Jak powstały wszystko opisujące liczby

Pierwszy etap pitagoreizmu głosił hasło *wszystko jest liczbą*: pożądaną Harmonię Świata da się wyrazić jako stosunek liczb (dziś nazywanych naturalnymi), przy czym jest ona tym pełniejsza, im liczby te są mniejsze.

Wykrycie, iż stosunek przekątnej kwadratu do jego boku nie da się opisać w ten sposób, spowodował kryzys, w którego wyniku od kultu liczb odstąpiono (*liczby zostawmy kupczykom*), wiążąc Harmonię z proporcjami geometrycznymi i złotą proporcję wynosząc na ołtarze. Ten drugi etap pitagoreizmu ukształtował geometrię naszej cywilizacji w kształcie, jaki ma ona do dziś.

Ale owe lękliwe porzucenie liczb nie mogło podobać się ambitnym uczniom Akademii Platońskiej. I faktycznie je przełamali. Stworzyli w tym celu pierwszą w dziejach teorię aksjomatyczną – była to *teoria wielkości jednego rodzaju*. Oto jej aksjomaty:
- *Wielkości jednego rodzaju dają się porównać* (a więc mamy zawsze $A > B$, $A = B$ lub $A < B$);
- *Dla dwóch wielkości jednego rodzaju istnieje wielkość tegoż rodzaju, będąca ich sumą*;
- *Istnieje wielkość uzupełniająca mniejszą z wielkości do większej*;
- *Wielkość można n-krotnie zwielokrotnić dla każdego naturalnego n*;
- *Dowolną wielkość A można zwielokrotnić tak, by okazała się większa od z góry danej wielkości B*,

ten ostatni warunek został później nazwany *aksjomatem Archimedesa*.

Dalej pomysły poszły już dwiema, zdecydowanie odmiennymi, drogami.

Bohaterowie tej opowieści żyli sto lat przed Euklidesem i 250 lat przed Archimedesem.

Teajtetos (−410; −368) stworzył to, co dziś nazywamy algorytmem Euklidesa. Mianowicie stwierdził, że stosunek dwóch wielkości jednego rodzaju można opisać za pomocą poniższej procedury:

$$A = n_0 \cdot B + R_1,$$
$$B = n_1 \cdot R_1 + R_2,$$
$$R_1 = n_2 \cdot R_2 + R_3,$$
$$R_2 = n_3 \cdot R_3 + R_4,$$
$$R_3 = n_4 \cdot R_4 + R_5$$
$$\ldots$$

na przykład, gdy wielkości są liczbami:

$$1517 = 1 \cdot 1073 + 444,$$
$$1073 = 2 \cdot 444 + 185,$$
$$444 = 2 \cdot 185 + 74,$$
$$185 = 2 \cdot 74 + 37,$$
$$74 = 2 \cdot 37.$$

W przypadku stosowania algorytmu Euklidesa do liczb naturalnych ostatnia niezerowa reszta to największy wspólny dzielnik poddanych temu algorytmowi liczb – po natrafieniu na jakikolwiek wspólny dzielnik algorytm zatrzymałby się.
Jeśli natomiast przedstawiony obok rachunek napiszemy od końca, otrzymamy
$37 = 185 - 2 \cdot 74 =$
$= 185 - 2(444 - 2 \cdot 185) =$
$= 5 \cdot 185 - 2 \cdot 444 =$
$= 5(1073 - 2 \cdot 444) - 2 \cdot 444 =$
$= 5 \cdot 1073 - 12(1517 - 1073) =$
$= 17 \cdot 1073 - 12 \cdot 1517$
(faktycznie to $18241 - 18204$).
Czytelnik Uważny zobaczy w tym rozumowaniu dowód, że
dla dowolnych liczb naturalnych n i m istnieją takie liczby całkowite a i b, że $a \cdot n + b \cdot m = \mathrm{NWD}(n, m)$.

Procedura ta czasami się kończy (w przypadku liczb naturalnych zawsze), a czasami nie (przykłady dalej). Zawsze natomiast zamienia stosunek wielkości A/B na specyficzny ciąg liczb naturalnych $(n_0; n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots)$ zwany *ułamkiem ciągłym* lub *łańcuchowym*. Przecinki w tym zapisie są niezbędne, gdyż – jak zapewne zauważy Czytelnik Skrupulatny – na każdym miejscu pojawić się może dowolnie wielka liczba.

