O różnych geometriach

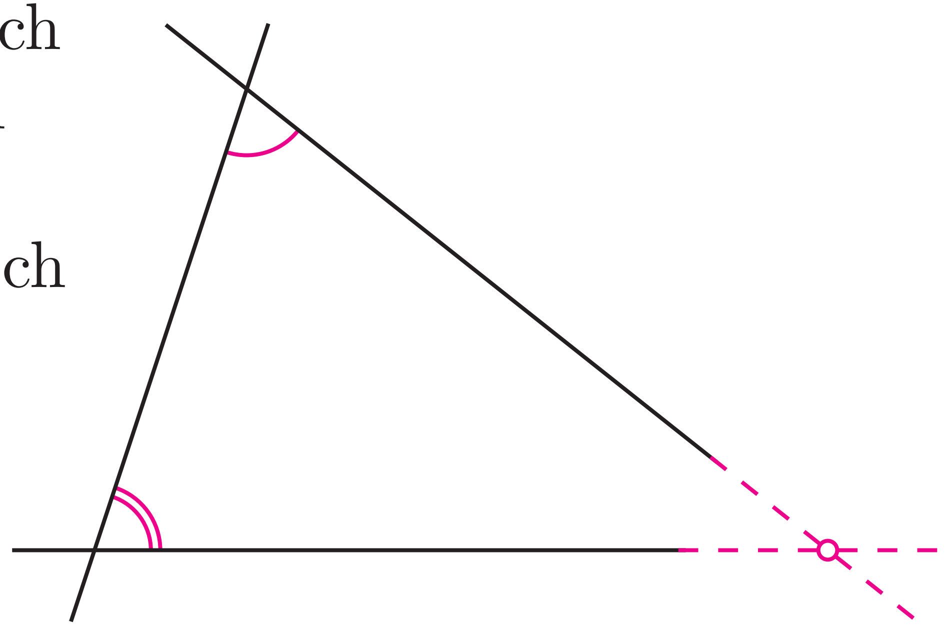
i

możliwych kształtach Wszechświata

Najbardziej znana jest geometria euklidesowa tradycyjnie oparta na *Elementach* – jej uczymy się w szkole.

Postulaty *Elementów*

1. Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.
2. Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.
3. Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Jeśli suma kątów wewnętrznych jednostronnych, utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.



Już Starożytni uprawiali także geometrię sferyczną.

W niej, między innymi, pole trójkąta zależy (na danej sferze) jedynie od sumy jego kątów.

Już Starożytni uprawiali także geometrię sferyczną.

W niej, między innymi, pole trójkąta zależy (na danej sferze) jedynie od sumy jego kątów.

Pole dwukąta na sferze jednostkowej to 4α, więc

mamy $4\alpha = 2A + 2T,\ 4\beta = 2B + 2T,\ 4\gamma = 2C + 2T$,

stąd $4(\alpha + \beta + \gamma) = 2(A + B + C) + 6T =$

$$= 2(A + B + C + T) + 4T = 4\pi + 4T,$$

a więc $T = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$.

Zatem pole trójkąta sferycznego na sferze o promieniu R

to $R \cdot ((\alpha + \beta + \gamma) - \pi)$.

Już Starożytni uprawiali także geometrię sferyczną.

W niej, między innymi, pole trójkąta zależy (na danej sferze) jedynie od sumy jego kątów.

Pole dwukąta na sferze jednostkowej to 4α, więc
mamy $4\alpha = 2A + 2T,\ 4\beta = 2B + 2T,\ 4\gamma = 2C + 2T$,
stąd $4(\alpha + \beta + \gamma) = 2(A + B + C) + 6T =$
$= 2(A + B + C + T) + 4T = 4\pi + 4T$,
a więc $T = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$.

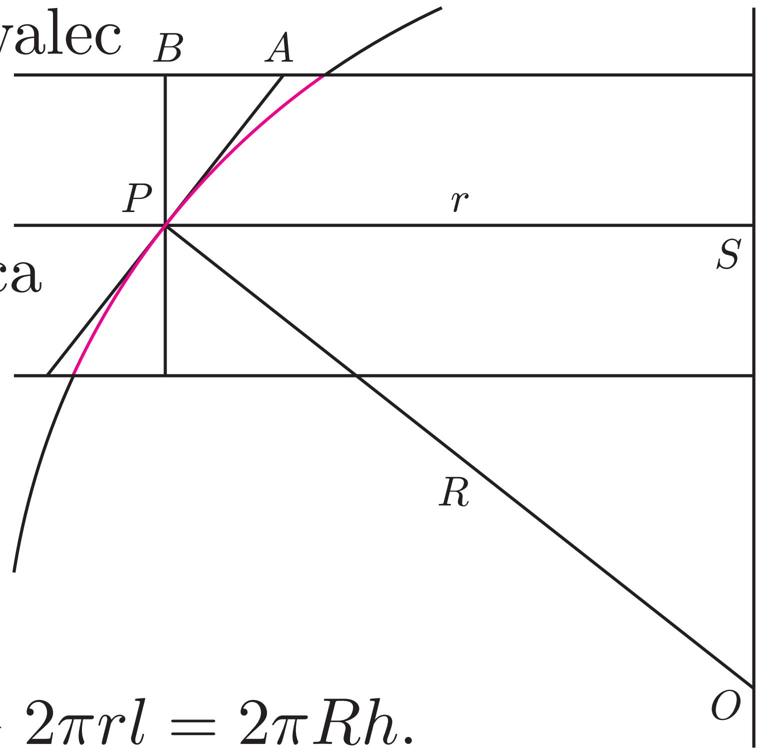
Zatem pole trójkąta sferycznego na sferze o promieniu R
to $R \cdot ((\alpha + \beta + \gamma) - \pi)$.

Geometria sferyczna była jednak uważana za fragment stereometrii.

Archimedes *(O kuli i walcu)* obliczył pole koła na sferze jako wniosek z twierdzenia:

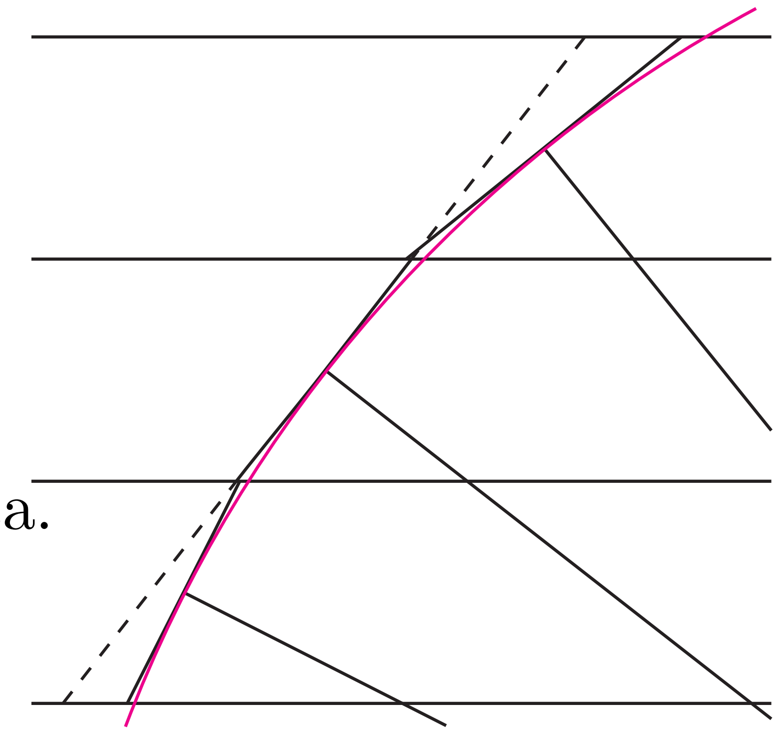
Pole sfery jest równe polu powierzchni bocznej opisanego na niej walca.

