to jest fragment wspomnienia o moim matematycznie najbliższym koledze (wspólne prace, a nawet gruba książka) i przyjacielu Lesławie W. Szczerbie.

Fragment ten dotyczy jego pracy o aksjomacie Pascha.

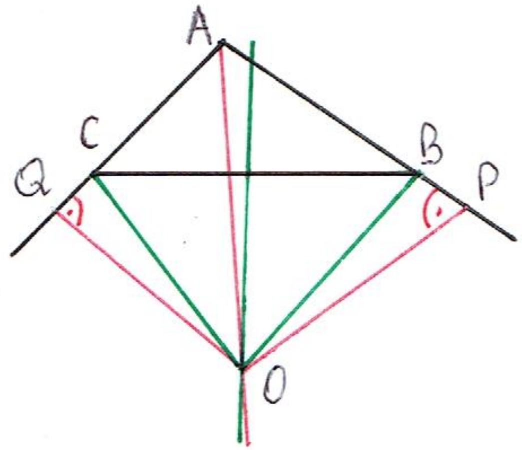
Jak (prawie) wszyscy wiedzą, pierwsza usterka w *Elementach* Euklidesa została znaleziona dopiero pod koniec XIX stulecia.

Okazało się bowiem, że pojęcie odcinka jest w *Elementach* czysto intuicyjne – to, czy punkt na prostej leży w danym odcinku, czy poza nim, było określane zawsze prawidłowo, ale w tym dedukcyjnym dziele nie było podstaw, aby owo położenie z czegoś wywnioskować.

Spostrzeżenie to jest autorstwa Moritza Pascha i zostało opublikowane w jego *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882).

Oczywiście, natychmiast wyprodukowano szereg paradoksów, w stylu “każdy trójkąt jest równoramienny”, co wystarczy dowieść jedynie dla trójkąta nierównoramiennego.

Oczywiście, natychmiast wyprodukowano szereg paradoksów, w stylu "każdy trójkąt jest równoramienny", co wystarczy dowieść jedynie dla trójkąta nierównoramiennego.



Skoro $AB \neq AC$
dwusieczna $\sphericalangle BAC$ i symetralna BC
przecinają się w punkcie O.
$OP = OQ$,
bo O jest na dwusiecznej,
$OB = OC$,
bo O jest na symetralnej,
zatem

$$AP = \sqrt{AO^2 - OP^2} = \sqrt{AO^2 - OQ^2} = AQ,$$
$$BP = \sqrt{BO^2 - OP^2} = \sqrt{CO^2 - OQ^2} = CQ,$$

a więc $AB = AP - BP = AQ - CQ = AC$.

We wspomnianiej monografii podany jest “brakujący” aksjomat, zwany od tej pory aksjomatem Pascha i obecny nie tylko w podręcznikach geometrii, ale i topologii.

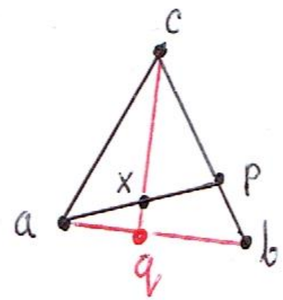
Głosi on, że
prosta przecinająca jeden z boków trójkąta
i nie przechodząca przez żaden jego wierzchołek
przecina jeszcze jeden jego bok.

W topologii za jego pomocą stwierdza się, że prosta rozcina płaszczyznę na dwie spójne części.

Jak łatwo zauważyć, aksjomat Pascha nie tylko określa porządek, lecz także wymiar

– w sposób oczywisty nie może on być większy niż 2.

Pedantyczność charakterystyczna dla podstaw geometrii kazała zastanowić się, czy tych dwóch spraw nie można by rozdzielić. Propozycję wydzielenia części porządkowej podał w 1909 roku Friedrich Schur (profesor uniwersytetów w Poznaniu i Wrocławiu) w postaci, którą można odczytać jako zdanie *wnętrze trójkąta nie zależy od porządku wierzchołków*, co formalnie wygląda tak



$$\forall abcpx\, \exists q\ \mathrm{B}(axp) \wedge \mathrm{B}(bpc) \to \mathrm{B}(aqb) \wedge \mathrm{B}(cxq),$$

gdzie $\mathrm{B}(xyz)$ oznacza, że punkt y jest punktem odcinka xz, lub, jak kto woli, y leży między x i z.

