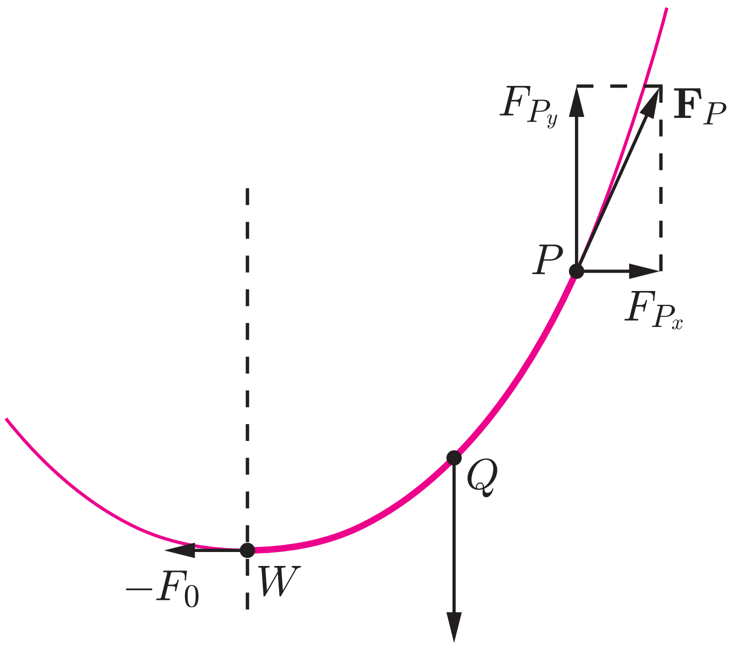
Krzywa łańcuchowa

Metoda, za pomocą której Jakub Bernoulli opisał, jaki kształt przyjmuje pod wpływem grawitacji zawieszony na pionowej ścianie łańcuch, stała się wzorcowa zarówno dla powstającego rachunku wariacyjnego, jak też klasycznej geometrii różniczkowej.

Metoda, za pomocą której Jakub Bernoulli opisał, jaki kształt przyjmuje pod wpływem grawitacji zawieszony na pionowej ścianie łańcuch, stała się wzorcowa zarówno dla powstającego rachunku wariacyjnego, jak też klasycznej geometrii różniczkowej.



Rozważmy kawałek łańcucha, od jego najniższego punktu (W – wierzchołek) do jakiegoś punktu P.

W najniższym punkcie łańcuch ciągnie w prawo (oznaczmy tę siłę F_0).

Aby wszystko pozostało na miejscu w P musi działać jakaś siła utrzymująca *status quo* (F_P).

Jej pozioma składowa równoważy siłę działającą w wierzchołku, a składowa pionowa – ciężar łańcucha ($Q = \rho \cdot s$, gdzie ρ to ciężar właściwy materii łańcucha, a s jego długość od W do P).

Dla uproszczenia rachunków umawiamy się, że $F_{P_x} = F_0 = \rho \cdot a$.

Rewelacyjny pomysł Jakuba Bernoulliego to potraktowanie krzywej, niezależnie od jej pochodzenia, jako toru ruchu, na dodatek odbywającego się ze stałą szybkością 1.
Tak uzyskany obiekt matematyczny to przedstawienie parametryczne, na dodatek normalne (to ta jednostkowa szybkość) – dawniej używano też nazwy wektorfunkcja.

Przyjmując tę konwencję mamy do czynienia z ruchomym punktem $(x(s),\, y(s))$, a jego prędkość to, oczywiście, $(x'(s),\, y'(s))$ (na obrazku tę prędkość oznaczyliśmy F_P). To wszystko, co tam oglądaliśmy daje nam równość $\dfrac{y'(s)}{x'(s)} = \dfrac{\rho \cdot s}{\rho \cdot a} = \dfrac{s}{a}$.
Warunek stałej szybkości daje drugie równanie: $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$.

