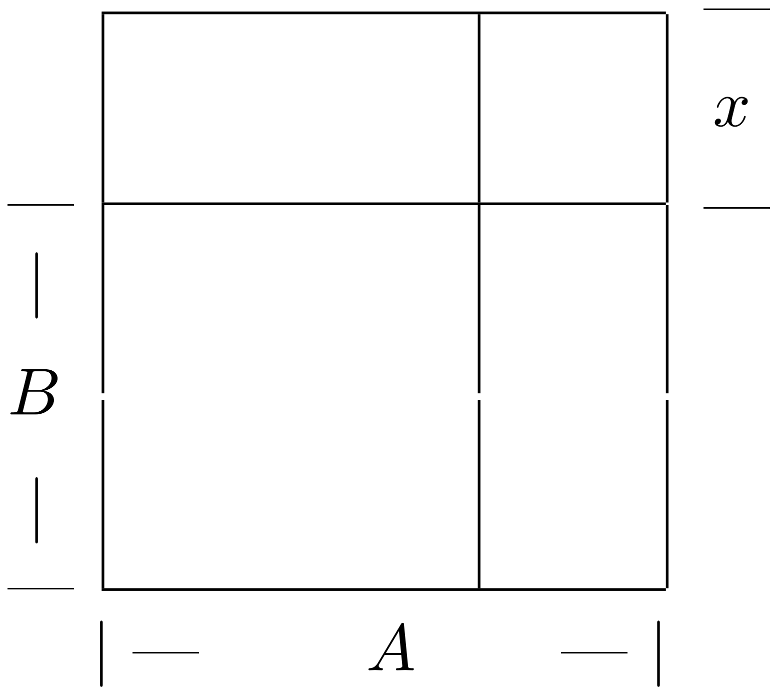


i zauważali, że pozostałość to dwa jednakowe prostokąty.

Z zależności $A^2 = B^2 + x^2 + 2Bx$, czyli $x^2 + 2Bx = A^2 - B^2$, wnioskowali, że $2B = a$ i $A^2 - B^2 = b$, skąd $B = \dfrac{a}{2}$ i

$$A = \sqrt{A^2} = \sqrt{b + B^2} = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Tysiąc lat poźniej Arabowie równania drugiego stopnia rozwiązywali geometrycznie: aby rozwiązać równanie $x^2 + ax = b$ rysowali kwadrat z wyciętymi w rogach dwoma kwadratami



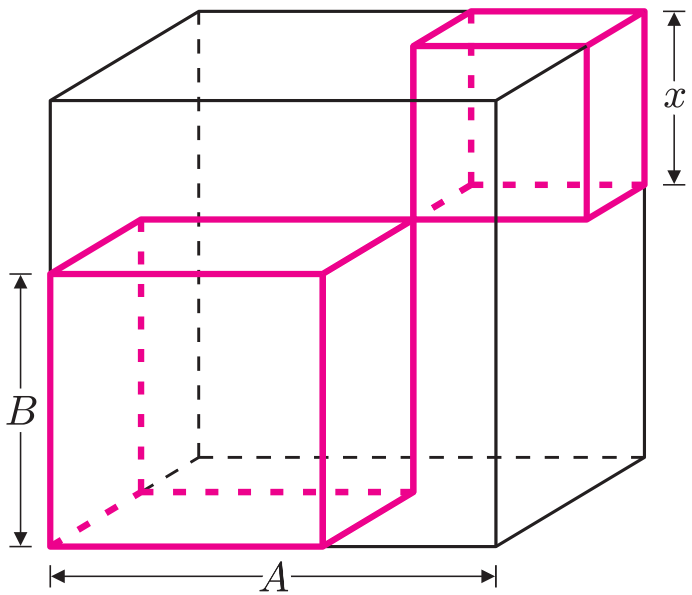
i zauważali, że pozostałość to dwa jednakowe prostokąty.