Obalając hipotezę Tarskiego, że porządek musi być zamieszany w wymiar, jako część "czystowymiarową" zaproponowałem zdanie orzekające, że
przynajmniej jedna para prostych – z trzech par wyznaczonych przez cztery punkty – ma punkt wspólny,

co formalnie wygląda tak
$\forall abcd\, \exists x\ (\mathrm{L}(abx) \wedge \mathrm{L}(cdx)) \vee (\mathrm{L}(acx) \wedge \mathrm{L}(bdx)) \vee (\mathrm{L}(adx) \wedge \mathrm{L}(bcx))$,
(gdzie $\mathrm{L}(xyz)$ oznacza, że te punkty są współliniowe),

a "po ludzku" znaczy, że na płaszczyźnie nie ma czworościanów.

Dało mi to (60 lat temu) satysfakcję wygłoszenia na Zjeździe Kół Matematycznych dowodu, że koniunkcja przytoczonych zdań, Schura i mojego, zastępuje aksjomat Pascha,
(i to wygłoszenia w krakowskim Collegium Maius!).

Pozostało pytanie, czy w zaproponowanych zdaniach
nie kryją się jednak jakieś fakty, które są już zawarte również
w innych aksjomatach.

W przypadku aksjomatu wymiarowego dowód był trywialny,
ale z aksjomatem podanym przez Schura
(a zwanym zewnętrznym aksjomatem Pascha)
było trudniej.

I tego dotyczyła praca Leszka, którą chcę zreferować.

Ale najpierw zdarzenie, które było powodem zawartego w niej twierdzenia. Otóż Leszek wspólnie z Wolframem Schwabhauserem udowodnili pewnego razu mocne twierdzenie (dotyczyło ono sumowania modeli, co tutaj nie ma żadnego znaczenia), które było nawet za mocne, gdyż po zreferowaniu go na seminarium okazało się, że można podać prosty, nie budzący wątpliwości kontrprzykład.

Zatem owo twierdzenie twierdzeniem nie było. Ale w dowodzie nie sposób było znaleźć błędu. Każdy wyrzuciłby to twierdzenie i nie zawracałby sobie nim głowy. Ale nie Leszek. On zaczął podejrzewać o fałszywość po kolei każdą, nawet najoczywistszą – wydawałoby się – użytą w nim przesłankę.

Po prawie roku analiza ta przyniosła sukces.
Przesłanką, która zawiodła, było stwierdzenie
podprzestrzeń przestrzeni liniowej ma nie większy od niej wymiar.

Gdzie leży niesłuszność tego argumentu?
Okazuje się, że w nieprecyzyjności pojęcia *podprzestrzeń*.

Jest to zresztą skutek ogólnego braku dopracowania logicznego pojęć dotyczących struktur wielosortowych.

Zauważmy np., że na ogół przez podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\langle V, \mathfrak{F}, +, \cdot\rangle$ rozumiemy $\langle V', \mathfrak{F}, +, \cdot\rangle$, gdzie $V' \subset V$,
czyli zmniejszamy zbiór wektorów, podczas gdy ciało pozostawiamy bez zmian.
I wtedy wszystko jest w porządku.

Lecz można za podprzestrzeń $\langle V, \mathfrak{F}, +, \cdot\rangle$ uważać $\langle V', \mathfrak{F}', +, \cdot\rangle$,
gdzie także $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ – i tak zrobili Leszek i Wolfram.

Ale wtedy użyta przesłanka jest nieprawdziwa.

Bardzo dobitnym przykładem jest tu fakt, że $\mathbb{R}$, jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$, jest, oczywiście, wymiaru 1, a nad $\mathbb{Q}$ – wymiaru nieskończonego $\mathfrak{c}$.

Drugie z powyższych stwierdzeń jest dziełem Georga Hamela i podana przez niego baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nazywa się bazą Hamela.

Jest to zbiór liczb rzeczywistych liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$. Posługując się pewnikiem wyboru można uzyskać ten zbiór tak, by każda liczba rzeczywista była kombinacją liniową o współczynnikach wymiernych elementów tego zbioru.

Bardzo dobitnym przykładem jest tu fakt, że $\mathbb{R}$,
jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$, jest, oczywiście, wymiaru 1,
a nad $\mathbb{Q}$ – wymiaru nieskończonego $\mathfrak{c}$.

Drugie z powyższych stwierdzeń jest dziełem Georga Hamela
i podana przez niego baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nazywa się bazą Hamela.