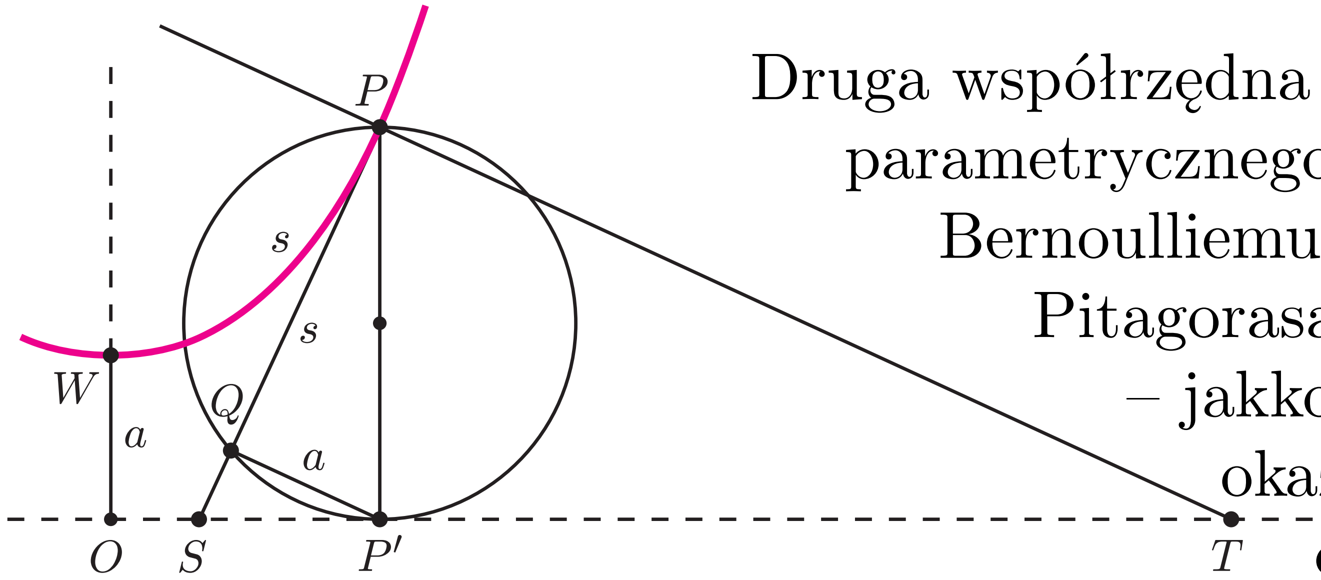
Te dwa równania to razem zwykłe równanie kwadratowe o prostym rozwiązaniu $\vec{v} = (x',\, y') = \left(\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}},\, \dfrac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right)$.

Gdy znamy wektor prędkości, możemy (ponoć bez trudu) znaleźć tor ruchu – wystarczy scałkować współrzędne.
W naszym prostym przypadku nie jest to jednak całkiem proste, a wynikiem jest $(x(s),\, y(s)) = \left(a \ln \dfrac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a},\ \sqrt{s^2 + a^2}\right)$.

Trudno w to uwierzyć, ale gdy zechcemy za pomocą tego okropnego x obliczyć proste y, to otrzymamy $y = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{2}$, co jest lepiej znane jako $a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

Otrzymaliśmy więc zarówno przedstawienie parametryczne, jak i równanie krzywej łańcuchowej.

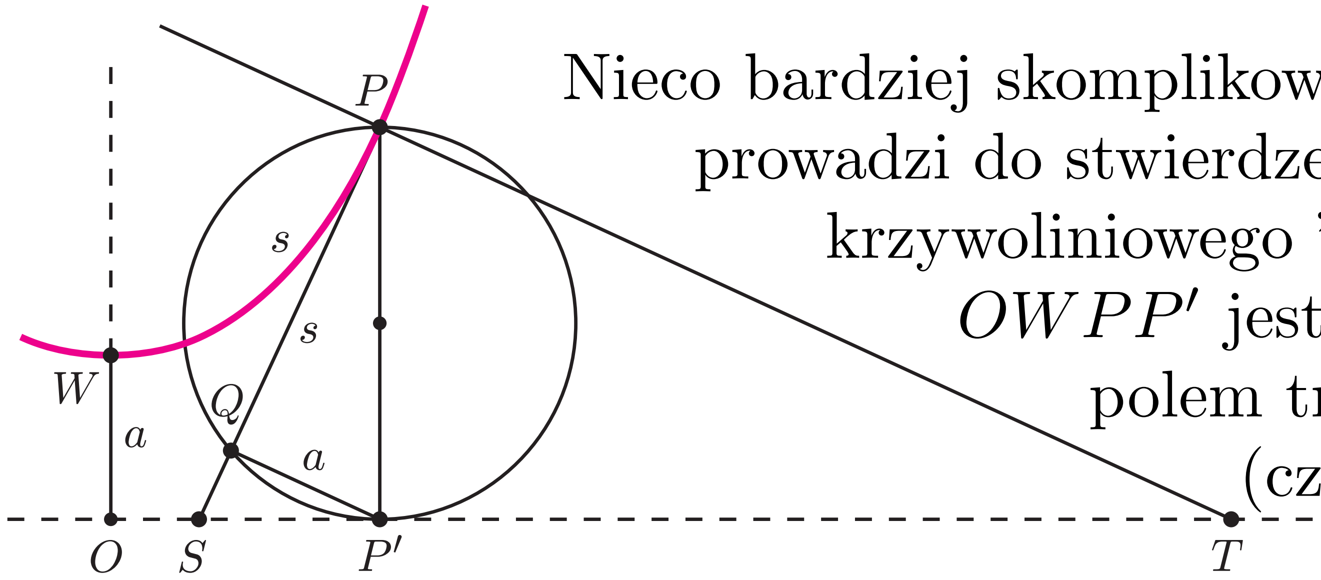
Jeszcze trudniej uwierzyć, że z jej przedstawienia parametrycznego wynika wiele zaskakujących geometrycznych wniosków.