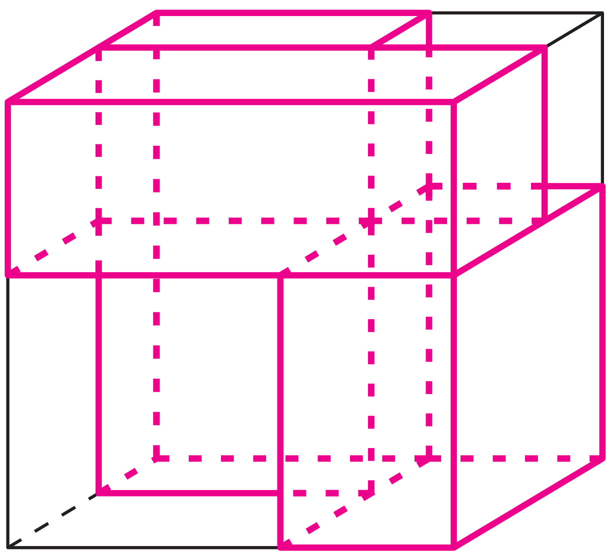
Z zależności $A^2 = B^2 + x^2 + 2Bx$, czyli $x^2 + 2Bx = A^2 - B^2$, wnioskowali, że $2B = a$ i $A^2 - B^2 = b$, skąd $B = \dfrac{a}{2}$ i

$$A = \sqrt{A^2} = \sqrt{b + B^2} = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A ponieważ $x = A - B$, więc $x = \sqrt{b + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} - \dfrac{a}{2}$.

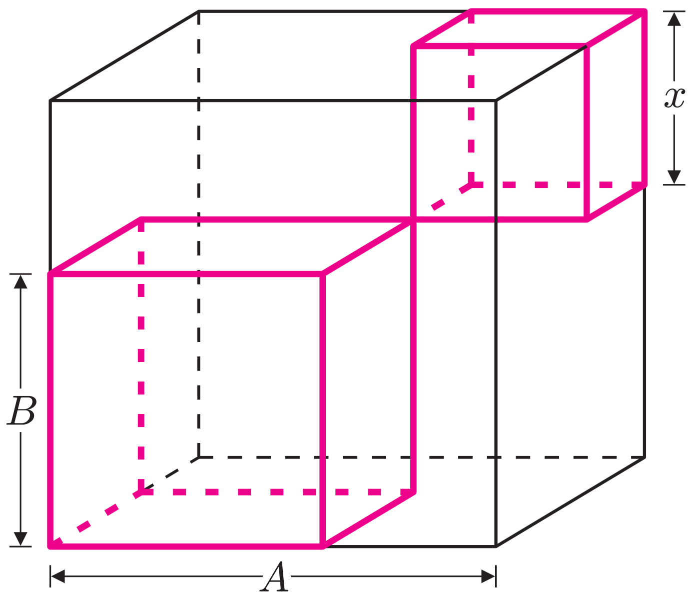
Równania trzeciego stopnia

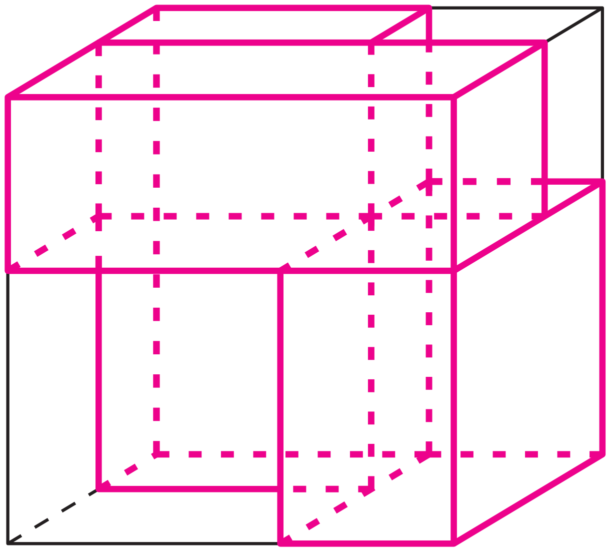




Pięćset lat później Włosi
ten arabski sposób
zastosowali do sześcianu

Równania trzeciego stopnia





Pięćset lat później Włosi
ten arabski sposób
zastosowali do sześcianu

i porównując równanie $x^3 + ax = b$
z zależnością $A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx$
czyli $x^3 + 3ABx = A^3 - B^3$,
uzyskali zależność

$$3AB = a \text{ i } A^3 - B^3 = b.$$

Gdyby udało się stąd wyliczyć
A i B, znaleźlibyśmy $x = A - B$.