Jest to zbiór liczb rzeczywistych liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$.
Posługując się pewnikiem wyboru można uzyskać ten zbiór tak,
by każda liczba rzeczywista była kombinacją liniową
o współczynnikach wymiernych elementów tego zbioru.

Hamel użył jej do tego, by wskazać inne od $f(x) = ax$ rozwiązania
równania funkcyjnego $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
Rozwiązania te muszą być bardzo paskudne – nie tylko nieciągłe,
ale też nieograniczone w żadnym przedziale, a nawet niemierzalne.

Kolejne narzędzie, którym wygodnie będzie się posłużyć, to stożek dodatniości.

To poręczne narzędzie do badania porządku w ciele liczbowym

wylansowane przez Emila Artina, patrz Emil Artin, *Geometric algebra* (1957), Nicolas Bourbaki, *Algèbre communicative* (1964, po angielsku 1972).

Jest to formalny zabieg, polegający na utożsamieniu napisów $a > b$ i $(a - b) \in \mathrm{P}$, gdzie P to właśnie stożek dodatniości.

Kolejne narzędzie, którym wygodnie będzie się posłużyć, to stożek dodatniości.
To poręczne narzędzie do badania porządku w ciele liczbowym

wylansowane przez Emila Artina, patrz Emil Artin, *Geometric algebra* (1957), Nicolas Bourbaki, *Algèbre communicative* (1964, po angielsku 1972).

Jest to formalny zabieg, polegający na utożsamieniu napisów $a > b$ i $(a - b) \in \mathrm{P}$, gdzie P to właśnie stożek dodatniości.

Zatem wskazując w konkretnym ciele jakiś zbiór P jako stożek dodatniości określamy tym samym w tym ciele związany z nim porządek.

Jak się łatwo domyślić, fantazyjnie wybrany stożek dodatniości może dawać zupełnie zdumiewające uporządkowanie elementów ciała, w szczególności kompletnie naruszające jego standardowe (zwyczajowe) związki z działaniami.

Dla $\mathbb{R}$, ze zwykłym porządkiem (danym przez stożek dodatniości P), weźmy pewną bazę Hamela $\{b_\alpha\}$ (w której dla konkretnych ilustracji niech

$$b_0 = 1,\ b_1 = \sqrt{2},\ b_2 = \sqrt[4]{2}).$$

Każda liczba rzeczywista to pozaskończona suma

$$x = x_0 \cdot b_0 + \sum_\alpha x_\alpha \cdot b_\alpha,$$

gdzie x_0 i wszystkie x_α są liczbami wymiernymi.

Wykonajmy w $\mathbb{R}$ następującą operację

$$f: \quad f(x) = x_0 - \sum_\alpha x_\alpha \cdot b_\alpha.$$

(można na to patrzeć jak na zmianę bazy Hamela) i zmieńmy za jej pomocą stożek dodatniości:

$$\mathrm{P}^\star : \quad x \in \mathrm{P}^\star \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{P},$$

powodując przemieszanie elementów $\mathbb{R}$;
np. $\sqrt{2} \notin \mathrm{P}^\star$, $-\sqrt{2} \in \mathrm{P}^\star$, $-\sqrt[4]{2} \in \mathrm{P}^\star$.

Zobaczmy, jak wielki zapanował bałagan.

Zobaczmy, jak wielki zapanował bałagan.

Nietrudno zauważyć, że

$$x, y \in \mathrm{P}^\star \to x + y \in \mathrm{P}^\star \quad \text{i} \quad x, y \notin \mathrm{P}^\star \to x + y \notin \mathrm{P}^\star,$$

bo dodawanie odbywa się "po współrzędnych".

Stąd wniosek, że f jest izomorfizmem $\langle \mathbb{R}, +, \mathrm{P} \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, \mathrm{P}^\star \rangle$.

Czyli bałagan nie jest zbyt wielki, choć np. zarówno $1 - 10\sqrt{2}$, jak $10 - \sqrt{2}$ są teraz liczbami dodatnimi.

Zobaczmy, jak wielki zapanował bałagan.

Nietrudno zauważyć, że

$$x, y \in \mathrm{P}^{\star} \to x + y \in \mathrm{P}^{\star} \quad \text{i} \quad x, y \notin \mathrm{P}^{\star} \to x + y \notin \mathrm{P}^{\star},$$

bo dodawanie odbywa się "po współrzędnych".