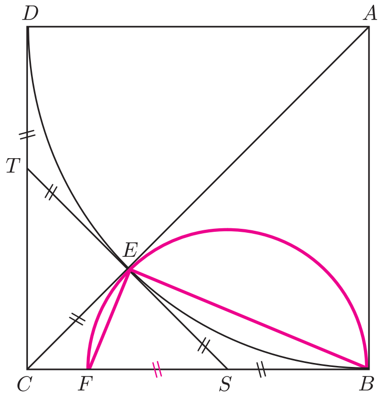
Tak można wyrazić stosunek dowolnych dwóch wielkości jednego rodzaju (np. długości, ciężaru, pola powierzchni itp.), a więc każdą (dodatnią) liczbę rzeczywistą.

W przykładzie liczbowym będzie to (1; 2, 2, 2, 2), czasami zapisywane pretensjonalnie jako

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Zapis taki jest przydatny (jak będzie widać dalej), a powstaje on z inaczej zapisanego algorytmu Euklidesa: wyłączmy całości, resztę (mniejszą wobec tego od 1) odwracamy, wyłączamy całości, resztę odwracamy, wyłączamy i tak dalej. Widać to obok.

$$\frac{1517}{1073} = 1 + \frac{444}{1073} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1073}{444}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{185}{444}} =$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{444}{185}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{185}{74}}} =$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{74}{36}}}}}.$$



Zobaczmy, jak to działa w tym najbardziej wówczas nerwowym punkcie – w przypadku stosunku przekątnej kwadratu do jego boku. Narysujmy ćwiartkę okręgu o środku A i promieniu AB (rysunek), a następnie styczną do niego w punkcie E. Jak łatwo zauważyć, powstało pięć odcinków równej długości (AS, SE, ET, TD i EC). Gdy narysujemy półokrąg o środku S i promieniu SB, powstanie jeszcze jeden odcinek o tej długości: SF. Ponadto ten półokrąg jest styczny do AC, bo $ST \perp AC$. Przystąpmy teraz do rachunków.

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{CE}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{CE}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CE}{AB}}.$$

Wyjaśnienia wymaga jedynie ostatnia z równości. Bierze się ona stąd, że trójkąty BCE i ECF są podobne (kąt przy wierzchołku C jest wspólny, a $\angle CBE = \angle CEB$ jako kąt wpisany i dopisany oparte na łuku EF).

Z przeprowadzonego rachunku wynika, że sytuacja będzie się powtarzać bez końca, a więc stosunek przekątnej kwadratu do jego boku to ułamek łańcuchowy zaczynający się od 1 i mający następnie nieskończony ciąg dwójek, co zapisuje się $(1; \overline{2})$.

Oczywiście (żyjąc ponad dwa tysiące lat później) możemy to zrealizować inaczej, rozwijając $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} \quad \text{itd.}$$

Ułamki łańcuchowe były przyjęte bardzo sympatycznie, bo nawiązywały do opisu Harmonii przez liczby naturalne – najbardziej harmoniczna była złota proporcja, gdyż opisywały ją same jedynki $(1; \overline{1})$:

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad \text{itd.}$$

Oto inne przykłady rozwinięć w ułamki łańcuchowe:
$\sqrt{3} = (1;\ \overline{1,\ 2})$
$\pi = (3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1, \ldots)$
$e = (1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 8,\ 1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1,\ 12,\ 1,\ 1,$ i widać, jak dalej)

Przykład problemu otwartego: nie wiemy, czy liczby występujące w rozwinięciu łańcuchowym $\sqrt[3]{2}$ są ograniczone.