Spostrzeżenie. Sferę i opisany na niej walec przecinamy dwiema płaszczyznami prostopadłymi do jego osi. Pole wyciętej powierzchni bocznej walca jest równe polu stożka ściętego opisanego na tej warstwie sfery w połowie jej wysokości.



$$\frac{PS}{PB} = \frac{PO}{PA} \Rightarrow \frac{r}{\frac{1}{2}h} = \frac{R}{\frac{1}{2}l} \Rightarrow 2\pi rl = 2\pi Rh.$$

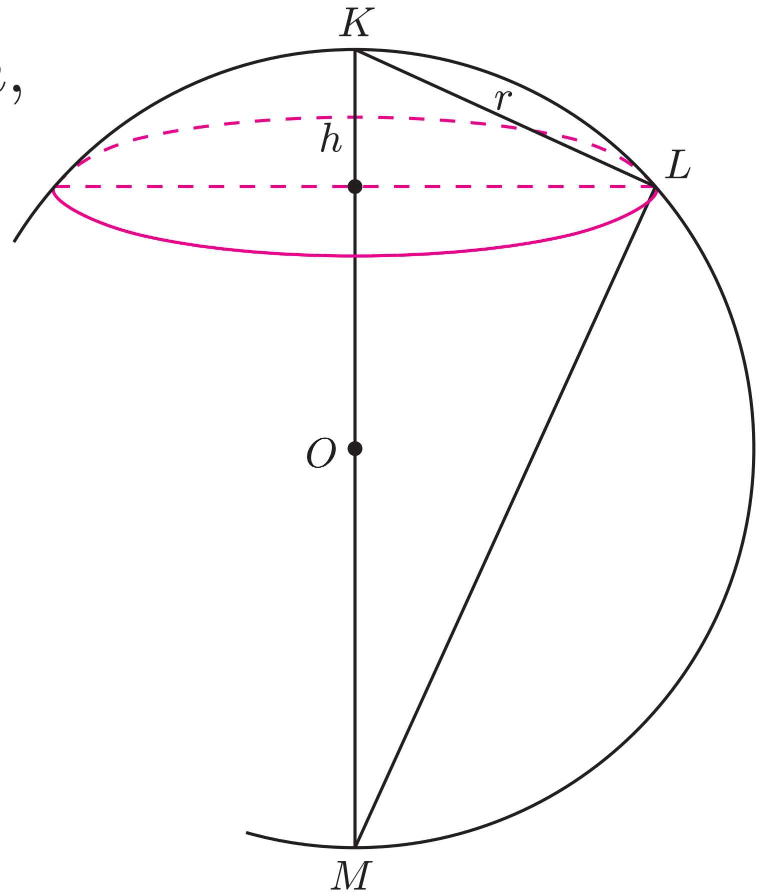
Aby obliczyć pole sfery
sferę (i walec) możemy pociąć
na coraz drobniejsze warstwy,
a suma powierzchni bocznych
powstałych dla każdej warstwy
stożków ściętych będzie równa
sumarycznej powierzchni bocznej walca.



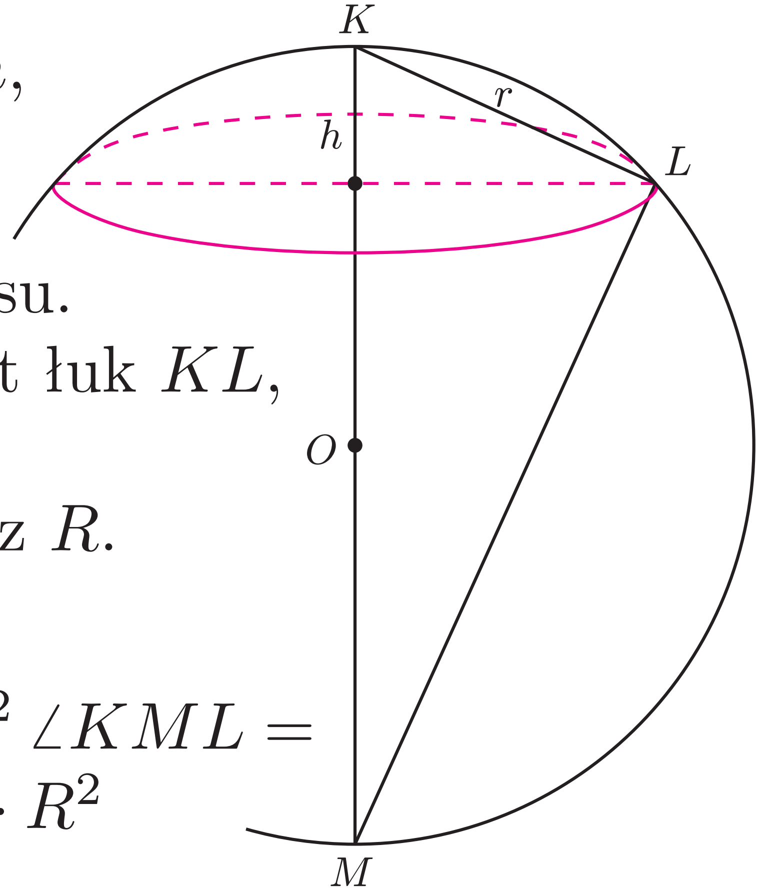
Wniosek I. Korzystając z tego,
że ciąg stały jest zbieżny,
mamy pole sfery $= 2\pi R \cdot 2R = 4\pi r^2$. czyli $\gamma = 4\pi$.

Wniosek II. Pole koła na sferze jest równe πr^2, gdzie r jest odległością (przestrzenną!) środka okręgu od jego brzegu.

Istotnie, pole czaszy jest równe $2\pi R \cdot h$, czyli $\pi \cdot (2R \cdot h) = \pi r^2$.



Wniosek II. Pole koła na sferze jest równe πr^2, gdzie r jest odległością (przestrzenną!) środka okręgu od jego brzegu.



Istotnie, pole czaszy jest równe $2\pi R \cdot h$, czyli $\pi \cdot (2R \cdot h) = \pi r^2$.

Dla mieszkańców sfery to r nie ma sensu.
Dla nich promieniem koła na sferze jest łuk KL, oznaczmy go r_s, czyli jest to kąt KOL pomnożony przez R.

Ponieważ $\angle KOL = 2\angle KML$ i $r = 2R \sin \angle KML$, więc $r^2 = 4R^2 \sin^2 \angle KML = $
$= 2R^2(1 - \cos \angle KOL) = 2(1 - \cos \frac{r_s}{R}) \cdot R^2$

Tak więc pole koła na sferze to $2\pi(1 - \cos \frac{r_s}{R}) \cdot R^2$.
Zauważmy, że jest zawsze mniejsze od pola koła na płaszczyźnie.

Problem Proklosa: *czy V postulat Euklidesa jest potrzebny?*

stworzył (ewentualne) zapotrzebowanie
na inną geometrię niż euklidesowa czy sferyczna.

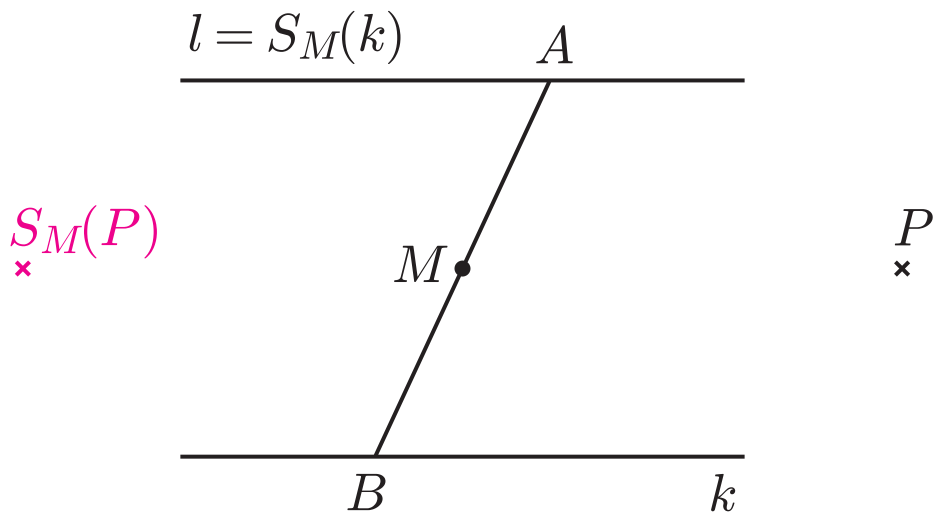
Jej (ewentualne) własności pojawiały się jako przesłanki
“dowodów” V postulatu Euklidesa
opartych – z założenia – na czterech pierwszych postulatach.