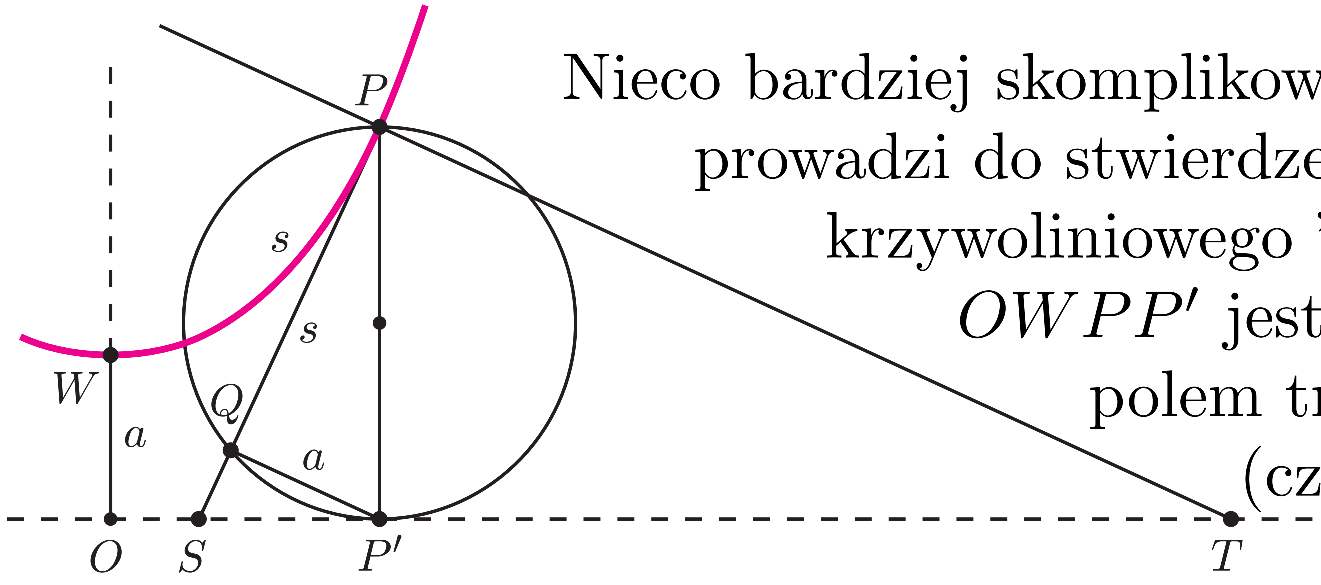
Druga współrzędna przedstawienia parametrycznego skojarzyła się Bernoulliemu z twierdzeniem Pitagorasa, co – jakkolwiek proste – okazało się bardzo owocne.

Narysujmy bowiem okrąg, który jest styczny do osi x-ów (punkt P'), a którego drugi koniec średnicy jest w punkcie P – długość odcinka PP' to druga współrzędna punktu P, czyli $\sqrt{s^2 + a^2}$. Jeśli zatem poprowadzimy cięciwę $P'Q$ o długości a, to odcinek PQ będzie miał długość s.

Tak więc, gdy mamy narysowaną krzywą łańcuchową, możemy za pomocą cyrkla i linijki przeprowadzić jej rektyfikację (a więc znaleźć odcinek równy jej długości) – przecież s to długość krzywej łańcuchowej od W do P.



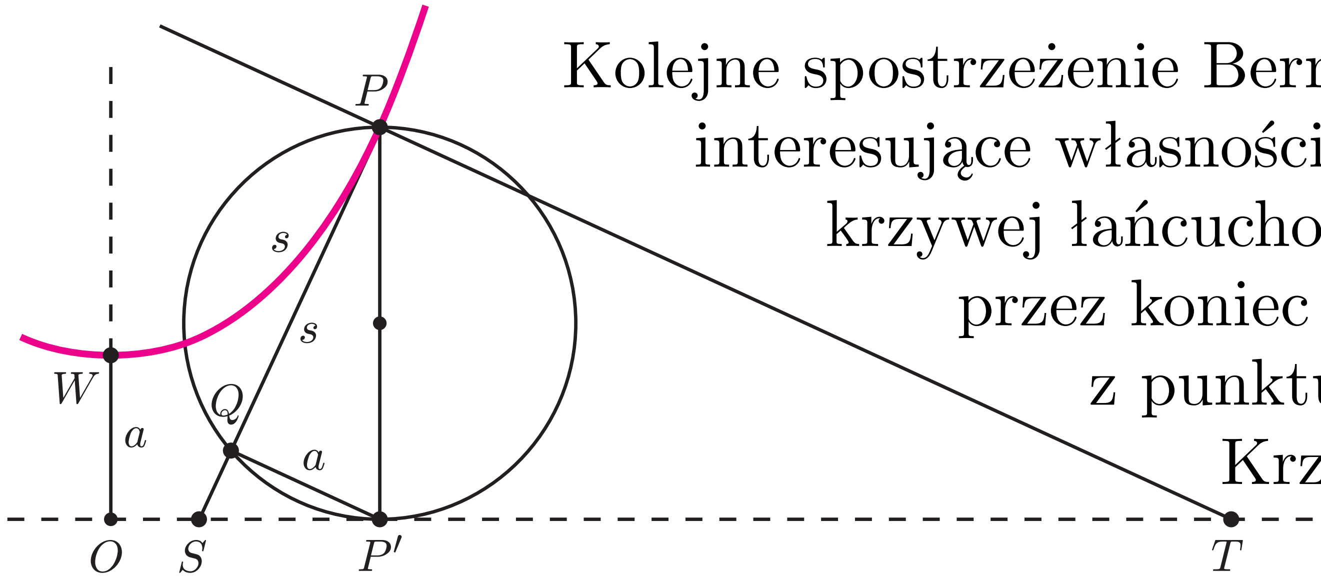
Nieco bardziej skomplikowane rozumowanie prowadzi do stwierdzenia, że pole krzywoliniowego ”czworokąta” $OWPP'$ jest podwojonym polem trójkąta QPP' (czyli wynosi as) – zatem cyrklem i linijką można też wykonać kwadraturę (a więc znaleźć wielokąt o tym samym polu) krzywej łańcuchowej.