Ułamki łańcuchowe mają szereg interesujących własności, np.:
– jak można było zauważyć z przykładu liczbowego, liczby wymierne rozwijają się w ułamki skończone;
– ułamki okresowe opisują pierwiastki równań kwadratowych o współczynnikach wymiernych;
– pierwiastki kwadratowe z liczb wymiernych rozwijają się w ułamki w pewnym stopniu symetryczne, a mianowicie postaci $(a;\ \overline{b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_3,\ b_2,\ b_1, 2a})$; ponieważ to dziwne, rozpatrzmy dwa przykłady.
Dla ułamka $(2;\ \overline{2,\ 4})$ oznaczmy $(0;\ \overline{2,\ 4})$ przez $1/y$, wówczas

$$y = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}} = 2 + \frac{y}{4y + 1} = \frac{9y + 2}{4y + 1}, \quad \text{czyli } 4y^2 - 8y - 2 = 0.$$

wobec tego

$$y = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \quad \text{i} \quad (2;\ \overline{2,\ 4}) = 2 + \frac{1}{y} = 2 + \frac{2}{2 + \sqrt{6}} = 2 + \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{2} = \sqrt{6}.$$

Dla $t = (2;\ \overline{1,\ 3,\ 1,\ 4})$ mamy

$$t - 2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (t - 2)}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\left(\frac{t + 3}{t + 2}\right)}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{4t + 11}{t + 3}\right)}} = \frac{4t + 11}{5t + 14}, \quad \text{czyli}$$

$(t - 2)(5t + 14) = 4t + 11$, a więc $5t^2 + 4t - 28 = 4t + 11$ i ostatecznie $t = \sqrt{\frac{39}{5}}$.

Poważniejszą własność ułamków łańcuchowych odkrył w XVIII wieku Lagrange: *redukt ułamka łańcuchowego liczby n jest jej najlepszym wymiernym przybliżeniem.*
Sformułowanie to wymaga objaśnienia terminu *najmniejsze wymierne przybliżenie*, niezgodnego z naszymi przyzwyczajeniami językowymi. Otóż jest to takie przybliżenie wymierne, że lepsze od niego musi mieć większy mianownik.

Tak więc z podanego przy algorytmie Euklidesa przykładu liczbowego wynika, że jednym z najlepszych przybliżeń wymiernych $\sqrt{2}$ jest $41/29$ (to skrócone $1517/1073$), ale też $3/2$, $7/5$ czy $17/12$.

Warto przy tym zwrócić uwagę, że pojawienie się w rozwinięciu łańcuchowym dużej liczby wskazuje na to, że zaczynajacy się od niej „ogon" już niewiele wnosi. Zobaczmy to dla π.

$$\pi : \qquad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}} = 3+\frac{16}{7\cdot 16+1} = 3\frac{16}{113} \qquad \left(=3,1415929\ldots\right)$$

Skoro propozycja opisania liczb rzeczywistych za pomocą ułamków łańcuchowych jest tak atrakcyjna, to czemu uczymy się zupełnie innego sposobu patrzenia na nie?

Jakąś częścią odpowiedzi jest fakt, że była też inna propozycja, przedstawiona przez Eudoksosa (-408; -355). On nie przedstawiał proporcji wielkości jednego rodzaju za pomocą ciągu liczb naturalnych, lecz opisywał ją poprzez jej dolne i górne przybliżenia wymierne. A robił to tak.

Proporcja wielkości jednego rodzaju A i B jest równa proporcji wielkości jednego (ale możliwe, że zupełnie innego) rodzaju α i β, gdy dla dowolnych liczb naturalnych n i m zachodzą warunki:
jeśli $n\cdot A > m\cdot B$, to $n\cdot\alpha > m\cdot\beta$;
jeśli $n\cdot A = m\cdot B$, to $n\cdot\alpha = m\cdot\beta$;
jeśli $n\cdot A < m\cdot B$, to $n\cdot\alpha < m\cdot\beta$.

A gdzie tu są zapowiadane przybliżenia wymierne? Popatrzmy na to tak, zakładając przez chwilę, że zachodzi pierwsza sytuacja:

$$\text{jeśli } \frac{A}{B} > \frac{m}{n}, \text{ to } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{m}{n},$$

zatem A/B, jak i α/β mają takie same wymierne przybliżenia dolne.

Trzeci przypadek wskazuje, że A/B i α/β mają te same przybliżenia górne.

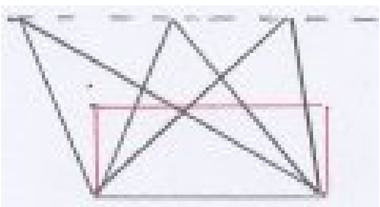
Łącznie więc proporcja jest wyznaczona przez zbiór wszystkich swoich wymiernych przybliżeń dolnych i przybliżeń górnych. Coś takiego nazywamy dziś przekrojem Dedekinda i to jest obowiązujący od stuleci sposób uprawiania liczb rzeczywistych.