Stąd wniosek, że f jest izomorfizmem $\langle \mathbb{R}, +, \mathrm{P} \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, \mathrm{P}^{\star} \rangle$.

Czyli bałagan nie jest zbyt wielki, choć np. zarówno $1 - 10\sqrt{2}$, jak $10 - \sqrt{2}$ są teraz liczbami dodatnimi.

Ale jednak $\mathfrak{R} := \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \mathrm{P} \rangle$ i $\mathfrak{R}^{\star} := \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \mathrm{P}^{\star} \rangle$
nie są izomorficzne,

bo np. $(-\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2} \notin \mathrm{P}^{\star}$, czyli $(\mathrm{P}^{\star})^2 \not\subset \mathrm{P}^{\star}$; mówiąc po ludzku: kwadraty liczb "nowododatnich" nie muszą być "nowododatnie"

Konsekwentnie odmienne będzie pojęcie modułu:

$$|x|^\star = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in \mathrm{P}^\star, \\ -x, & \text{gdy } x \notin \mathrm{P}^\star. \end{cases}$$

Okazuje się, że ma on bardzo regularne własności:

$$|x| = |y| \leftrightarrow |x|^\star = |y|^\star,$$

bo każda z tych równości ma miejsce, gdy x i y różnią się co najwyżej znakami. Mamy więc

$$\big||x|\big|^\star = |x|^\star \quad \text{i} \quad \big||x|^\star\big| = |x|.$$

Druga zmiana, to konsekwentne dostosowanie normy w $\mathbb{R}^2$:

$$\|a\|^\star := |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|^\star$$

Zauważmy, że podobnie jak dla modułu mamy

$$\|a\| = \|b\| \leftrightarrow \|a\|^\star = \|b\|^\star \text{ oraz } \big|\|a\|\big|^\star = \|a\|^\star \quad \text{i} \quad \big|\|a\|^\star\big| = \|a\|.$$

A teraz wreszcie geometria (oczywiście euklidesowa).

Powszechnie(?) wiadomo, że do jej opisania wystarczają dwie relacje: relacja leżenia między (betweenness, czyli wspomniana już relacja B)

i czteroargumentowa relacja przystawania (equidistance, gdzie D($abcd$) oznacza, że odległość punktów a i b jest taka sama, jak odległość punktów c i d).

patrz np. Alfred Tarski, *What is elementary geometry?* i *A decision method for elementary algebra and geometry.*

Porównamy geometrie jedno- i dwuwymiarowe odpowiednio nad $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{R}^\star$.

Okazuje się, że w przypadku geometrii jednowymiarowej nic się nie zmieniło. W jednowymiarowej geometrii nad $\mathfrak{R}$ i nad $\mathfrak{R}^\star$ interpretujemy relacje B i D w oczywisty sposób:

$$\mathrm{B}_1(xyz) \leftrightarrow |x-y|+|y-z|=|x-z|$$
$$\mathrm{D}_1(xyzt) \leftrightarrow |x-y|=|z-t|$$

oraz

$$\mathrm{B}_1^\star(xyz) \leftrightarrow |x-y|^\star+|y-z|^\star=|x-z|^\star$$
$$\mathrm{D}_1^\star(xyzt) \leftrightarrow |x-y|^\star=|z-t|^\star.$$

Ponieważ, jak ustaliliśmy $|a|=|b| \leftrightarrow |a|^\star=|b|^\star$,
a w powyższych interpretacjach nie używane jest mnożenie, więc **geometria prostej pozostała bez zmian**.

Okazuje się, że w przypadku geometrii jednowymiarowej nic się nie zmieniło. W jednowymiarowej geometrii nad $\mathfrak{R}$ i nad $\mathfrak{R}^\star$ interpretujemy relacje B i D w oczywisty sposób:

$$\mathrm{B}_1(xyz) \leftrightarrow |x-y| + |y-z| = |x-z|$$
$$\mathrm{D}_1(xyzt) \leftrightarrow |x-y| = |z-t|$$

oraz

$$\mathrm{B}_1^\star(xyz) \leftrightarrow |x-y|^\star + |y-z|^\star = |x-z|^\star$$
$$\mathrm{D}_1^\star(xyzt) \leftrightarrow |x-y|^\star = |z-t|^\star.$$

Ponieważ, jak ustaliliśmy $|a| = |b| \leftrightarrow |a|^\star = |b|^\star$, a w powyższych interpretacjach nie używane jest mnożenie, więc **geometria prostej pozostała bez zmian**.