Problem Proklosa: *czy V postulat Euklidesa jest potrzebny?*

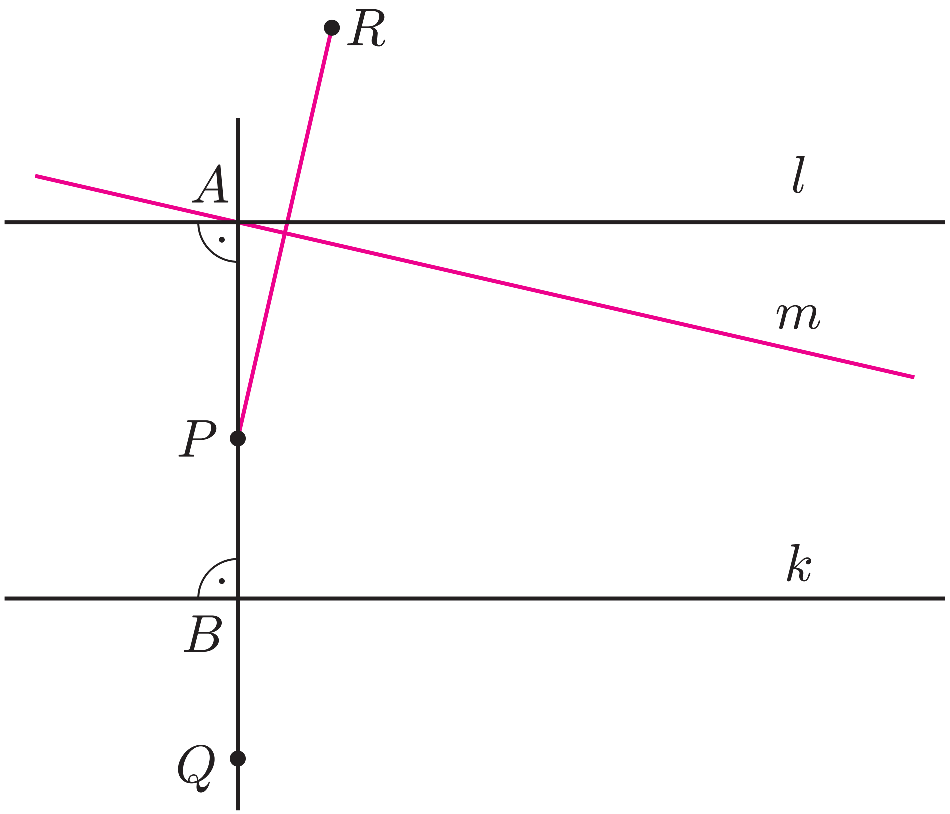
stworzył (ewentualne) zapotrzebowanie
na inną geometrię niż euklidesowa czy sferyczna.

Jej (ewentualne) własności pojawiały się jako przesłanki
"dowodów" V postulatu Euklidesa
opartych – z założenia – na czterech pierwszych postulatach.

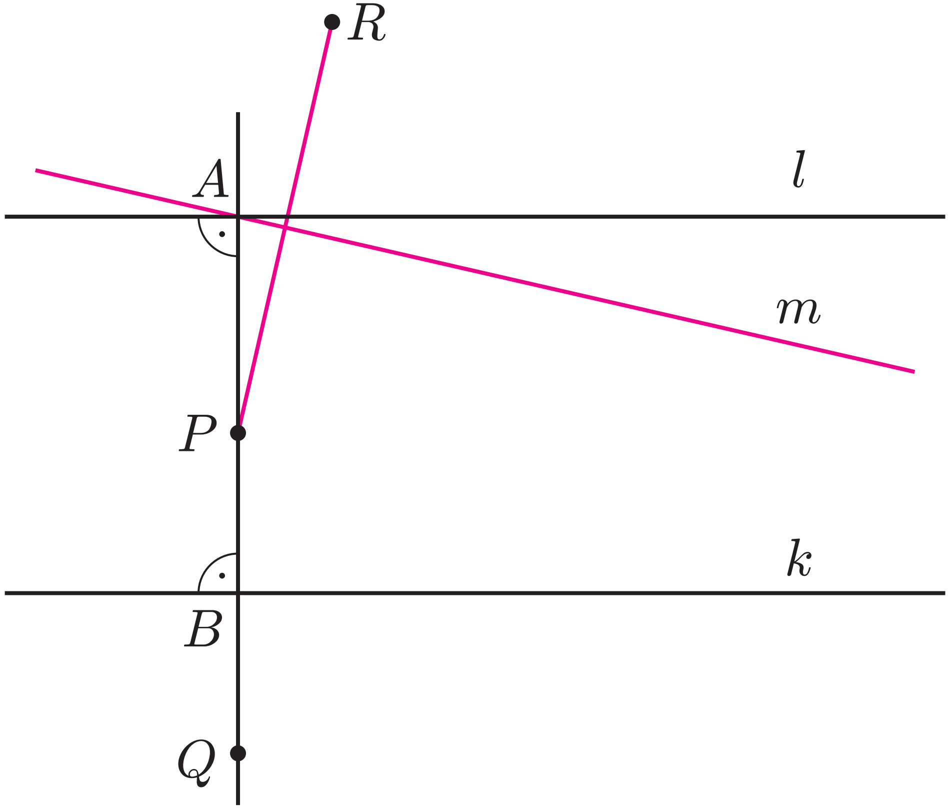
Już z czterech postulatów
wynika, że
przez punkt poza prostą
można na płaszczyźnie
poprowadzić do niej
prostą rozłączną.



Oto “dowód” V postulatu autorstwa Farkasa Bolyaia:
Na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić tylko jedną prostą z nią rozłączną.



Oto “dowód” V postulatu autorstwa Farkasa Bolyaia:
Na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić tylko jedną prostą z nią rozłączną.



środek okręgu opisanego
na trójkącie PQR
leży na symetralnych boków
PQ i PR
czyli na k i m,
a więc proste te przecinają się.

Girolamo Saccheri udowodnił poprawnie,
nie korzystając z V postulatu,
że suma kątów trójkąta nie może być większa od π,
a więc wykluczył geometrię sferyczną
z grona geometrii opartych na pierwszych czterech postulatach.

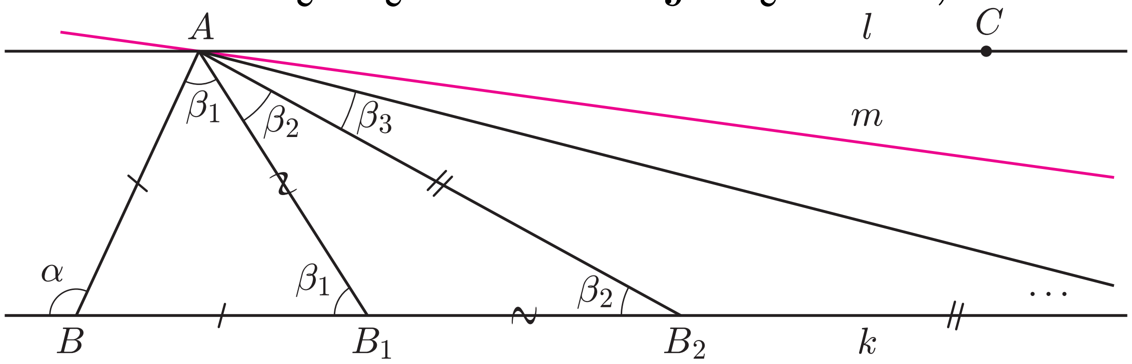
Girolamo Saccheri udowodnił poprawnie,
nie korzystając z V postulatu,
że suma kątów trójkąta nie może być większa od π,
a więc wykluczył geometrię sferyczną
z grona geometrii opartych na pierwszych czterech postulatach.