Aby rozwiązać układ równań $3AB = a$ i $A^3 - B^3 = b$, wystarczy podstawić $p := A^3$ i $q := B^3$, co daje

$$pq = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad p - q = b,$$

Aby rozwiązać układ równań $3AB = a$ i $A^3 - B^3 = b$, wystarczy podstawić $p := A^3$ i $q := B^3$, co daje

$$pq = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad p - q = b,$$

skąd mamy $(q + b)q = \dfrac{a^3}{27}$, czyli $q^2 + bq = \dfrac{a^3}{27}$, a więc $q = \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}} - \dfrac{b}{2}$ oraz $p = \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}} + \dfrac{b}{2}$

Aby rozwiązać układ równań $3AB = a$ i $A^3 - B^3 = b$, wystarczy podstawić $p := A^3$ i $q := B^3$, co daje

$$pq = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad p - q = b,$$

skąd mamy $(q + b)q = \frac{a^3}{27}$, czyli $q^2 + bq = \frac{a^3}{27}$, a więc $q = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}$ oraz $p = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}$

i ostatecznie

$$x = A - B = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}}.$$

Mamy więc dla równania $x^3 + ax = b$ rozwiązanie

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}}.$$

Na przykład dla równania $x^3 + 9x = 26$ daje to

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{26^2}{4} + \frac{9^3}{27}} + \frac{26}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{26^2}{4} + \frac{9^3}{27}} - \frac{26}{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{13^2 + 3^3} + 13} - \sqrt[3]{\sqrt{13^2 + 3^3} - 13} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{196} + 13} - \sqrt[3]{\sqrt{196} - 13} = \sqrt[3]{14 + 13} - \sqrt[3]{14 - 13} =$$

$$= 3 - 1 = 2.$$

Mamy więc dla równania $x^3 + ax = b$ rozwiązanie

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}}.$$

Ale dla równania $x^3 - 7x = 6$ otrzymujemy

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27}} + \frac{6}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27}} - \frac{6}{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{9 - \frac{343}{27}} + 3} - \sqrt[3]{\sqrt{9 - \frac{343}{27}} - 3} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-100}{27}} + 3} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-100}{27}} - 3},$$

a przecież równanie ma rozwiązania: 3, -1, -2.

Gdy w przypadku równania stopnia 2
pojawiał się pierwiastek z liczby ujemnej,
stwierdzaliśmy, że rozwiązań nie ma.

Ale równanie stopnia 3 ma zawsze rozwiązanie!

Powstają zatem dwa pytania:

1. Jaki jest zakres stosowania uzyskanego wzoru?

2. Co zrobić, gdy ten wzór zawodzi?

Najpierw zwróćmy uwagę, że każde równanie stopnia trzeciego daje się sprowadzić do takiej postaci, jaką rozpatrywaliśmy, czyli bez wyrazu stopnia 2.

Rzeczywiście, jeśli w równaniu $x^3 + kx^2 + mx + n = 0$ zastąpimy x przez $y - \frac{k}{3}$, to wyraz stopnia 2 zniknie:

$$(y - \frac{k}{3})^3 + k(y - \frac{k}{3})^2 + m(y - \frac{k}{3}) + n =$$
$$= y^3 - ky^2 + \frac{k^2}{3}y - \frac{k^3}{27} + ky^2 - \frac{2k^2}{3}y + \frac{k^3}{9} + my - \frac{km}{3} + n =$$
$$= y^3 + (m - \frac{k^2}{3})y + (n + \frac{2k^3}{27} - \frac{km}{3}) = 0.$$

Najpierw zwróćmy uwagę, że każde równanie stopnia trzeciego daje się sprowadzić do takiej postaci, jaką rozpatrywaliśmy, czyli bez wyrazu stopnia 2.

Rzeczywiście, jeśli w równaniu $x^3 + kx^2 + mx + n = 0$ zastąpimy x przez $y - \frac{k}{3}$, to wyraz stopnia 2 zniknie:

$$(y - \frac{k}{3})^3 + k(y - \frac{k}{3})^2 + m(y - \frac{k}{3}) + n =$$
$$= y^3 - ky^2 + \frac{k^2}{3}y - \frac{k^3}{27} + ky^2 - \frac{2k^2}{3}y + \frac{k^3}{9} + my - \frac{km}{3} + n =$$
$$= y^3 + (m - \frac{k^2}{3})y + (n + \frac{2k^3}{27} - \frac{km}{3}) = 0.$$

Np. z $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$ otrzymamy $y^3 - 6y = 9$.

Pozostaje pytanie, co wyróżnia te równania $x^3 + ax = b$, dla których $\sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}$ jest mniejsze od zera.