Bardziej formalnie:

Jednowymiarowe geometrie $\mathfrak{E}_1 := \langle \mathbb{R},\, \mathrm{B}_1,\, \mathrm{D}_1 \rangle$ *i* $\mathfrak{E}_1^\star := \langle \mathbb{R}^\star,\, \mathrm{B}_1^\star,\, \mathrm{D}_1^\star \rangle$ *są izomorficzne,*

jako struktury jednakowo określone nad izomorficznymi algebrami.

Przejdźmy do przypadku dwuwymiarowego

Analogicznie do $\mathfrak{E}_1$ i $\mathfrak{E}_1^\star$ określamy geometrie $\mathfrak{E}_2 := \langle \mathbb{R}^2, \mathrm{B}_2, \mathrm{D}_2 \rangle$ i $\mathfrak{E}_2^\star := \langle (\mathbb{R}^\star)^2, \mathrm{B}_2^\star, \mathrm{D}_2^\star \rangle$ przyjmując

$$\mathrm{B}_2(xyz) \leftrightarrow \|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\|$$
$$\text{i } \mathrm{D}_2(xyzt) \leftrightarrow \|x-y\| = \|z-t\|$$

oraz

$$\mathrm{B}_2^\star(xyz) \leftrightarrow \|x-y\|^\star + \|y-z\|^\star = \|x-z\|^\star$$
$$\text{i } \mathrm{D}_2^\star(xyzt) \leftrightarrow \|x-y\|^\star = \|z-t\|^\star.$$

Wobec $\|a\| = \|b\| \leftrightarrow \|a\|^\star = \|b\|^\star$ mamy

$$\mathrm{D}_2(xyzt) \leftrightarrow \mathrm{D}_2^\star(xyzt).$$

Jednak $\mathfrak{E}_2$ i $\mathfrak{E}_2^\star$ nie są izomorficzne, bo $\mathrm{B}_2 \neq \mathrm{B}_2^\star$, gdyż np. dla $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ i $c = (\sqrt{2}, 0)$ mamy $\mathrm{B}_2(abc)$, a więc $\neg\mathrm{B}_2(cab)$ i równocześnie $\mathrm{B}_2^\star(cab)$.

To przemieszanie punktów, zmieniające pojęcie odcinka, nie zmienia jednak pojęcia prostej.

W tym celu należy sprawdzić, że relacje współliniowości, określone w oczywisty sposób dla $\mathfrak{E}_2$ i $\mathfrak{E}_2^\star$ przez warunki

$\mathrm{L}(xyz) \leftrightarrow \mathrm{B}_2(xyz) \vee \mathrm{B}_2(yzx) \vee \mathrm{B}_2(zxy)$,
i $\mathrm{L}^\star(xyz) \leftrightarrow \mathrm{B}_2^\star(xyz) \vee \mathrm{B}_2^\star(yzx) \vee \mathrm{B}_2^\star(zxy)$,

są spełniane przez te same punkty.

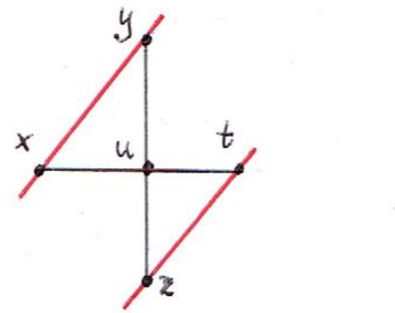
Sprowadza się to do sprawdzenia, że trzy punkty związane relacją B_2, są związane – być może w innej kolejności – relacją $\mathrm{B}_2^\star$.

Dokładniej:
$\mathrm{B}_2(xyz) \rightarrow \mathrm{B}_2^\star(xyz) \vee \mathrm{B}_2^\star(yzx) \vee \mathrm{B}_2^\star(zxy)$,
$\mathrm{B}_2^\star(xyz) \rightarrow \mathrm{B}_2(xyz) \vee \mathrm{B}_2(yzx) \vee \mathrm{B}_2(zxy)$,
czego sprawdzenie jest wyłącznie żmudne.