Nazwisko Dedekinda stało się nazwą utożsamienia podziału liczb wymiernych na dwie części o tej własności, że każda liczba w jednej z nich jest mniejsza od każdej liczby w drugiej, dlatego, że podczas gdy Eudoksos mówił, że każda proporcja, czyli liczba, to przekrój liczb wymiernych, Dedekind dodał: i każdy przekrój to liczba. Tym sposobem pojawiło się wiele liczb, o jakich matematycy nie mieli pojęcia. Okazało się wręcz, że liczby praktycznie stosowane przez matematyków to tylko dająca się zaniedbać mniejszość.

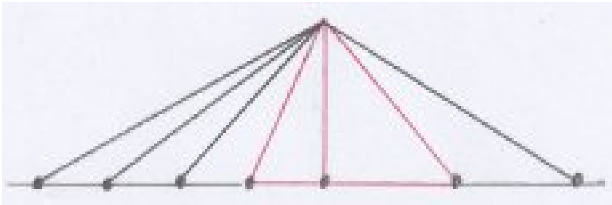
Dziś może nam być trudno wyobrazić sobie świat bez – niejako danych od urodzenia – liczb rzeczywistych. Wyobraźmy sobie jednak, że ich nie ma, i wykażmy za Euklidesem (VI ksiega *Elementów*) posługując się definicją Eudoksosa, że

stosunek pól dwóch trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi ich podstaw (pamietajmy, że pola i odcinki to są wielkości różnych rodzajów).

Najpierw spostrzeżenie pomocnicze: *pola trójkątów o równyh wysokościach i podstawach są równe* – dowodzi sie tego nożyczkami, rozcinając każdy taki trójkąt na trzy części i składając z nich prostokąt o jednym boku równym podstawie, a drugim – połowie wysokości.



Skoro tak, to możemy dwa trójkąty, o których mówi twierdzenie, narysować jako prostokatne. I możemy je zestawić tak, aby ich równe (bo równe wspólnej wysokości) przyprostokątne) pokryły się.



Teraz odkładamy n razy w lewo podstawę lewego trójkata i m razy w prawo podstawę prawego trójkąta. Otrzymane punkty łączymy z górnym wierzchołkiem wspólnej przyprostokątnej, otrzymując na lewo n trójkątów o polach równych lewemu czerwonemu trójkątowi, a na prawo m trójkątów o polach równych czerwonemu prawemu trójkątowi (tu $n = 4,\ m = 2$).

Gdy złożymy rysunek wzdłuż wspólnej przyprostokątnej czerwonych to trójkątów n-krotna lewa podstawa będzie większa od m-krotnej prawej wtedy i tylko wtedy, gdy n-krotne lewe pole będzie większe od m-krotnego pola prawego.

⋆ ⋆ ⋆

Wynalazek liczb rzeczywistych to, zdaniem wielu, największy wynalazek matematyczny wszech czasów. Nad pomysłem Eudoksosa rozpływali się w zachwycie zwłaszcza Archimedes i – wiele lat później – Newton. Ten ostatni swój podziw wyrażał, podkreślając, że nie jest możliwe podzielenie rozciągłości w przestrzeni przez rozciągłość w czasie, bo tu zupełnie inne rzeczy – jest natomiast możliwe podzielenie liczby mierzącej rozciągłość w przestrzeni przez liczbę mierzącą rozciągłość w czasie – bo to takie same liczby! W wyniku dzielenia otrzymamy wówczas liczbę, której znaczenie (w tym przypadku zapewne prędkość) musimy ustalić.

Tak więc liczby rzeczywiste pozwoliły na zastosowanie matematyki do wszelkich zjawisk, bo każde z nich opisujemy tymi samymi liczbami (co faktycznie w koncepcji Eudoksosa lepiej widać).

Istnieje jeszcze jeden powód, który mógł spowodować „wygraną” koncepcji Eudoksosa. Podał on bowiem bardzo piękny sposób mierzenia zwany całką Eudoksosa, całkowaniem Starożytnych bądź metodą wyczerpywania, która służyła matematykom aż do XVI wieku. Ale to już inna historia.