Okazuje się, że jest tak wtedy, gdy równanie to ma więcej niż jedno rozwiązanie. Jak je wtedy znaleźć?

Pozostaje pytanie, co wyróżnia te równania $x^3 + ax = b$, dla których $\sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}$ jest mniejsze od zera.

Okazuje się, że jest tak wtedy, gdy równanie to ma więcej niż jedno rozwiązanie. Jak je wtedy znaleźć?

Tu są dwie możliwości:

pierwsza polega na zaprzęgnięciu do roboty
funkcji trygonometrycznych (tak zrobił François Viète);

Pozostaje pytanie, co wyróżnia te równania $x^3 + ax = b$, dla których $\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ jest mniejsze od zera.

Okazuje się, że jest tak wtedy, gdy równanie to ma więcej niż jedno rozwiązanie. Jak je wtedy znaleźć?

Tu są dwie możliwości:

pierwsza polega na zaprzęgnięciu do roboty
funkcji trygonometrycznych (tak zrobił François Viète);

druga, algebraiczna, polega na wprowadzeniu dodatkowych liczb, zwanych zespolonymi, które pozwalają uzyskać wszystkie trzy rozwiązania rzeczywiste – oczywiście, gdy one istnieją
(tak zrobił Girolamo Cardano).

Pozostaje pytanie, co wyróżnia te równania $x^3 + ax = b$, dla których $\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ jest mniejsze od zera.

Okazuje się, że jest tak wtedy, gdy równanie to ma więcej niż jedno rozwiązanie. Jak je wtedy znaleźć?

Tu są dwie możliwości:

pierwsza polega na zaprzęgnięciu do roboty funkcji trygonometrycznych (tak zrobił François Viète);

druga, algebraiczna, polega na wprowadzeniu dodatkowych liczb, zwanych zespolonymi, które pozwalają uzyskać wszystkie trzy rozwiązania rzeczywiste – oczywiście, gdy one istnieją (tak zrobił Girolamo Cardano).

Obie możliwości uznano za zbyt złożone i pracochłonne, by znalazły się w programie szkolnym.

Równania czwartego stopnia rozwiązano
zaledwie kilka lat później od równań trzeciego stopnia.

Lodovico Ferrari doszedł do wniosku, że
skoro **do** rozwiązania **równań trzeciego stopnia**
przydaje się **równanie drugiego stopnia**,
to **do równań czwartego stopnia**
przydadzą się **równania trzeciego stopnia**.

A zastosował sposób grecki (czyli dopisz coś do obu stron),
bo nie bardzo wyobrażał sobie
jak to jest z geometrią w czterech wymiarach.

Dopisał mianowicie do równania $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2, \text{ czyli } x^4 + \frac{a^2}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} + ax^3 + x^2y + \frac{ay}{2}x.$$

Dopisał mianowicie do równania $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2, \text{ czyli } x^4 + \frac{a^2}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} + ax^3 + x^2y + \frac{ay}{2}x.$$

Aby to było dalej wyjściowe równanie
(teraz zgadza się tylko x^4 i ax^3) trzeba je połączyć:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right) + x\left(\frac{ay}{2} - c\right) + \left(\frac{y^2}{4} - d\right).$$

Dopisał mianowicie do równania $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2, \text{ czyli } x^4 + \frac{a^2}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} + ax^3 + x^2y + \frac{ay}{2}x.$$

Aby to było dalej wyjściowe równanie
(teraz zgadza się tylko x^4 i ax^3) trzeba je połączyć:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right) + x\left(\frac{ay}{2} - c\right) + \left(\frac{y^2}{4} - d\right).$$

Teraz dobieramy nową niewiadomą tak, by lewa strona
była pełnym kwadratem, czyli chcemy by “delta” była zerem:

$$\Delta = \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right) \cdot \left(\frac{y^2}{4} - d\right) =$$

$$= y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4(bd - a^2d - c^2) = 0.$$

To równanie nazywa się rezolwentą równania wyjściowego.

Jeśli teraz jedno z rozwiązań rezolwenty r_1 wstawimy do równania

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right) + x\left(\frac{ay}{2} - c\right) + \left(\frac{y^2}{4} - d\right),$$

przybierze ono postać

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{r_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + r_1 - b\right) \cdot \left(x + \frac{\frac{ay}{2} - c}{2\left(\frac{a^2}{4} + r_1 - b\right)}\right)^2.$$

I teraz, gdy $\left(\frac{a^2}{4} + r_1 - b\right) > 0$, są cztery rozwiązania,

gdy $\left(\frac{a^2}{4} + r_1 - b\right) = 0$, są dwa

i gdy $\left(\frac{a^2}{4} + r_1 - b\right) < 0$, rozwiązań nie ma.