Zatem, ponieważ $\mathrm{D}_2 = \mathrm{D}_2^\star$ i $\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_2^\star$, okazało się, że proste w "zwykłej" dwuwymiarowej geometrii i w "przemieszanej" mają identyczne własności, co można wyrazić tak:

Każde zdanie sformułowane w terminach współliniowości L *i przystawania* D *jest prawdziwe w* $\mathfrak{E}_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w* $\mathfrak{E}_2^\star$*.*

W $\mathfrak{E}_2^\star$ zakłócony jest jednak związek porządków na różnych prostych, wyrażony przez aksjomat Pascha – tu w wersji Schura. Sprawdźmy.



Rozważmy punkty
$t = (1,\, 0)$, $x = (-\sqrt[4]{2},\, 0)$, $y = (0,\, \sqrt{2})$,
$z = (0,\, -\sqrt[4]{2})$, $u = (0,\, 0)$.
Ponieważ $\sqrt{2} <^\star 0 <^\star 1 <^\star -\sqrt[4]{2}$, więc $\mathrm{B}_2^\star(xtu) \wedge \mathrm{B}_2^\star(yuz)$,
a tymczasem proste xy i zt są rozłączne, zatem
skoro $\forall v\ \neg\mathrm{L}(xyv) \vee \neg\mathrm{L}(ztv)$, tym bardziej $\neg\big(\mathrm{B}_2^\star(xvy) \wedge \mathrm{B}_2^\star(ztv)\big)$.

Oczywiście, aby się przekonać, że $\mathfrak{E}_2^\star$
różni się od “zwyczajnej” geometrii jedynie tym,
że nie jest w niej spełniony aksjomat Pascha,
a “wszystko inne” jest w porządku,
należałoby sprawdzić, że w niej spełnione są wszystkie
pozostałe aksjomaty “zwyczajnej” geometrii.

Oczywiście, aby się przekonać, że $\mathfrak{E}_2^\star$
różni się od "zwyczajnej" geometrii jedynie tym,
że nie jest w niej spełniony aksjomat Pascha,
a "wszystko inne" jest w porządku,
należałoby sprawdzić, że w niej spełnione są wszystkie
pozostałe aksjomaty "zwyczajnej" geometrii.

Warunkiem niezbędnym, aby to wykonać jest
dysponowanie aksjomatyką "zwykłej" geometrii.

W omawianej pracy taką aksjomatyką była
aksjomatyka Tarskiego.

Proszę przygotować się na wstrząs. Oto ona.

A 1 $\forall xy\ \mathrm{B}(xyx) \to x = y$

A 2 $\forall xyzu\ \mathrm{B}(xyu) \wedge \mathrm{B}(yzu) \to \mathrm{B}(xyz)$

A 3 $\forall xyzu\ \mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{B}(xyu) \wedge x \neq y \to \mathrm{B}(xzu) \vee \mathrm{B}(xuz)$

A 4 $\forall xy\ \mathrm{D}(xyyx)$

A 5 $\forall xyz\ \mathrm{D}(xyzz) \to x = y$

A 6 $\forall xyzuvw\ \mathrm{D}(xyzu) \wedge \mathrm{D}(zuvw) \to \mathrm{D}(xyvw)$

A 7 $\forall txyzu\ \exists v\ \mathrm{B}(xtu) \wedge \mathrm{B}(yuz) \to \mathrm{B}(xvy) \wedge \mathrm{B}(ztv)$

A 8 $\forall txyzu\ \exists vw\ \mathrm{B}(xut) \wedge \mathrm{B}(yuz) \wedge x \neq y \to$
$\to \mathrm{B}(xyv) \wedge \mathrm{B}(xzw) \wedge \mathrm{B}(vtw)$

A 9 $\forall xx'yy'zz'uu'\ \mathrm{D}(xyx'y') \wedge \mathrm{D}(yzy'z') \wedge \mathrm{D}(xux'u') \wedge$
$\wedge \mathrm{D}(yuy'u') \wedge \mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{B}(x'y'z') \to \mathrm{D}(zuz'u')$

A10 $\forall xyuv\ \exists z\ \mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{D}(yzuv)$

A11 $\exists xyz\ \neg\mathrm{B}(xyz) \wedge \neg\mathrm{B}(yzx) \wedge \neg\mathrm{B}(zxy)$

A12 $\forall xyzuv\ \mathrm{D}(xuxv) \wedge \mathrm{D}(yuyv) \wedge \mathrm{D}(zuzv) \wedge u \neq v \to$
$\to \mathrm{B}(xyz) \vee \mathrm{B}(yzx) \vee \mathrm{B}(zxy)$

Jeśli do tych aksjomatów podejść bez lęku, to okaże się, że po dość prostych w interpretacji aksjomatach **A1 – A6 i A10** pozostałe mają nie tylko formalny sens.