Gdyby więc miała istnieć różna od geometrii euklidesowej
geometria spełniająca pierwsze cztery postulaty,
trójkąty w niej musiałyby mieć sumę kątów mniejszą od π,

Girolamo Saccheri udowodnił poprawnie,
nie korzystając z V postulatu,
że suma kątów trójkąta nie może być większa od π,
a więc wykluczył geometrię sferyczną
z grona geometrii opartych na pierwszych czterech postulatach.

Gdyby więc miała istnieć różna od geometrii euklidesowej
geometria spełniająca pierwsze cztery postulaty,
trójkąty w niej musiałyby mieć sumę kątów mniejszą od π,

ponieważ gdy suma
jest równa π,
spełniony jest V postulat,

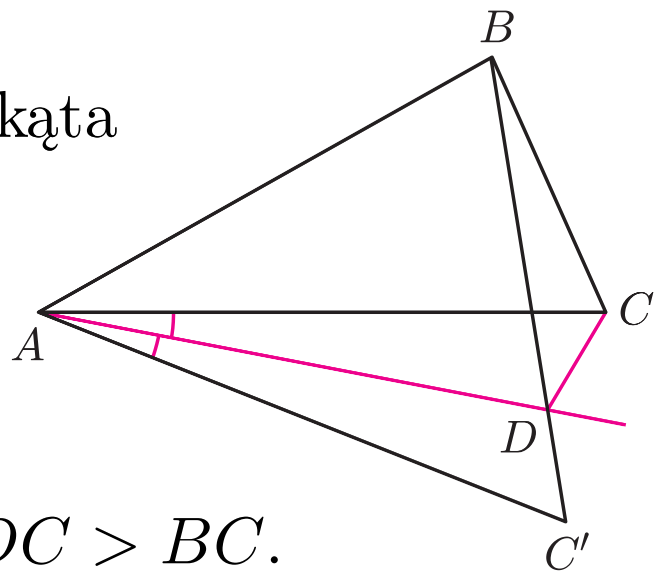


bo $\beta_1 = \alpha/2$, $\beta_i = \beta_{i-1}/2 = \alpha/2^i$, więc $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha/2^i = \alpha$.

Dowód Saccheriego korzysta z poprawnie dowiedzionego z pierwszych czterech postulatów spostrzeżenia, że

Jeśli dwa trójkąty mają parę boków odpowiednio równych, to trzeci bok jest dłuższy w tym trójkącie, w którym kąt między nimi jest większy.

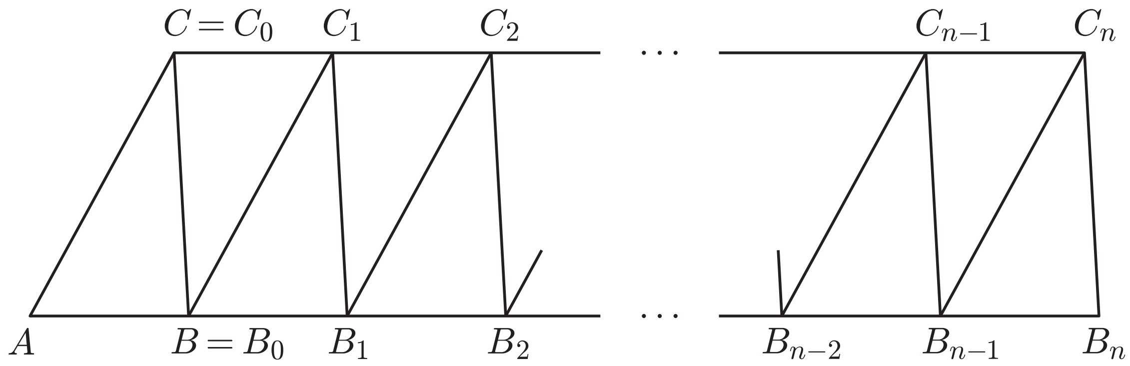
Wynika to z nierówności trójkąta



$$BC' = BD + DC' = BD + DC > BC.$$

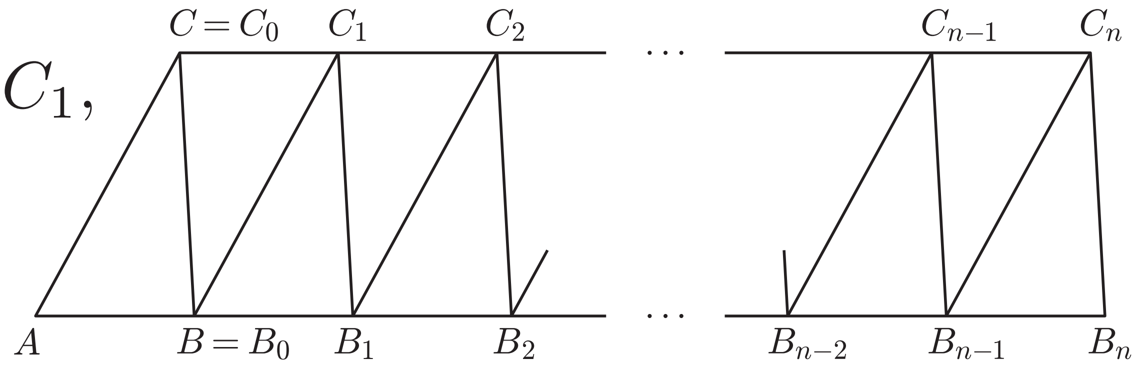
Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest większa od π.

Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest większa od π.



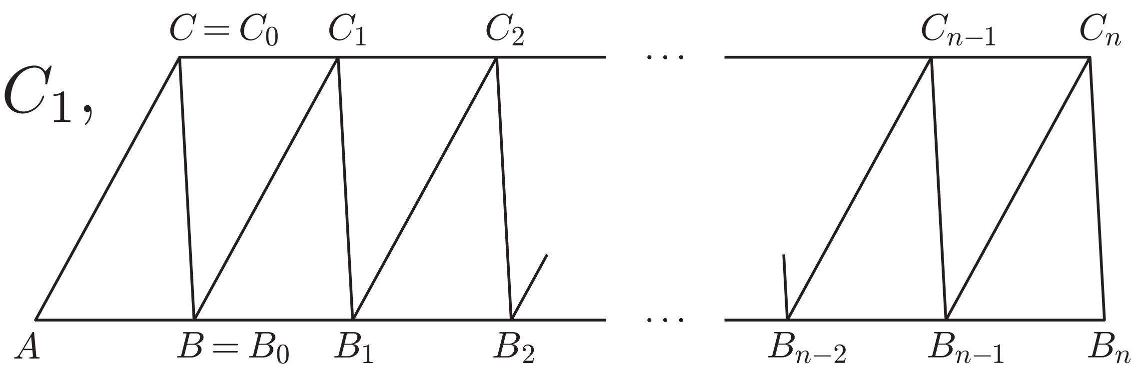
Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest większa od π.

Ponieważ $\angle ACB > \angle C_0BC_1$,
więc $AB > C_0C_1$
i $\varepsilon := AB - C_0C_1 > 0$.



Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest większa od π.

Ponieważ $\angle ACB > \angle C_0BC_1$,
więc $AB > C_0C_1$
i $\varepsilon := AB - C_0C_1 > 0$.



Obliczmy długość łamanej $AC_0C_1 \dots C_nB_n$:

$$AC + n \cdot C_0C_1 + CB = AC + CB + n \cdot AB - n \cdot \varepsilon = \\ = (AC + CB - AB - n \cdot \varepsilon) + AB_n.$$

Dla dużych n wartość nawiasu będzie ujemna, a to by znaczyło, że łamana jest krótsza od odcinka –

sprzeczność z nierównością trójkąta.