Nieco bardziej skomplikowane rozumowanie prowadzi do stwierdzenia, że pole krzywoliniowego "czworokąta" $OWPP'$ jest podwojonym polem trójkąta QPP' (czyli wynosi as) – zatem cyrklem i linijką można też wykonać kwadraturę (a więc znaleźć wielokąt o tym samym polu) krzywej łańcuchowej.

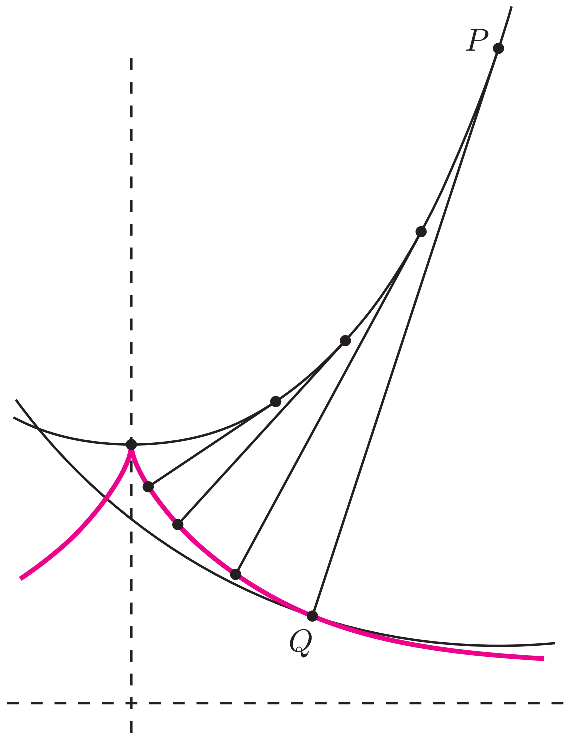
Podobnie cyrklem i linijką można skonstruować styczną do krzywej łańcuchowej. Bernoulli zauważył bowiem że jest nią prosta PQ. W tym celu należy obliczyć, jaki jest tangens kąta nachylenia tej prostej do poziomu:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle PSP' = \operatorname{ctg} \sphericalangle QPP' = \frac{s}{a} = \frac{y'(s)}{x'(s)}.$$