Wygląda to dość okropnie – zobaczmy to w praktyce dla równania $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.
Rezolwenta to $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$,

Wygląda to dość okropnie – zobaczmy to w praktyce dla równania
$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.
Rezolwenta to $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$, co można łatwo rozwiązać,
bo
$$\begin{aligned} y^3 - 5y^2 - y + 5 = y^2(y-5) - (y-5) = (y^2-1)(y-5) &= \\ &= (y+1)(y-1)(y-5). \end{aligned}$$

Wygląda to dość okropnie – zobaczmy to w praktyce dla równania $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.
Rezolwenta to $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$, co można łatwo rozwiązać, bo

$$y^3 - 5y^2 - y + 5 = y^2(y-5) - (y-5) = (y^2-1)(y-5) = \\ = (y+1)(y-1)(y-5).$$

Pierwiastki rezolwenty, czyli $-1,\ 1,\ 5$, wstawiamy do równania

$$\left(\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{r_i}{2}\right) + \sqrt{\frac{25}{4} + r_i - 5} \cdot \left(x + \frac{\frac{-5}{2}r_i - 5}{2(\frac{25}{4} + r_i - 5)}\right)\right) \cdot \\ \cdot \left(\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{r_i}{2}\right) - \sqrt{\frac{25}{4} + r_i - 5} \cdot \left(x + \frac{\frac{-5}{2}r_i - 5}{2(\frac{25}{4} + r_i - 5)}\right)\right) = 0$$

otrzymując

$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$
$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - x - 2) = 0$
$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) = 0$

Wygląda to dość okropnie – zobaczmy to w praktyce dla równania $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.
Rezolwenta to $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$, co można łatwo rozwiązać, bo
$$y^3 - 5y^2 - y + 5 = y^2(y-5) - (y-5) = (y^2-1)(y-5) = \\ = (y+1)(y-1)(y-5).$$
Pierwiastki rezolwenty, czyli $-1,\ 1,\ 5$, wstawiamy do równania
$$\left(\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{r_i}{2}\right) + \sqrt{\frac{25}{4} + r_i - 5}\cdot\left(x + \frac{\frac{-5}{2}r_i - 5}{2(\frac{25}{4} + r_i - 5)}\right)\right)\cdot \\ \cdot\left(\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{r_i}{2}\right) - \sqrt{\frac{25}{4} + r_i - 5}\cdot\left(x + \frac{\frac{-5}{2}r_i - 5}{2(\frac{25}{4} + r_i - 5)}\right)\right) = 0$$
otrzymując
$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$
$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - x - 2) = 0$
$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) = 0$
Mamy więc 12 rozwiązań wyjściowego równania ?!

Oczywiście nie:
$(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)=0$
$(x^2-4x+3)(x^2-x-2)=0$
$(x^2-5x+6)(x^2-1)=0$
to wszystko tylko inne postaci równania $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$
o czym łatwo się przekonać wymnażając nawiasy,
ale z każdego z nich można bez trudu uzyskać (oczywiście te same) rozwiązania, a mianowicie -1, 1, 2, 3.

Oczywiście nie:
$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$
$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - x - 2) = 0$
$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) = 0$
to wszystko tylko inne postaci równania $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$
o czym łatwo się przekonać wymnażając nawiasy,
ale z każdego z nich można bez trudu uzyskać (oczywiście te same)
rozwiązania, a mianowicie -1, 1, 2, 3.

Gdy rezolwenta ma tylko jedno rozwiązanie,
tak jak dla $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$, gdzie jest to $y^3 = 0$,
otrzymujemy tylko jedną wygodną postać równania,
tu $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1)$,
i dwa rozwiązania wyjściowego równania.

Mimo trwających ponad 150 lat starań nie udało się znaleźć ani greckich, ani arabskich sposobów na rozwiązanie **równań piątego stopnia** w ogólnym przypadku.

Mimo trwających ponad 150 lat starań nie udało się znaleźć ani greckich, ani arabskich sposobów na rozwiązanie **równań piątego stopnia** w ogólnym przypadku.

