

## Lista czworokątów $ABCD$ równoważnych przez rozkład z sześcianiem oraz parkietujących przestrzeń

Pierwsze czworokąty równoważne przez rozkład z sześcianiem wskazał M.J.M. Hill w 1896 roku. Są to te, które w tabeli oznaczono literą  $H$ .

Listę przedłużali O.Niccoletti (1914), D.M.Y. Sommerville (1923), J.P. Sydler (1943–65), M. Goldberg (1958–74), H.C. Lenhard.

Czworokąty  $H_i(\alpha)$  tworzą trzy rodziny mocy continuum, gdyż  $\alpha$  może być dowolną liczbą z przedziału  $(0, \pi)$ . Pozostałe 27 pozycji wypełniają pojedyncze czworokąty – liczby  $x, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \lambda, \mu, \nu, \phi, \psi$  są stałymi, których wartość podana jest przy pierwszym ich użyciu.

Problem przedłużenia tej listy jest otwarty, a wyniki są publikowalne.

\* \* \*

Mówimy, że wielokąt parkietuje przestrzeń, gdy można ją wypełnić dodatnio izometrycznymi kopiami tego wielokątu, które będą miały wspólne co najwyżej brzegi.

Wszystkie znane wielokąty parkietujące przestrzeń pochodzą z listy wielokątów równoważnych przez rozkład z sześcianiem. Wskazali je – oprócz wymienionych – jeszcze H.L. Davies (1965) i L. Baumgarten (1968–71).

Są to wszystkie czworokąty Hilla ( $H_i(\alpha)$ ) oraz  $T_0$  i  $T_{12}$  – w tabeli wyróżnione czerwienią.

Również lista tych czworokątów (jak widać bardzo krótka) jest otwarta, a jej poszerzenie byłoby znaczącym rezultatem.

krawędzie	długości	kąty dwusienne
$H_1(\alpha)$		
$AB$	$\sin \alpha$	$\alpha$
$AC$	$\sqrt{3} \cos \alpha$	$\pi/3$
$AD$	1	$\pi/2$
$BC$	1	$\pi/2$
$BD$	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$
$CD$	$\sin \alpha$	$\alpha$
$H_2(\alpha)$		
$AB$	$2 \sin \alpha$	$\alpha$
$AC$	$\sqrt{3} \cos \alpha$	$\pi/3$
$AD$	2	$\pi/2$
$BC$	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\pi - \arccos((1/2)\text{ctg}\alpha)$
$BD$	$2 \sin \alpha$	$(\pi/2) - \alpha$
$CD$	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\arccos((1/2)\text{ctg}\alpha)$
$H_3(\alpha)$		
$AB$	$2 \sin \alpha$	$\alpha$
$AC$	$\sqrt{12} \cos \alpha$	$\pi/6$
$AD$	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\pi - (\arccos((1/\sqrt{3}) \cos \alpha))$
$BC$	2	$\pi/2$
$BD$	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$
$CD$	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\pi - (\arccos((1/\sqrt{3}) \cos \alpha))$
$T_0$		
$AB$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AC$	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
$AD$	2	$\pi/4$
$BC$	1	$\pi/2$
$BD$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$CD$	$\sqrt{2}$	$\pi/2$

krawędzie	długości	kąty dwusienne
$T_1$		
$AB$	$x := \sqrt{5}/2$	$\pi/2$
$AC$	$1/x$	$\pi/2$
$AD$	1	$\pi/2$
$BC$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$BD$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
$CD$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$2\pi/5$
$T_2$		
$AB$	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$
$AC$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
$AD$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
$BC$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
$BD$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
$CD$	2	$\pi/2$
$T_3$		
$AB$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
$AC$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AD$	2	$\pi/2$
$BC$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$3\pi/5$
$BD$	$\sqrt{3}/x$	$\pi/3$
$CD$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x^3}$	$2\pi/5$
$T_4$		
$AB$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x^3}$	$\pi/5$
$AC$	$\sqrt{3}x$	$\pi/3$
$AD$	2	$\pi/2$
$BC$	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
$BD$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$CD$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$3\pi/5$

krawędzie	długości	kąty dwusienne
$T_5$		
AB	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$2\pi/5$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
AD	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
BC	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$2\pi/5$
BD	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
CD	$2/x$	$\pi/2$
$T_6$		
AB	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$4\pi/5$
AC	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
AD	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
BC	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
BD	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
CD	$2x$	$\pi/2$
$T_7$		
AB	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
AD	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
BC	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$\pi/5$
BD	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
CD	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
$T_8$		
AB	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
AD	$\sqrt{7}/2$	$\beta := \arctg\sqrt{7/5}$
BC	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
BD	$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
CD	$\sqrt{7}/2$	$\pi - \beta$
$T_9$		
AB	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/5$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
AD	$\sqrt[4]{5}/(2\sqrt{x})$	$\pi/5$
BC	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/10$
BD	$\sqrt{7+3x}/2$	$\gamma := \arctg\sqrt{9-2\sqrt{5}}$
CD	$\sqrt{7+3x}/2$	$\pi - \gamma$
$T_{10}$		
AB	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/10$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
AD	$\sqrt{7-3x}/2$	$\delta := \arctg\sqrt{9+2\sqrt{5}}$
BC	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/5$
BD	$\sqrt{3-3x}/2$	$\pi - \delta$
CD	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}/2$	$3\pi/5$
$T_{11}$		
AB	$\sqrt[4]{5}\sqrt{x}$	$3\pi/10$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
AD	1	$\epsilon := \pi - \arctg 2x^2$
BC	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{x}$	$\pi/10$
BD	1	$\zeta := \pi - \arctg 2$
CD	1	$2\pi - \epsilon - \zeta$
$T_{12}$		
AB	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
AC	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
AD	$\sqrt{5}/2$	$\theta := \pi - \arccos 2/3$
BC	2	$\pi/4$
BD	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \theta/2$
CD	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \theta/2$