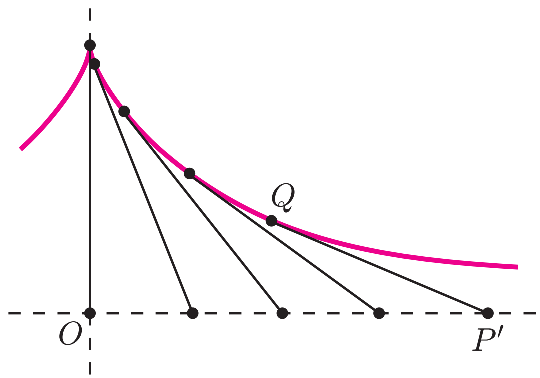


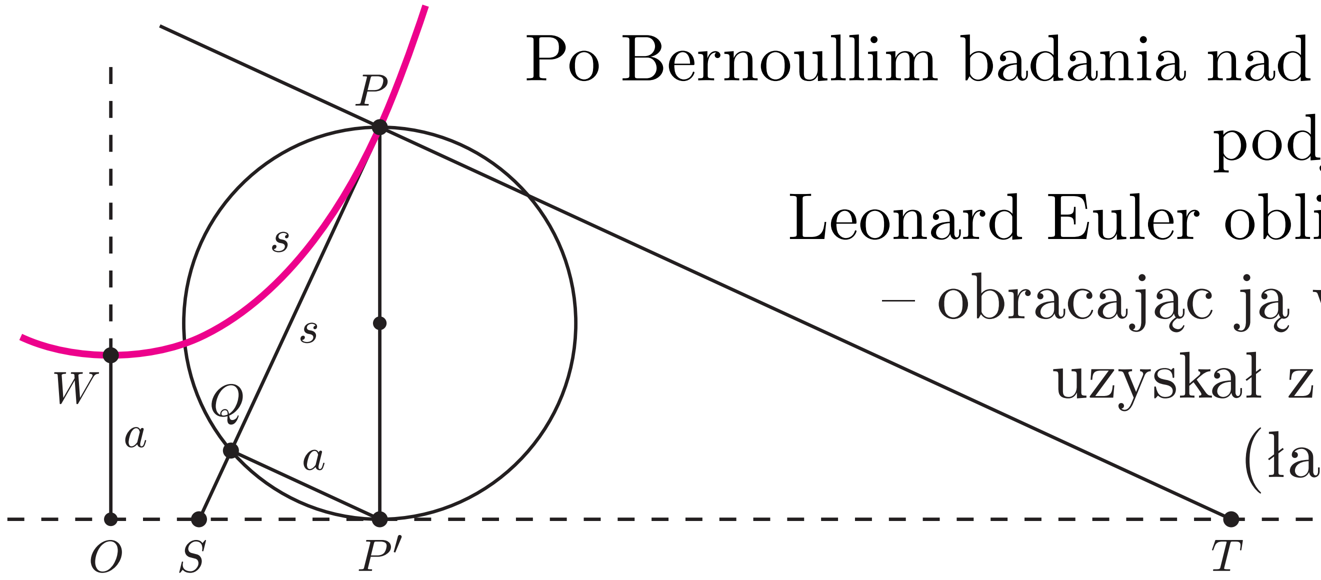
Kolejne spostrzeżenie Bernoulliego, to interesujące własności ewolwenty krzywej łańcuchowej, zakreślonej przez koniec z nici odwijanej z punktu W.

Krzywa ta nazywa się traktrysa

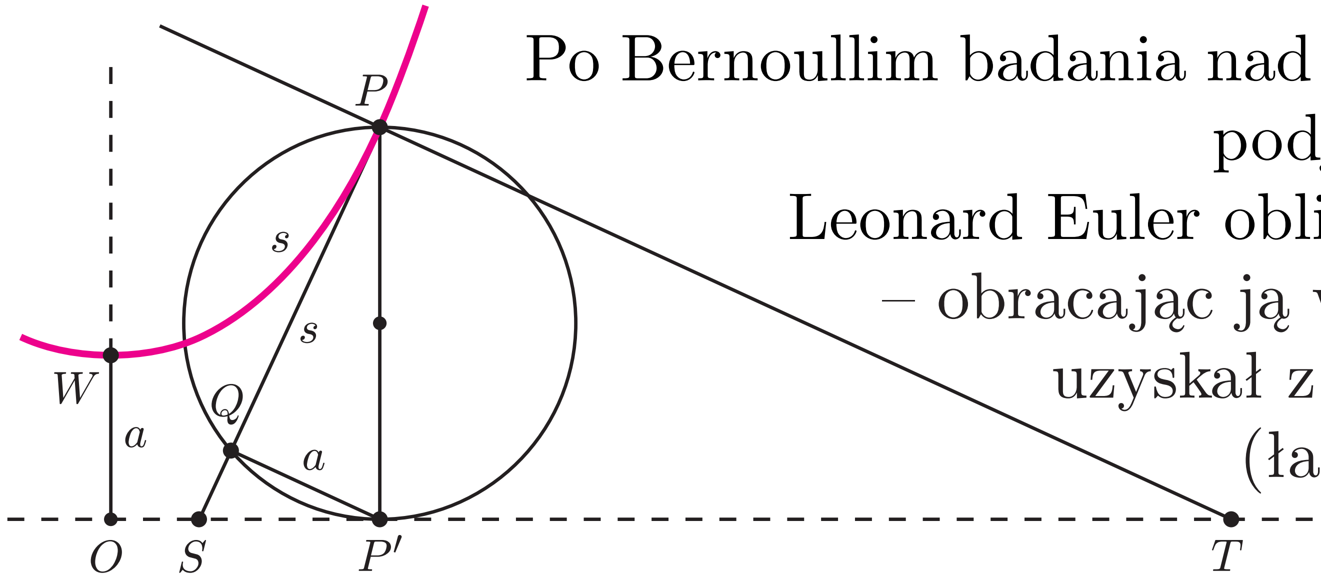


i, jak łatwo zauważyć, może być równoważnie zdefiniowana jako krzywa, której styczna do osi x-ów ma stale tę samą długość a. Realizuje ją kaczuszka ciągnięta na sznurku przez dziecko idące po krawężniku.





Po Bernoullim badania nad krzywą łańcuchową podjęli kolejni badacze.
Leonard Euler obliczył jej krzywiznę i – obracając ją wokół osi x-ów – uzyskał z niej katenoidę (łańcuch to po łacinie *catena*).