Co więcej, w 1826 roku Niels Abel udowodnił, że takiego sposobu, który pozwoliłby dla dowolnego równania stopnia piątego wyrazić jego rozwiązania za pomocą działań algebraicznych i pierwiastkowania dowolnego stopnia
wykonywanych na współczynnikach tego równania nie ma.
(mówi się: nie ma rozwiązania przez pierwiastniki).

Mimo trwających ponad 150 lat starań nie udało się znaleźć ani greckich, ani arabskich sposobów na rozwiązanie **równań piątego stopnia** w ogólnym przypadku.

Co więcej, w 1826 roku Niels Abel udowodnił, że takiego sposobu, który pozwoliłby dla dowolnego równania stopnia piątego wyrazić jego rozwiązania za pomocą działań algebraicznych i pierwiastkowania dowolnego stopnia wykonywanych na współczynnikach tego równania nie ma. (mówi się: nie ma rozwiązania przez pierwiastniki).

A sześć lat później Evariste Galois podał metodę pozwalającą stwierdzić, czy rozwiązania konkretnego równania stopnia większego od 4 dadzą się wyrazić przez pierwiastniki, czy nie.

Na przykład równanie $x^5 - 6x + 3 = 0$
nie ma rozwiązania przez pierwiastniki, czyli jego rozwiązań
nie da się zapisać za pomocą symboli $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt[n]{}$,
mimo iż wiemy, że ma rozwiązanie
między -2 i -1, między 0 i 1 oraz między 1 i 2,
bo $x^5 - 6x + 3$
dla -2 jest ujemne (-17), dla -1 i 0 jest dodatnie (10 i 3),
dla 1 jest ujemne (-2), a dla 2 znów dodatnie (23).

Na przykład równanie $x^5 - 6x + 3 = 0$
nie ma rozwiązania przez pierwiastniki, czyli jego rozwiązań
nie da się zapisać za pomocą symboli $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt[n]{}$,
mimo iż wiemy, że ma rozwiązanie
między -2 i -1, między 0 i 1 oraz między 1 i 2,
bo $x^5 - 6x + 3$
dla -2 jest ujemne (-17), dla -1 i 0 jest dodatnie $(10$ i $3)$,
dla 1 jest ujemne (-2), a dla 2 znów dodatnie (23).

W ten sposób do matematyki wkroczyły nie dające się zapisać dokładnie liczby wzbogacające rodzinę liczb algebraicznych, czyli takich, które są rozwiązaniami równań wielomianowych o współczynnikach całkowitych.

Mamy więc liczby wymierne,
czyli to, co da się uzyskać z 1 za pomocą działań $+, -, \cdot, :$

zawierające je liczby osiągalne przez pierwiastniki,
czyli to, co da się uzyskać z 1 za pomocą działań $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt[n]{}$

oraz zawierające je liczby algebraiczne,
czyli pierwiastki równań o współczynnikach całkowitych
(albo wymiernych, to wszystko jedno – prawda?)

Reszta – a okazuje się, że to większość – to liczby przestępne.

Mamy więc liczby wymierne,
czyli to, co da się uzyskać z 1 za pomocą działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$

zawierające je liczby osiągalne przez pierwiastniki,
czyli to, co da się uzyskać z 1 za pomocą działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt[n]{}$

oraz zawierające je liczby algebraiczne,
czyli pierwiastki równań o współczynnikach całkowitych
(albo wymiernych, to wszystko jedno – prawda?)

Reszta – a okazuje się, że to większość – to liczby przestępne.

Do połowy XIX wieku nie umiano wskazać ani jednej z nich!

Liouville budował takie liczby w bardzo skomplikowany sposób, aż wpadł na pomysł, że liczbą taką jest

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie (c_i) to dowolny ciąg liczb jednocyfrowych różnych od 0, czyli jest to $0,c_1c_2000c_3 00000000000000000 c_4 000000000000000\ldots$ c_5 pojawi się na 120 miejscu po przecinku itd.

Liouville budował takie liczby w bardzo skomplikowany sposób, aż wpadł na pomysł, że liczbą taką jest

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie (c_i) to dowolny ciąg liczb jednocyfrowych różnych od 0, czyli jest to $0,c_1c_2000c_3 00000000000000000c_4 000000000000000\ldots$ c_5 pojawi się na 120 miejscu po przecinku itd.