Zatem suma kątów dowolnego trójkąta jest nie większa niż π.

Wynik Saccheriego też spowodował dużą wpadkę:

Adrien Marie Legendre “udowodnił”, że
suma kątów w trójkącie nie może być mniejsza od π.

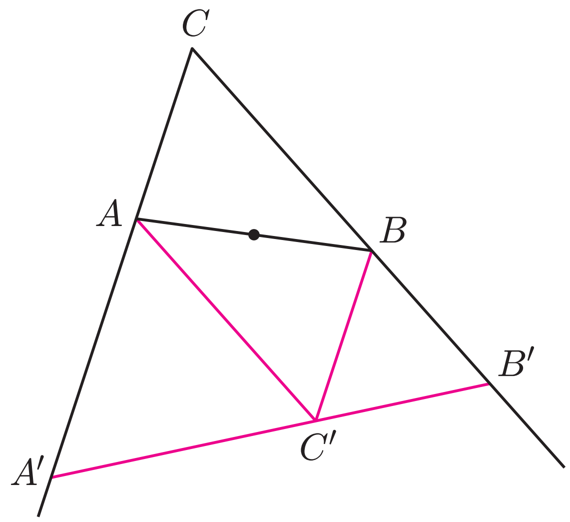
Ten “dowód” został przez władze oświatowe
rewolucyjnej Francji
natychmiast wprowadzony do programów szkolnych
i przez ponad dwadzieścia lat, aby we Francji zdać maturę,
trzeba było znać ten “dowód”.

Oto on.

Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest mniejsza od π.

Oto on.

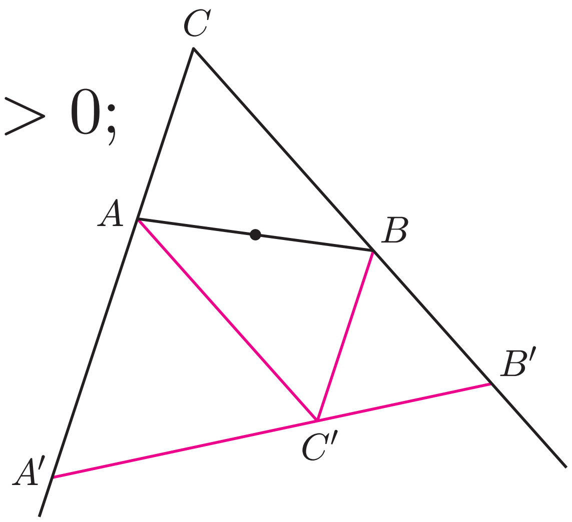
Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest mniejsza od π.



Oto on.

Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest mniejsza od π.

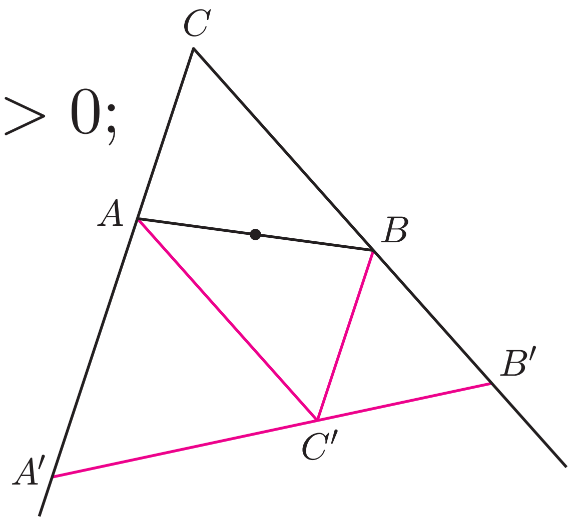
$$\Delta(ABC) := \pi - (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) > 0;$$



Oto on.

Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest mniejsza od π.

$$\Delta(ABC) := \pi - (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) > 0;$$



obliczamy $\Delta(A'B'C) =$

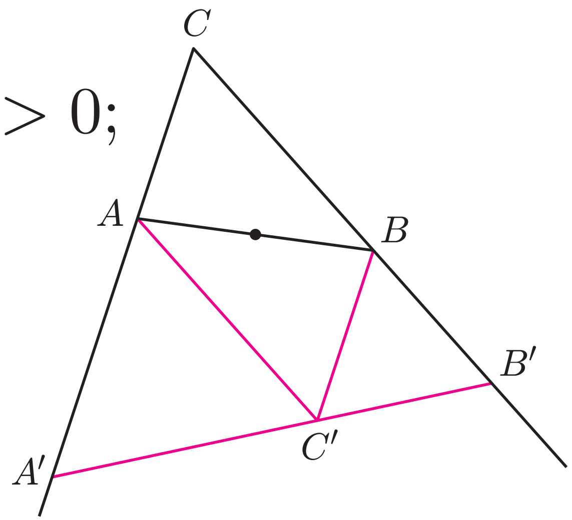
$$= \Delta(ABC) + \Delta(ABC') + \\ + \Delta(A'AC') + \Delta(C'BB') \geq \\ \geq \Delta(ABC) + \Delta(ABC') = 2 \cdot \Delta(ABC),$$

bo $\Delta(A'AC') \geq 0$ i $\Delta(CBB') \geq 0$.

Powtarzając tę operację możemy otrzymać trójkąt z dowolnie dużym defektem, a więc też z ujemną sumą kątów – sprzeczność.

Oto on.

Przypuśćmy, że suma kątów pewnego trójkąta jest mniejsza od π.



$\Delta(ABC) := \pi - (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) > 0;$

obliczamy $\Delta(A'B'C) =$
$= \Delta(ABC) + \Delta(ABC')+$
$+\Delta(A'AC') + \Delta(C'BB') \geq$
$\geq \Delta(ABC) + \Delta(ABC') = 2 \cdot \Delta(ABC),$

bo $\Delta(A'AC') \geq 0$ i $\Delta(CBB') \geq 0$.

Powtarzając tę operację możemy otrzymać trójkąt z dowolnie dużym defektem, a więc też z ujemną sumą kątów – sprzeczność.

Zatem, wobec twierdzenia Saccheriego, wszystkie trójkąty mają sumę kątów π i V postulat jest udowodniony.

Immanuel Kant (1724 – 1804), *Krytyka czystego rozumu*

Immanuel Kant (1724 – 1804), *Krytyka czystego rozumu*

Николай Иванович Лобачевский (1793 – 1856)

János Bolyai (1802 – 1860)

Immanuel Kant (1724 – 1804), *Krytyka czystego rozumu*

Николай Иванович Лобачевский (1793 – 1856)

Kąt równoległości jest równy 2 arc ctg $e^{x/r}$.

János Bolyai (1802 – 1860)

Równoległą można skonstruować cyrklem i linijką.

Carl Gauss uogólnił geometrię sferyczną,
tworząc geometrię wewnętrzną powierzchni,
czyli teorię tego, co się nie zmienia,
gdy powierzchnię poddajemy deformacjom
niezmieniającym długości żadnej leżącej na niej krzywej.

Okazało się, że nie zmieniają się wtedy także
kąty między krzywymi
i pola obszarów na tej powierzchni leżacych.

I w ten sposób liczba różnych dwuwymiarowych geometrii
stała się właściwie nieskończona.

Carl Gauss uogólnił geometrię sferyczną,
tworząc geometrię wewnętrzną powierzchni,
czyli teorię tego, co się nie zmienia,
gdy powierzchnię poddajemy deformacjom
niezmieniającym długości żadnej leżącej na niej krzywej.

Okazało się, że nie zmieniają się wtedy także
kąty między krzywymi
i pola obszarów na tej powierzchni leżacych.

I w ten sposób liczba różnych dwuwymiarowych geometrii
stała się właściwie nieskończona.

Gauss udowodnił też theorema egregium, wskazujące jeszcze jedną
własność powierzchni należącą do geometrii wewnętrznej
– krzywiznę.

Krzywizna krzywej (w punkcie) to odwrotność promienia najlepiej udającego ją okręgu.