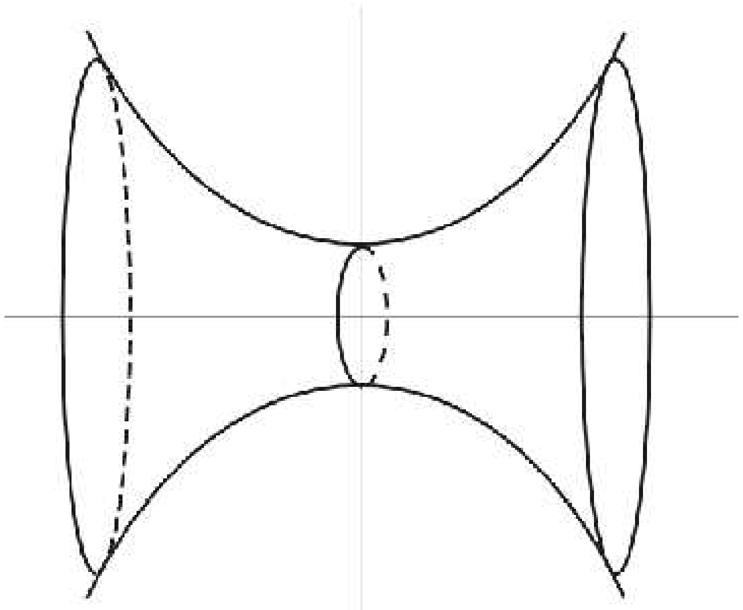
Po Bernoullim badania nad krzywą łańcuchową podjęli kolejni badacze. Leonard Euler obliczył jej krzywiznę i – obracając ją wokół osi x-ów – uzyskał z niej katenoidę (łańcuch to po łacinie *catena*).

Krzywizna to tempo, w jakim zmienia się jednostkowy wektor styczny. Trzeba więc znaleźć pochodną prędkości – otrzymujemy $\vec{v}\,' = \left(\frac{-sa}{(\sqrt{s^2+a^2})^3}, \frac{a^2}{(\sqrt{s^2+a^2})^3}\right)$. Jej długość to $\frac{a}{s^2+a^2}$.

Geometrycznie krzywizna to odwrotność promienia okręgu najlepiej przybliżającego krzywą w otoczeniu danego punktu. Środek tego okręgu leży, oczywiście, na prostopadłej do stycznej. Patrząc na rysunek widzimy, że krzywizna jest odwrotnością długości PT, a jej środek jest symetryczny do T względem P.

Euler wykazał, że na każdej (gładkiej) powierzchni krzywizna przecięć normalnych (czyli prostopadłych do płaszczyzny stycznej) przyjmuje dwa ekstrema i te ekstremalne przecięcia są wzajemnie prostopadłe.

Wykazał też, że na katenoidzie w każdym punkcie obie te krzywizny mają tę samą bezwzględną wartość równą krzywiźnie krzywej łańcuchowej, tyle, że są odwrotnie (do wewnątrz – na zewnątrz) skierowane.



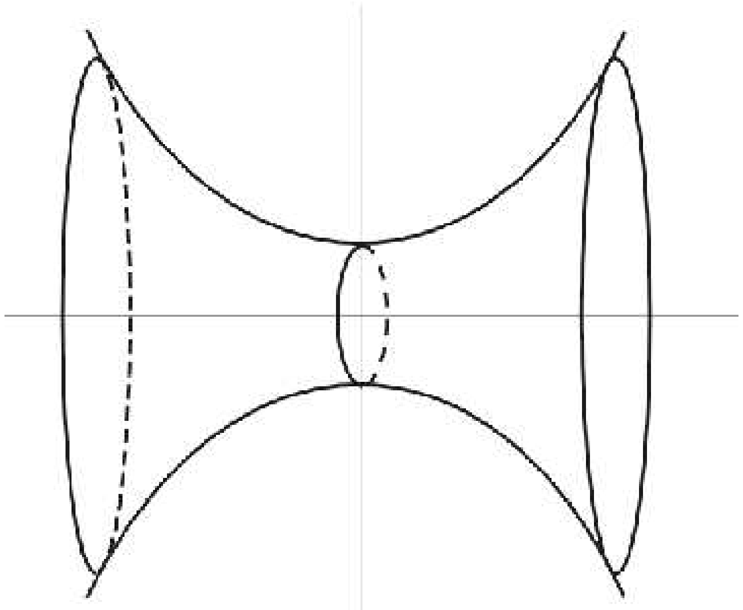
Wyprowadził stąd wniosek, że katenoida jest powierzchnią minimalną. Oznacza to, że dowolna powierzchnia rozpięta na dowolnym zamkniętym konturze narysowanym na katenoidzie ma pole nie mniejsze niż odpowiedni fragment katenoidy.

Jean Baptiste Meusnier ponad pół wieku później udowodnił, że każda powierzchnia, która ma w każdym punkcie ekstremalne krzywizny tej samej wartości bezwzględnej, ale przeciwnego znaku, jest powierzchnią minimalną.

Odnośnie zaś katenoidy, wykazał, iż jest to jedyna minimalna powierzchnia obrotowa.