Sto lat później Kurt Mahler odkrył, że taką liczbą jest $0,123456789101112131415161718192021222324252627282930\ldots$

Liouville budował takie liczby w bardzo skomplikowany sposób, aż wpadł na pomysł, że liczbą taką jest

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie (c_i) to dowolny ciąg liczb jednocyfrowych różnych od 0, czyli jest to $0,c_1c_2000c_3000000000000000000c_4000000000000000\ldots$
c_5 pojawi się na 120 miejscu po przecinku itd.

Sto lat później Kurt Mahler odkrył, że taką liczbą jest
$0,123456789101112131415161718192021222324252627282930\ldots$

Podstawa logarytmów naturalnych, liczba e,
okazała się przestępna dopiero w 1873 roku (Charles Hermite),

Liouville budował takie liczby w bardzo skomplikowany sposób, aż wpadł na pomysł, że liczbą taką jest

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie (c_i) to dowolny ciąg liczb jednocyfrowych różnych od 0, czyli jest to $0,c_1c_2000c_300000000000000000c_4000000000000000\ldots$ c_5 pojawi się na 120 miejscu po przecinku itd.

Sto lat później Kurt Mahler odkrył, że taką liczbą jest $0,123456789101112131415161718192021222324252627282930\ldots$

Podstawa logarytmów naturalnych, liczba e,
okazała się przestępna dopiero w 1873 roku (Charles Hermite),

a liczba π w 1882 roku (Ferdinand Lindemann).

Do dziś mało wiemy o liczbach przestępnych
(badający je mówią, że rozwiązują VII problem Hilberta),

ale własną liczbę przestępną może sobie zbudować każdy,
bo wiadomo od 80 lat, że

jeśli a i b są liczbami algebraicznymi i b jest niewymierna,
to a^b jest liczbą przestępną,

tak więc np. $2^{\sqrt{2}}$ jest przestępna.

Pomiędzy liczbami wymiernymi
a liczbami osiągalnymi przez pierwiastniki
mieszczą się liczby konstruowalne,

czyli takie, które dadzą się z liczb wymiernych
uzyskać przez działania $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{}$.

Nazwa jest w oczywisty sposób związana z konstrukcjami
geometrycznymi cyrklem i linijką bez podziałki,
czyli konstrukcjami platońskimi.

Proste to bowiem równania stopnia pierwszego,
okręgi to równania stopnia drugiego,
a więc do ich rozwiązania wymienione narzędzia wystarczają.

Problem konstruowalności, czyli rozwiązalności
przytoczonymi środkami
odpowiadających konstrukcjom równań
rozstrzygnął w latach 40. XIX wieku Pierre Wanzel.

Dobrym i kompletnym źródłem do zapoznania się z tymi wynikami
jest książka

Anna Zofia Krygowska, *Konstrukcje geometryczne na płaszczyźnie*, PWN, 1958

bo na ogół mówi się tylko o tym, jak wykonać to,
co się skonstruować da.

Poważniejsza lektura na podobne tematy to

Maciej Bryński, *Elementy teorii Galois*, seria *delta przedstawia*, Wydawnictwo Alfa, 1985

Tak, jak już zauważyliśmy, punkt – a więc jego współrzędne – są konstruowalne środkami platońskimi wtedy i tylko wtedy, gdy można je przedstawić za pomocą współczynników opisujących je równań używając działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{}$.

Wynika z tego wiele prawidłowości, z których wymienię tylko jedną

jeśli chcemy skonstruować odcinek o długości danej równaniem $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, to jest to wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy równanie to ma rozwiązanie dające się uzyskać z a, b, c, d za pomocą działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Wynika z tego wiele prawidłowości, z których wymienię tylko jedną

jeśli chcemy skonstruować odcinek o długości danej równaniem $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, to jest to wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy równanie to ma rozwiązanie dające się uzyskać z a, b, c, d za pomocą działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Standardowy przykład: problem trysekcji kąta.

Ponieważ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$,
więc znalezienie kosinusa $1/3$ kąta, którego kosinus jest równy a, sprowadza się do rozwiązania równania trzeciego stopnia, a konkretnie

$$a = 4x^3 - 3x, \quad \text{czyli } 4x^3 - 3x - a = 0.$$

Znany przykład negatywny:

Kąt 60° można podzielić na trzy równe części
wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{czyli } 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

ma rozwiązanie dające się uzyskać z 8, -6 i 1
za pomocą $+$, $-$, $\cdot$, $:$, czyli rozwiązanie wymierne.