Krzywizna normalna powierzchni (w punkcie, w danym kierunku stycznym) to krzywizna przecięcia powierzchni płaszczyzną prostopadłą do jej płaszczyzny stycznej.

(Euler) Jeśli krzywizny normalne (w punkcie) nie są stałe, to przyjmują dwa ekstrema w kierunkach prostopadłych.

(Gauss) Theorema ergregium:
iloczyn ekstremalnych krzywizn normalnych należy do geometrii wewnętrznej.

Dziś nazywamy ten iloczyn krzywizną Gaussa.

(Gauss) $|ABC| \cdot K = -\Delta(ABC)$

(Lambert) Gdy krzywizna powierzchni jest równa $-1/R^2$, pole koła o promieniu r na tej powierzchni dane jest przez $2\pi(\cosh \frac{r}{R} - 1)R^2$.

(Gauss) $|ABC| \cdot K = -\Delta(ABC)$

(Lambert) Gdy krzywizna powierzchni jest równa $-1/R^2$, pole koła o promieniu r na tej powierzchni dane jest przez $2\pi(\cosh \frac{r}{R} - 1)R^2$.

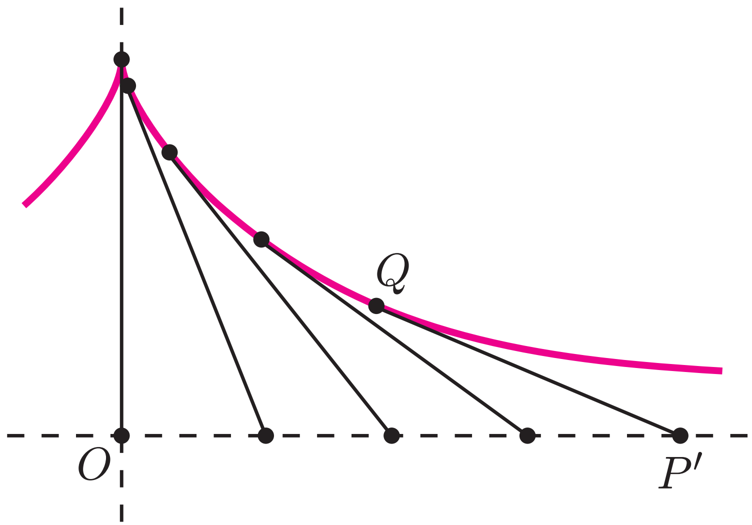
Porównując koła o tych samych promieniach $r > 0$ na powierzchniach o krzywiźnie 1, 0 i -1 mamy

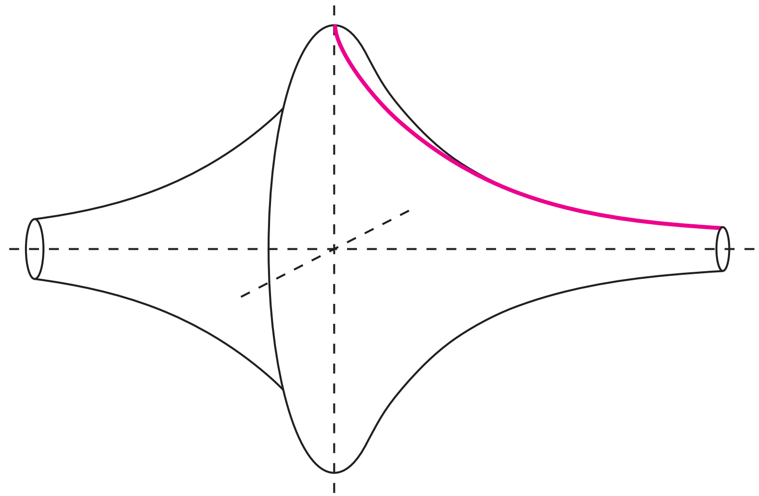
$$2\pi(1 - \cos r) < \pi r^2 < 2\pi(\cosh r - 1),$$

bo $\cos r = 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \frac{r^6}{6!} + \ldots$
a $\cosh r = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \ldots$

Tak więc, gdy krzywizna jest dodatnia, powierzchni jest mniej niż na zwykłej płaszczyźnie, a gdy jest ujemna – więcej.

Odpowiednikiem–przeciwstawieniem sfery,
powierzchnią o stałej krzywiznie ujemnej jest pseudosfera
powstająca przez obrót traktrysy.





Jej krzywizna to $|QP'|^2$.

Ma ona jednak punkty osobliwe.

Bernhard Riemann w wykładzie habilitacyjnym uogólnił teorię powierzchni Gaussa na dowolny skończony wymiar.

Rozmaitość: obiekt sklejony z “łatek” odpowiedniowymiarowej przestrzeni euklidesowej

plus dość dowolny iloczyn skalarny,
czyli zestaw współczynników w sumie $A \bullet B := \sum_{i,j} w_{i,j} a_i b_j$,
gdzie a_i i b_j to współrzędne punktów A i B rozmaitości;

żąda się by $A \bullet B = B \bullet A$, dla dowolnych A i B,
oraz by $A \bullet A \geq 0$.

Bernhard Riemann w wykładzie habilitacyjnym uogólnił teorię powierzchni Gaussa na dowolny skończony wymiar.

Rozmaitość: obiekt sklejony z “łatek” odpowiedniowymiarowej przestrzeni euklidesowej

plus dość dowolny iloczyn skalarny,
czyli zestaw współczynników w sumie $A \bullet B := \sum_{i,j} w_{i,j} a_i b_j$,
gdzie a_i i b_j to współrzędne punktów A i B rozmaitości;

żąda się by $A \bullet B = B \bullet A$, dla dowolnych A i B,
oraz by $A \bullet A \geq 0$.

Przykład: w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej
$w_{i,j}$ jest dla $i = j$ równe 1 i dla $i \neq j$ równe 0.

Iloczyn skalarny definiuje geometrię na rozmaitości:
długość wektora $\vec{v}$ to $|v| := \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$,
a cosinus kąta między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ to $\dfrac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}|}$.

Ale krzywiznę Gaussa trzeba już zdefiniować inaczej.

(Weingarten) Krzywizna Gaussa to stosunek pola odwzorowania sferycznego do pola danej powierzchni.

Odwzorowanie sfery to sfera jednostkowa, walca to okrąg, płaszczyzny to punkt, torusa to zbiór pusty itd.

W tak zdefiniowanej geometrii riemanowskiej zachowana jest zależność między krzywizną a ilością przestrzeni.

Daje to w Ogólnej Teorii Względności
utożsamienie masy i krzywizny:

krzywizna zmniejsza ilość przestrzeni,
czyli ściąga wszystko do siebie,
tak jak masa czyni to za pomocą grawitacji.

W ten sposób bardzo duża krzywizna definiuje również czarne dziury: krzywizna ściągnęła więcej przestrzeni niż jej było.

John Archibald Wheeler, *General Relativity*

Gdy uznamy, iż fizyka OTW

to tylko część praw rządzących światem,

możemy rozważyć jeszcze inny problem:
usytowanie naszego świata w nadprzestrzeniach
(teoria superstrun, supersymetrie itp.).

Tu jest np.