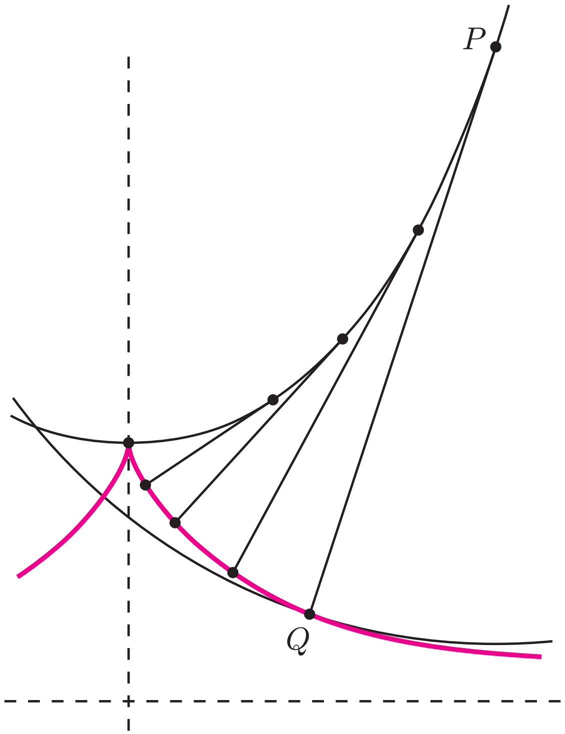
Jean Baptiste Meusnier ponad pół wieku później udowodnił, że każda powierzchnia, która ma w każdym punkcie ekstremalne krzywizny tej samej wartości bezwzględnej, ale przeciwnego znaku, jest powierzchnią minimalną.

Odnośnie zaś katenoidy, wykazał, iż jest to jedyna minimalna powierzchnia obrotowa.

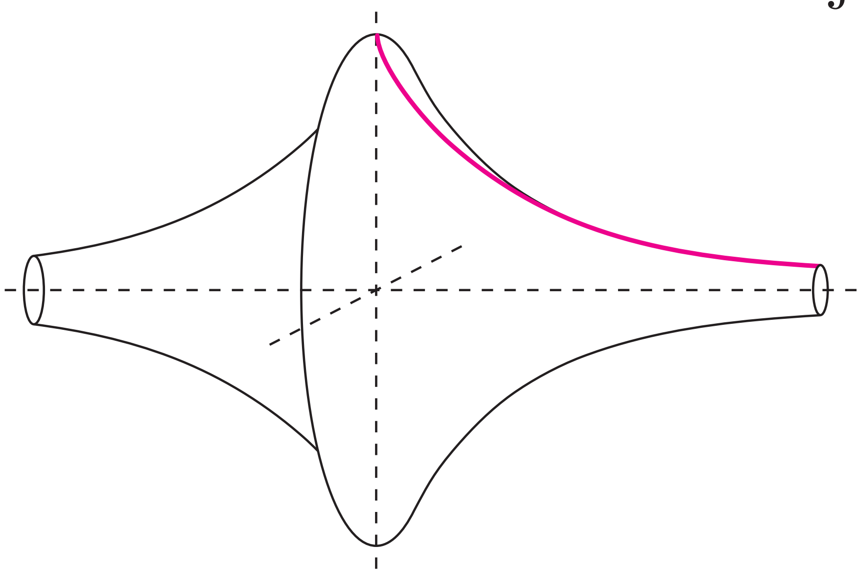


Katenoidę można obejrzeć "na żywo" korzystając z faktu, iż woda z detergentem (np. mydłem) ma duże napęcie powierzchniowe. Jeśli więc rozepniemy bańkę mydlaną na dwóch równoległych okręgach z drutu, otrzymamy między nimi właśnie katenoidę.

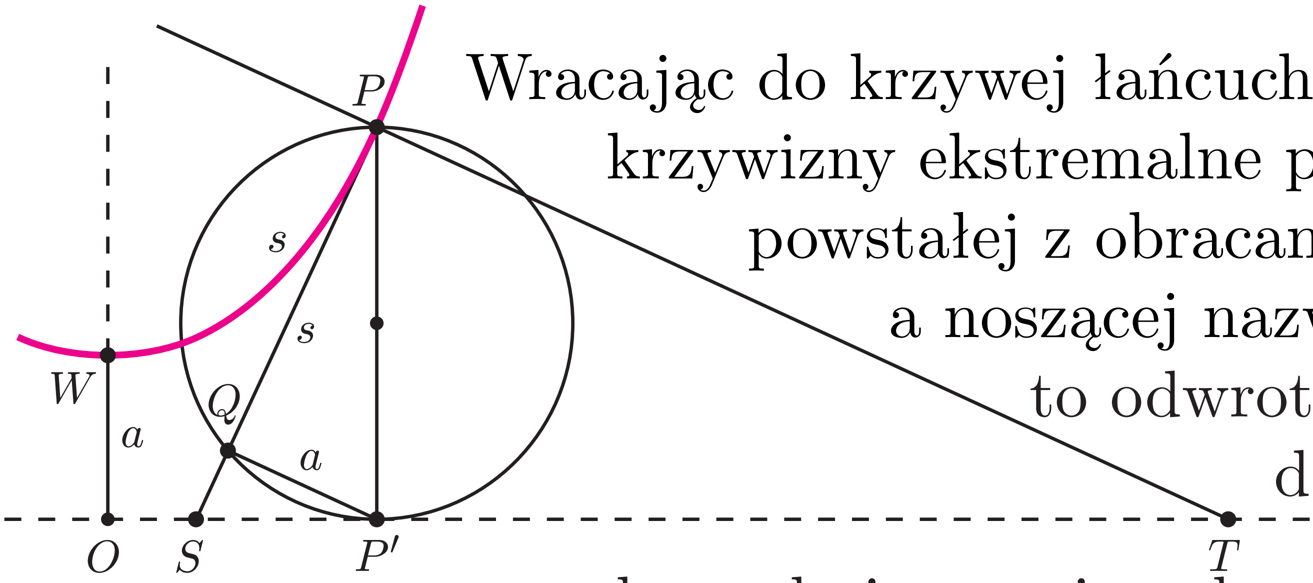
Dalszą karierę zrobiła ewolwenta krzywej łańcuchowej – traktrysa.