A7 to aksjomat Pascha w wersji Schura,

A8 to V postulat *Elementów* w wersji "błędu Legendre'a", czyli fakt, że przez każdy punkt wnętrza kąta wypukłego można przeprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona,

A9 to druga cecha przystawania trójkątów (tzw. bkb),

A11 głosi, że wymiar jest większy niż 1,
a **A12** – że mniejszy niż 3 (symetralna jest prostą).

Niestety czegoś lepszego od tej aksjomatyki nie ma
i raczej nigdy nie będzie.

Ale co to znaczy lepsza? Albo choćby dobra?

Nie tylko ma to być aksjomatyka spełniająca wymogi współczesnej logiki matematycznej, lecz także ma się składać ze zdań przedstawiających – wedle wskazań Kartezjusza –
prawdy jasne i oczywiste.

Ta jasność i oczywistość ma być postrzegana przez wszystkich,
w szczególności przez uczniów.

Pierwszą aksjomatykę spełniająca kryterium zgodności z logiką podał Dawid Hilbert w *Grundlagen der Geometrie* (1899),
ale była ona niesłychanie rozległa i trudno było wszystkie jej sformułowania uznać za oczywiste.

Podejmowano dalsze liczne próby zbudowania dobrej aksjomatyki geometrii euklidesowej, ale niestety znajdowane rozwiązania nie spełniały kartezjańskich kryteriów.

Niektórzy mieli bardzo atrakcyjne pomysły, jak choćby

Mario Pieri, chcący oprzeć aksjomatykę jedynie na pojęciu trójkąta równobocznego,

czy Alfred Tarski z wyprodukowaną w prezencie dla Leśniewskiego "geometrią naturalną", w której były tylko kule i ich zawieranie.

To wszystko było ciekawe, ale do szkolnego spożycia się nie nadawało.

Podejmowano dalsze liczne próby zbudowania dobrej aksjomatyki geometrii euklidesowej, ale niestety znajdowane rozwiązania nie spełniały kartezjańskich kryteriów.

Niektórzy mieli bardzo atrakcyjne pomysły, jak choćby

Mario Pieri, chcący oprzeć aksjomatykę jedynie na pojęciu trójkąta równobocznego,

czy Alfred Tarski z wyprodukowaną w prezencie dla Leśniewskiego "geometrią naturalną", w której były tylko kule i ich zawieranie.

To wszystko było ciekawe, ale do szkolnego spożycia się nie nadawało.

Czyżby Immanuel Kant w *Krytyce czystego rozumu* miał rację, iż bądź przychodzimy na świat z gotową świadomością geometrii, bądź też (jako ssaki) wysysamy ją z mlekiem matki?
I tego żadną aksjomatyką wyrazić się przystępnie nie da?

Wyjaśnienie tej zagadkowej tajemnicy jest jednak całkowicie racjonalne.

Gdy spojrzymy na definicję np. przestrzeni Banacha, powinno nam rzucić się w oczy, jak wiele jest teorii poprzedzających jej konstrukcję, choćby od teorii liczb rzeczywistych poczynając.
Mając tak wiele bardzo zaawansowanych “półfabrykatów”
nie trudno złożyć z nich bardzo doskonały produkt.
Czyż nie tak wygląda konstruowanie choćby laptopów
czy stacji kosmicznych?

Wyjaśnienie tej zagadkowej tajemnicy jest jednak całkowicie racjonalne.

Gdy spojrzymy na definicję np. przestrzeni Banacha, powinno nam rzucić się w oczy, jak wiele jest teorii poprzedzających jej konstrukcję, choćby od teorii liczb rzeczywistych poczynając. Mając tak wiele bardzo zaawansowanych “półfabrykatów” nie trudno złożyć z nich bardzo doskonały produkt. Czyż nie tak wygląda konstruowanie choćby laptopów czy stacji kosmicznych?

Tymczasem – uwiedzeni *Elementami* – chcemy (chcieliśmy) opisać bardzo złożoną, bogatą teorię *ab ovo*.

A przecież już w Starożytności uczono nas, że

nie ma królewskiej drogi do geometrii.