(Borsuk) n-wymiarową przestrzeń euklidesową
można izometrycznie wewnętrznie zanurzyć
w dowolnie małą kulkę
$(n+1)$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Gdy rozmaitością będzie półpłaszczyzna $x > 0$,

a iloczyn skalarny będzie dany przez
$w_{1,1} = w_{2,2} = 1/x^2$ i $w_{1,2} = w_{2,1} = 0$,

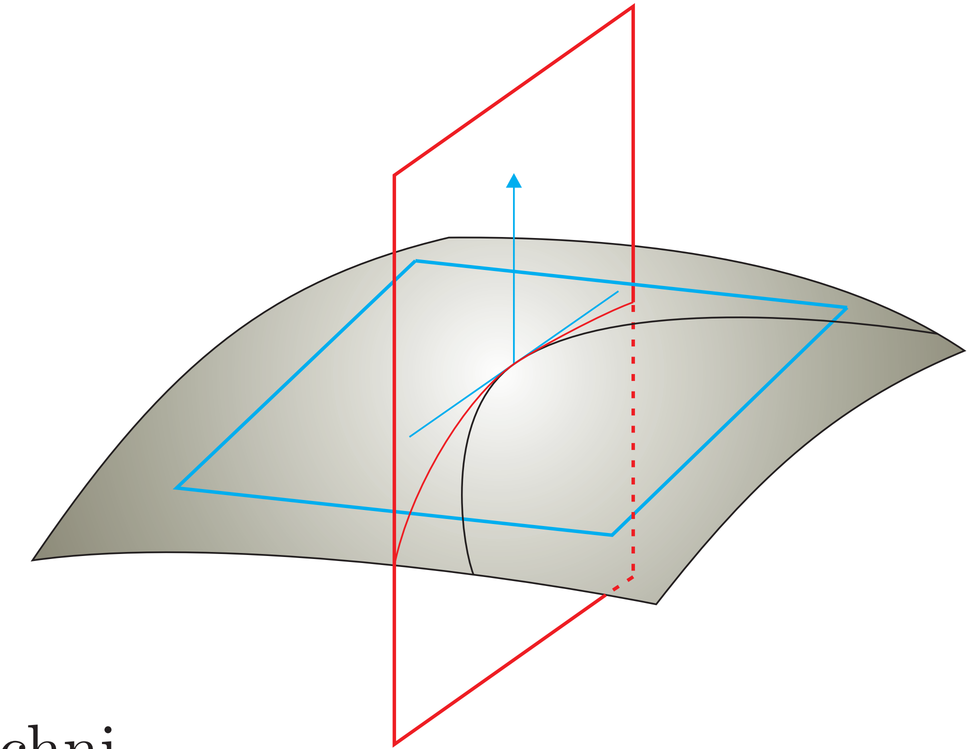
to otrzymamy geometrię Bolyaia–Łobaczewskiego,
zwaną również hiperboliczną.

Powstaje pytanie, jak w takim modelu wyglądają proste,

czyli, mówiąc językiem geometrii riemanowskiej, geodezyjne.

Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe,

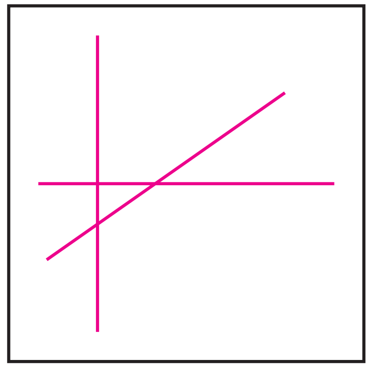


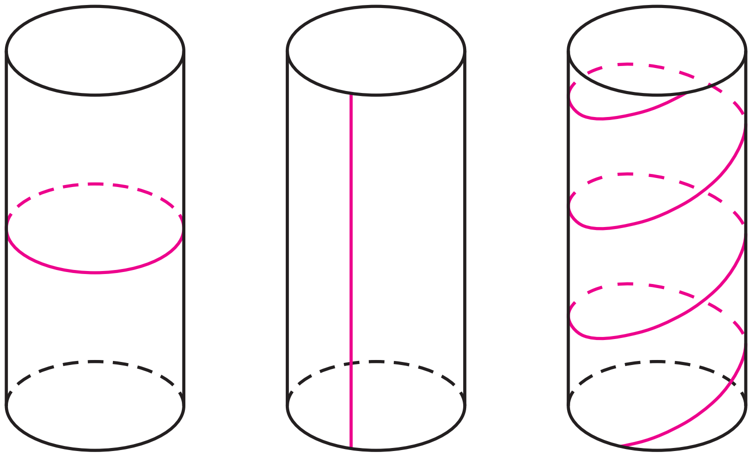
(Muesnier) Krzywizna krzywej na powierzchni zależy od krzywizny normalnej w następujący sposób:
$\kappa = \dfrac{\kappa_N}{\sin\alpha}$,
gdzie α jest kątem między płaszczyzną styczną do powierzchni i płaszczyzną ściśle styczną do krzywej.

Czyli geodezyjna ma krzywiznę równą krzywiźnie normalnej.

Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

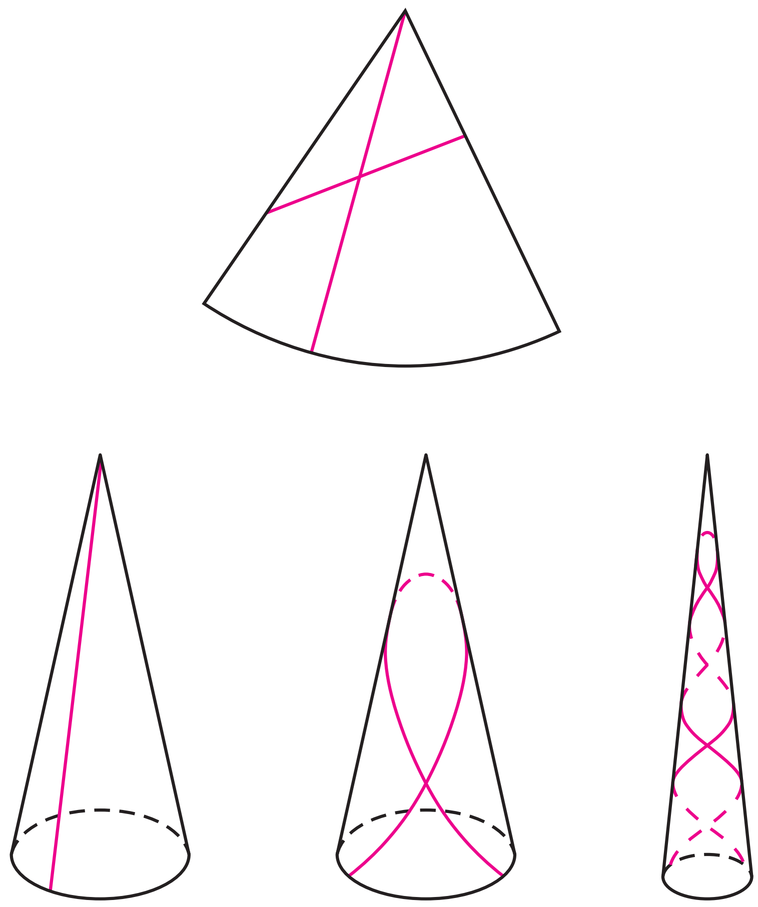
- najmniej krzywe,
- lokalnie najkrótsze;





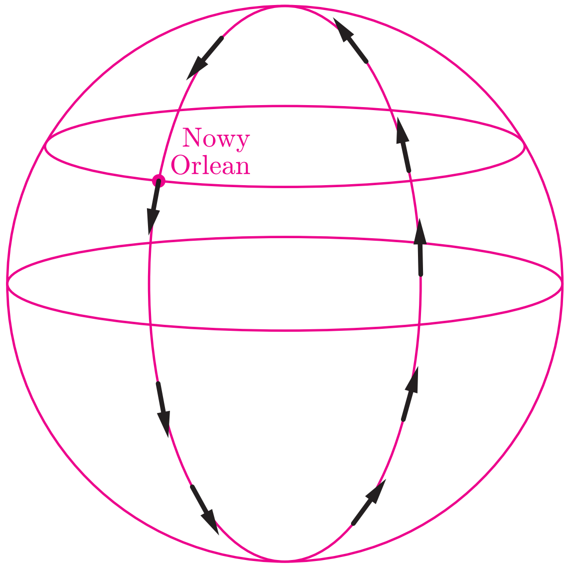
Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe,
- lokalnie najkrótsze;



Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe,
czyli ich krzywizna jest stale równa
krzywiźnie normalnej;
- lokalnie najkrótsze;
- frontalne.