krawędzie	długości	kąty dwusienne
$T_{13}$		
AB	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
AC	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
AD	$2/x$	$\pi/2$
BC	$2/x$	$\pi/2$
BD	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
CD	$\sqrt{18-11x}$	$3\pi/5$
$T_{14}$		
AB	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
AC	$2\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
AD	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$
BC	$\sqrt{7+3x}/x^2$	$\pi - \gamma$
BD	$\sqrt{7+3x}/x^2$	$\gamma$
CD	$2\sqrt{18-11x}$	$3\pi/10$
$T_{15}$		
AB	$2\sqrt{2+x}$	$\pi/10$
AC	$2\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
AD	$\sqrt{10-3x}$	$\pi - \delta$
BC	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$
BD	$\sqrt{10-3x}$	$\delta$
CD	$\sqrt{18-11x}$	$3\pi/5$
$T_{16}$		
AB	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
AC	$x\sqrt{3}$	$\pi/3$
AD	$2x$	$\pi/2$
BC	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$
BD	$\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
CD	$\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
$T_{17}$		
AB	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
AC	$x\sqrt{3}$	$\pi/3$
AD	2	$\pi/2$
BC	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
BD	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3$
CD	$\sqrt{3-x}$	$2\pi/5$
$T_{18}$		
AB	$\sqrt{7-4x}$	$\pi/5$
AC	$\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
AD	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3$
BC	$\sqrt{6-3x}$	$2\pi/3$
BD	$\sqrt{3/x^2}$	$\pi/3$
CD	$\sqrt{7-4x}$	$\pi/5$
$T_{19}$		
AB	$2\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/6$
AC	$2\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
AD	$\sqrt{10-3x}$	$\pi - \lambda$
BC	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$
BD	$\sqrt{10-3x}$	$\lambda := \arccos(x^2/(2\sqrt{3}))$
CD	$\sqrt{2+x}$	$\pi/5$
$T_{20}$		
AB	$2\sqrt{2+x}$	$\pi/10$
AC	$2\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
AD	$\sqrt{6}$	$\pi - \mu$
BC	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$
BD	$\sqrt{6+x}$	$\mu := \arccos(x^{3/2}/(2\sqrt[4]{5}))$
CD	$\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/3$

krawędzie	długości	kąty dwusienne
$T_{21}$		
$AB$	$\sqrt{3-x}$	$\pi/5$
$AC$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AD$	$\sqrt{3-x}$	$3\pi/2$
$BC$	$\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
$BD$	$\sqrt{5}-1$	$\pi/2$
$CD$	$\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/3$
$T_{22}$		
$AB$	$x\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AC$	$2\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AD$	$2\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
$BC$	$\sqrt{7-x}$	$\pi-\nu$
$BD$	$\sqrt{7-x}$	$\nu := \arctg\sqrt{11+6x}$
$CD$	$2\sqrt{3-x}$	$3\pi/10$
$T_{23}$		
$AB$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AC$	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
$AD$	$\sqrt{3-x}$	$2\pi/5$
$BC$	$\sqrt{3-x}$	$2\pi/5$
$BD$	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
$CD$	$\sqrt{7-4x}$	$3\pi/5$

krawędzie	długości	kąty dwusienne
$T_{24}$		
$AB$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
$AC$	$\sqrt{6-3x}$	$\pi/3$
$AD$	$\sqrt{11-4x}/2$	$\pi-\phi$
$BC$	$\sqrt{3-x}$	$\pi/2$
$BD$	$\sqrt{11-4x}/2$	$\phi := \arccos(1/(2\sqrt{3x^2}))$
$CD$	$\sqrt{7-4x}/2$	$3\pi/5$
$T_{25}$		
$AB$	$\sqrt{6-3x}$	$\psi := \arctg\sqrt{3/5}$
$AC$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$AD$	$\sqrt{2-2x}$	$\pi/2$
$BC$	$\sqrt{3-x}$	$3\pi/5$
$BD$	$\sqrt{6-3x}$	$(2\pi/3)-\psi$
$CD$	$\sqrt{7-4x}$	$\pi/5$
$T_{26}$		
$AB$	$\sqrt{3}$	$(\pi/3)-\psi$
$AC$	$\sqrt{3}$	$\psi$
$AD$	$\sqrt{3-x}$	$4\pi/5$
$BC$	$2\sqrt{2}$	$\pi/2$
$BD$	$\sqrt{2+x}$	$2\pi/5$
$CD$	$\sqrt{3}(x-1)$	$\pi/3$