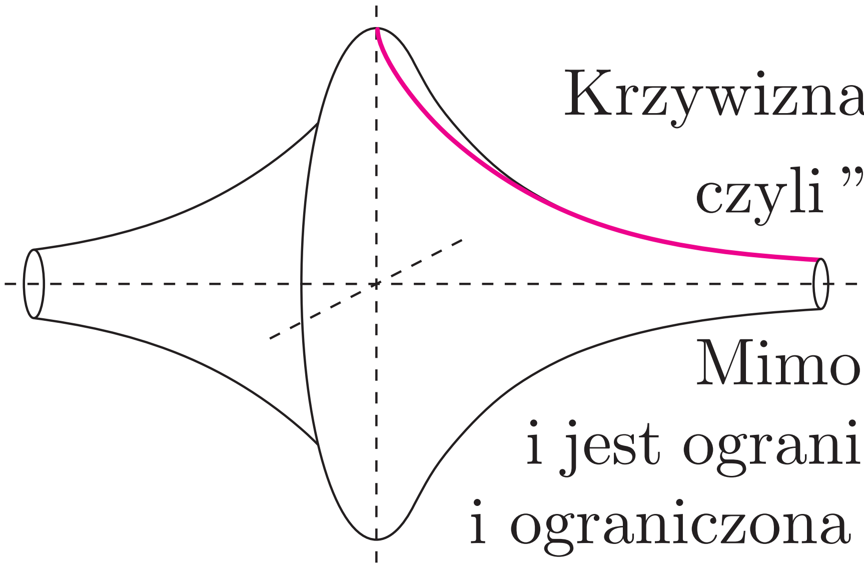
Gauss w swoim wspaniałym twierdzeniu o powierzchniach (*theorema egregium*) udowodnił, że iloczyn krzywizn ekstermalnych nie zmienia się przy dowolnym odkształceniu powierzchni, o ile nie zmienia ono długości żadnej leżącej na niej krzywej. Ten iloczyn nazywamy krzywizną Gaussa. Powierzchnią o stałej krzywiźnie Gaussa jest sfera – jej krzywizna Gaussa to $\frac{1}{r^2}$.



Okazuje się, że istnieje także powierzchnia o stalej krzywiźnie ujemnej i można ją uzyskać przez obracanie traktrysy.



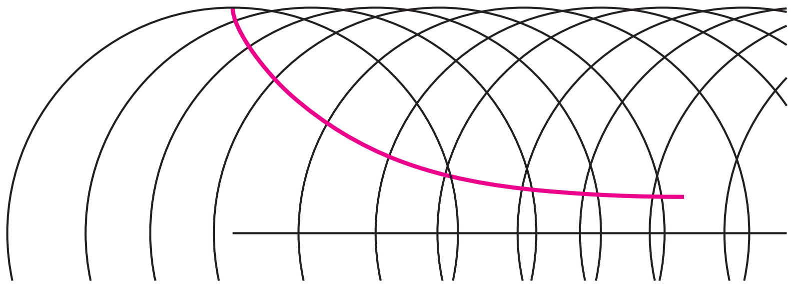
Wracając do krzywej łańcuchowej, widzimy, że
krzywizny ekstremalne powierzchni
powstałej z obracania traktrysy
a noszącej nazwę pseudosfera,
to odwrotności odpowiednio
długości PQ i QS,
ale z odmiennymi znakami, czyli np. $\dfrac{1}{s}$ i $\dfrac{-s}{a^2}$.



Krzywizna Gaussa pseudosfery to zatem $\dfrac{-1}{a^2}$,
czyli "tak samo" jak dla zwykłej dodatniej
sfery.

Mimo tego, że sfera jest gładka
i jest ograniczona, a pseudosfera ma osobliwości
i ograniczona nie jest, to pole pseudosfery
jest takie samo, jak sfery: $4\pi a^2$.

Traktrysę można uzyskać także w inny sposób: jest to linia



przecinająca okręgi o środkach na osi x-ów pod kątem prostym.

Można zatem badania rozpocząć od traktrysy i uzyskać krzywą łańcuchową jako ewolutę (zbiór środków krzywizny) traktrysy.