Możliwymi rozwiązaniami są tutaj tylko ułamki, których licznik
jest równy ± 1, a mianownik to 1, 2, 4, lub 8.
Proste sprawdzenie pokazuje, że żadna z tych liczb
nie jest rozwiązaniem, stąd

trysekcja kąta 60° jest niemożliwa.

Znany, ale pouczający, przykład pozytywny:

kąt 45° stopni da się podzielić na trzy równe części, jeśli istnieje rozwiązanie równania

$$4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \text{czyli } 8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0$$

dające się uzyskać z liczb 8, -6 i $\sqrt{2}$ za pomocą działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$, czyli będące postaci $v+w\sqrt{2}$, gdzie v i w są liczbami wymiernymi. Podstawiając to wyrażenie do równania otrzymujemy

$$8v^3 + 24v^2w\sqrt{2} + 48vw^2 + 16w^3\sqrt{2} - 6v - 6w\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0,$$

co jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} 8v^3 + 48vw^2 - 6v & = & 0 \\ 24v^2w + 16w^3 - 6w - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Układ

$$\begin{cases} 8v^3 + 48vw^2 - 6v & = & 0 \\ 24v^2w + 16w^3 - 6w - 1 & = & 0 \end{cases}$$

ma łatwe do znalezienia rozwiązanie, gdyż pierwsze równanie spełnione jest dla $v = 0$, co redukuje drugie równanie do postaci

$$16w^3 - 6w - 1 = 0,$$

którego ewentualne wymierne rozwiązanie musi mieć licznik ± 1, a mianownikiem może być 1, 2, 4 lub 8.

Jak łatwo zauważyć dobre jest $-\frac{1}{2}$.

A zatem nasze początkowe równanie ma rozwiązanie $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zaraz zaraz, ktoś zakrzyknie: przecież $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ to nie jest kosinus $15°$!

Tego nikt nie obiecywał – twierdzenie Wanzela mówiło jedynie,
że istnienie takiego rozwiązania
jest warunkiem koniecznym i dostatecznym konstruowalności.

Zaraz zaraz, ktoś zakrzyknie: przecież $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ to nie jest kosinus 15°!

Tego nikt nie obiecywał – twierdzenie Wanzela mówiło jedynie,
że istnienie takiego rozwiązania
jest warunkiem koniecznym i dostatecznym konstruowalności.

Kosinus 15° to $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ – inne rozwiązanie tego równania
(a jakie jest trzecie rozwiązanie?).

Na zakończenie parę propozycji gimnastyki umysłowej:

Sprowadź do równania trzeciego stopnia problem

1. zbudować trójkąt mając dane długości dwóch jego boków i promienia koła wpisanego w ten trójkąt,

Na zakończenie parę propozycji gimnastyki umysłowej:

Sprowadź do równania trzeciego stopnia problem

1. zbudować trójkąt mając dane długości dwóch jego boków i promienia koła wpisanego w ten trójkąt,

2. zbudować trójkąt prostokątny mając daną długość dwusiecznej jednego z kątów tego trójkąta oraz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta,

Na zakończenie parę propozycji gimnastyki umysłowej:

Sprowadź do równania trzeciego stopnia problem

1. zbudować trójkąt mając dane długości dwóch jego boków i promienia koła wpisanego w ten trójkąt,

2. zbudować trójkąt prostokątny mając daną długość dwusiecznej jednego z kątów tego trójkąta oraz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta,

3. zbudować trójkąt mając dane długości trzech jego dwusiecznych,

Na zakończenie parę propozycji gimnastyki umysłowej:

Sprowadź do równania trzeciego stopnia problem

1. zbudować trójkąt mając dane długości dwóch jego boków i promienia koła wpisanego w ten trójkąt,

2. zbudować trójkąt prostokątny mając daną długość dwusiecznej jednego z kątów tego trójkąta oraz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta,

3. zbudować trójkąt mając dane długości trzech jego dwusiecznych,

a potem wykaż, że żadna z tych konstrukcji nie da się wykonać cyrklem i linijką bez podziałki.

A dla lubiących bardzo strome podejścia zadanie:

wykaż, że konstrukcja siedmiokąta foremnego jest równoważna istnieniu rozwiązania wymiernego równania

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

a więc konstrukcja taka cyrklem i linijką bez podziałki jest niewykonalna.

Powodzenia!