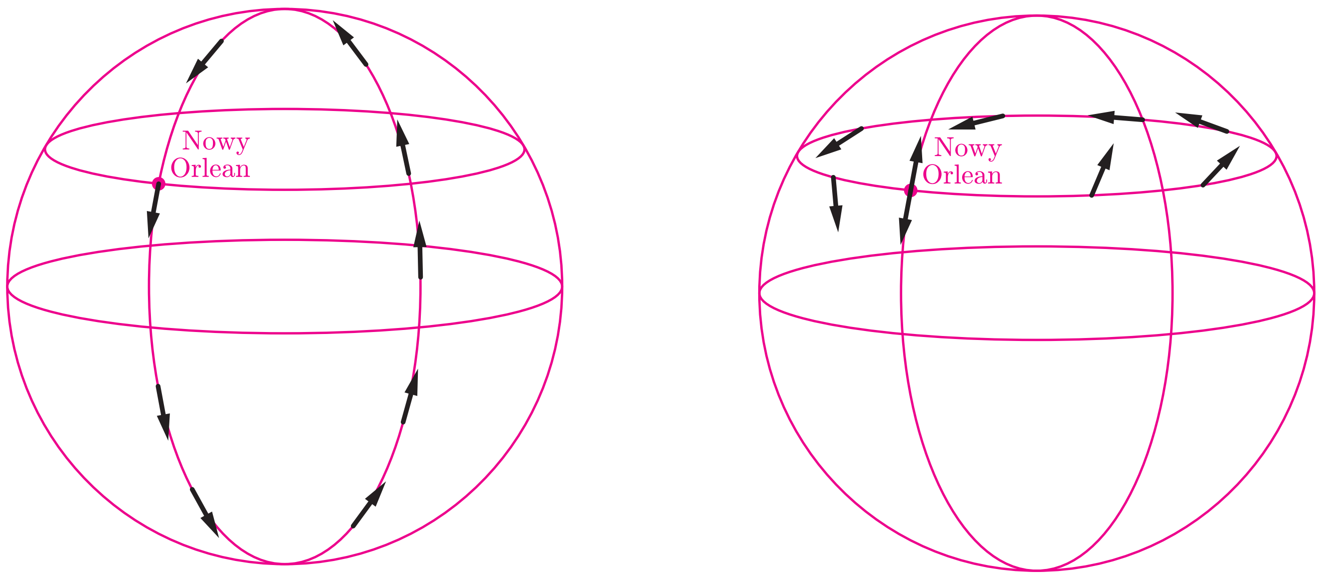


Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe,

czyli ich krzywizna jest stale równa
krzywiźnie normalnej;

- lokalnie najkrótsze;
- frontalne.



W przytoczonym modelu geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego

prostymi są półokręgi i proste prostopadłe
do brzegu półpłaszczyzny,

a odległość punktów A i B można obliczyć jako moduł logarytmu
z dwustosunku tych punktów i końców prostej na której leżą:

$$\left|\log\frac{|AP|\cdot|BQ|}{|AQ|\cdot|BP|}\right|,$$

gdzie $|XY|$ to euklidesowa odległość punktów modelu.

(Mickiewicz) ...takie widzi świata koło,

jakie tępymi zakreśla oczy...

(Klein) Geometrie lokalnie zgodne z daną geometrią
są jej geometriami ilorazowymi
w działaniu jednostajnie nieciągłych podgrup jej izometrii.

słownik

izometria = przekształcenie nie zmieniające odległości
grupa przekształceń = taki ich zbiór G, który zawiera identyczność,
jest zamknięty na złożenia
i dla każdego z G istnieje w G przekształcenie do niego odwrotne
podgrupa = część grupy będąca grupą
grupa jednostajnie nieciągła = złożona z przekształceń odrzucających
każdy niestały punkt co najmniej o z góry daną odległość
orbita = zbiór wszystkich obrazów punktu w przekształceniach z G
przestrzeń ilorazowa = przestrzeń orbit
metryka ilorazowa = minimum odległości punktów z orbit

(Klein) Istnieje pięć dwuwymiarowych rozmaitości,
na których możliwa jest geometria lokalnie euklidesowa:
płaszczyzna, walec, wstęga Moebiusa, torus, butelka Kleina,

przy czym odpowiednie grupy jednostajnie nieciągłe generują
identyczność, jedno przesunięcie, jedna symetria z poślizgiem, dwa przesunięcia o różnych kierunkach, jedna symetria z poślizgiem i jedno przesunięcie w innym kierunku.

Liczba tych geometrii jest różna:
1, 1, 1, dwa parametry rzeczywiste, jeden parametr rzeczywisty.

Warto zwrócić uwagę, że są
dwie możliwości dające geometrie nieorientowalne
i dwie dające geometrie ograniczone.

(Klein) Istnieją dwie rozmaitości, na których możliwa jest geometria o stałej krzywiźnie dodatniej
i nieskończenie wiele, na których można zrealizować geometrię o stałej krzywiźnie ujemnej.

Ponadto widomo, jakie możliwe są dwuwymiarowe rozmaitości i algorytm sprawdzenia, czy dane dwie rozmaitości są różne.

Ponadto na każdej dwuwymiarowej rozmaitości można zrealizować co najmniej jedną geometrię o stałej krzywiźnie.

Tej ostatniej własności nie mają rozmaitości wyżej wymiarowe.

Powstał też problem, jakie w ogóle są możliwe wysokowymiarowe rozmaitości.

(Andriej Markow, syn) Nie istnieje algorytm pozwalający sprawdzić, czy dane dwie rozmaitości wymiaru większego niż 3 są różne.

(Thurston) Na rozmaitościach trójwymiarowych możliwe jest tylko 8 różnych geometrii.

Hipoteza geometryzacyjna Każdą rozmaitość trójwymiarową można pociąć na takie kawałki,
że na każdym z nich będzie możliwa jakaś geometria.

Próby rozwiązania tych obu problemów
chirurgie, czyli zmiany dyskretne; potoki, czyli zmiany ciągłe

Григорий Яковлевич Перельман (ur. 1966) tą drugą metodą rozwiązał oba te problemy.

Astrofizycy dziś twierdzą, iż z ich badań wynika, iż "Wszechświat jest płaski", co oznacza, że Wszechświat OTW to fluktuacje rozmaitości o krzywiźnie zero.

Gdyby mieli rację, to Wszechświat byłby jedną z 18 możliwych rozmaitości, na których możliwa jest geometria euklidesowa, czyli byłby jedną z przestrzeni ilorazowych zwykłej trójwymiarowej przestrzeni.

Wśród nich jest jest 10 orientowalnych i 10 ograniczonych. Tych, które są jednocześnie i ograniczone i orientowalne jest 6 i one (tzw. małe wszechświaty) są obecnie najmodniejszym tematem badań.

Polecam Nikulin, Shafarevich, *Geometries and groups*, dostępne w sieci.

Warto zwrócić jeszcze uwagę na fakt, że
fragmenty jednej geometrii mogą prezentować inną,
tak jak powierzchnie w zwykłej przestrzeni euklidesowej.

$$
\begin{array}{lllllll}
\mathrm{Min}^n & & & \mathrm{Min}^5 & & \mathrm{Min}^4 & \\
\updownarrow & & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\mathrm{BL}^{n-1} & & & \mathrm{BL}^4 & & \mathrm{BL}^3 & \\
\updownarrow & & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\mathrm{M\ddot{o}}^{n-2} \sim \mathrm{Eucl}^{n-2} & & & \mathrm{M\ddot{o}}^3 \sim \mathrm{Eucl}^3 & & \mathrm{M\ddot{o}}^2 \sim \mathrm{Eucl}^2 & \\
\qquad\qquad\quad \updownarrow & & & \qquad\qquad \updownarrow & & \qquad\qquad \updownarrow & \\
\ldots\ldots \longleftrightarrow \mathrm{Ell}^{n-3} & \longleftrightarrow & \ldots\ldots\ldots \longleftrightarrow & \mathrm{Ell}^2 & \longleftrightarrow & \qquad \mathrm{Ell}^1 &
\end{array}
$$