O tym, jak Starożytni wykonywali
sprawnie i poprawnie

trysekcję kąta, kwadraturę koła
i podwojenie sześcianu,

oraz dlaczego i od kiedy
uważamy, że to jest niewykonalne

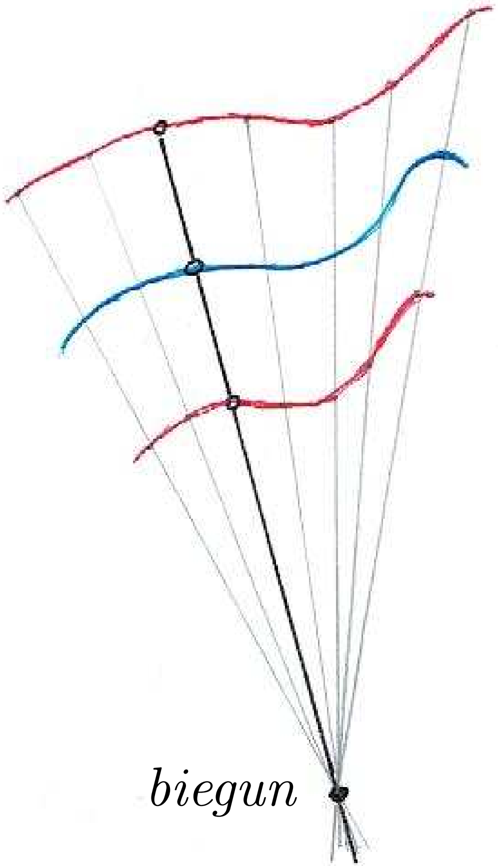
Wymienione w tytule trzy zadania konstrukcyjne
w czasach Złotego Wieku Grecji po zwycięskich wojnach perskich
uchodziły za test geometrycznego mistrzostwa.

Przedstawię trzy bardzo elementarne rozwiązania trysekcji kąta,
t.j. podzielenia kąta na trzy równe części,
autorstwa Nikomedesa i Archimedesa (obaj –III wiek) i Pascala (XVII wiek);

dwa, już mniej elementarne, rozwiązania kwadratury koła
(a właściwie jego rektyfikacji),
t.j. znalezienia kwadratu o polu równym polu danego koła
(równoważne znalezieniu odcinka o długości równej danemu okręgowi),
autorstwa Dinostratosa (–IV wiek) i Archimedesa (–III wiek),
które rozwiązują też tryskecję, a nawet n-sekcję kąta;

oraz jedno (stereometryczne!) rozwiązanie podwojenia sześcianu,
t.j. znalezienia sześcianu o objętości dwukrotnie większej od danego,
autorstwa Archytasa (–V wiek),
za to z komentarzami Platona i Norwida.

Zaczynamy od trysekcji.



Zarówno Nikomedes, Archimedes, jak i Pascal posłużyli się konchoidografem.

Jest to urządzenie pozwalające nakreślić figurę złożoną z punktów, które na każdej prostej przechodzącej przez ustalony punkt zwany biegunem są odległe od punktów danej linii bliżej i dalej o tę samą odległość zwaną rozwartością.

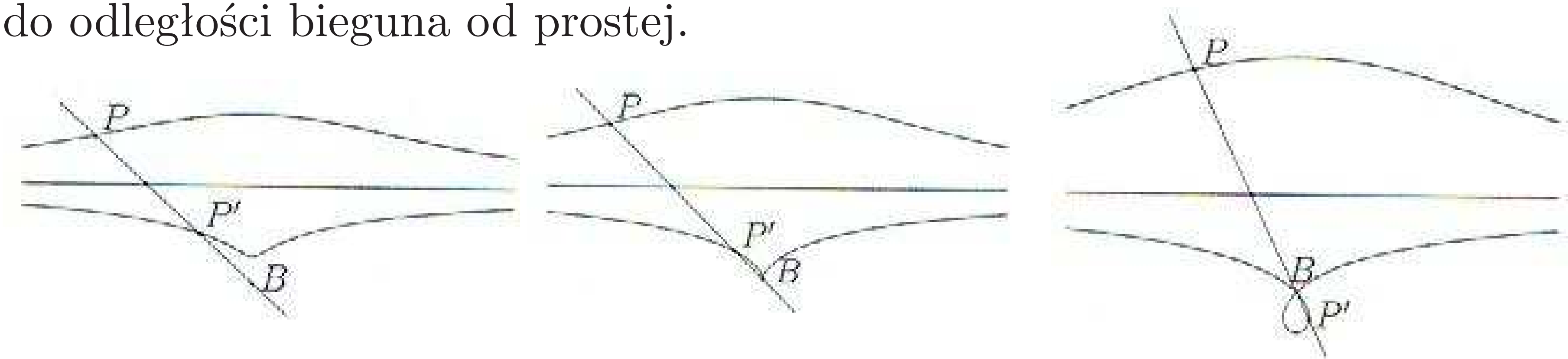
Tę mętną definicję realizuje patyk z trzema otworkami, z których środkowy leży *nomen omen* w środku odcinka wyznaczonego przez dwa pozostałe.

Jeśli patykiem stale opartym o biegun wodzimy tak, aby przez środkową dziurkę widzieć punkty linii, pisaki wetknięte w pozostałe otwory nakreślą nam konchoidę tej linii.

Grekom konchoida przypominała muszlę ($\kappa o \nu \chi \eta$, *konche*) perłopławu, zawierającą ową linię jak perłę.

Kształt konchoidy zależy zarówno od linii, dla której ją znajdujemy, jak położenia bieguna oraz rozwartości konchoidografu.

W przypadku konchoidy prostej, znanej jako konchoida Nikomedesa, o charakterze linii decyduje stosunek rozwartości konchoidografu do odległości bieguna od prostej.

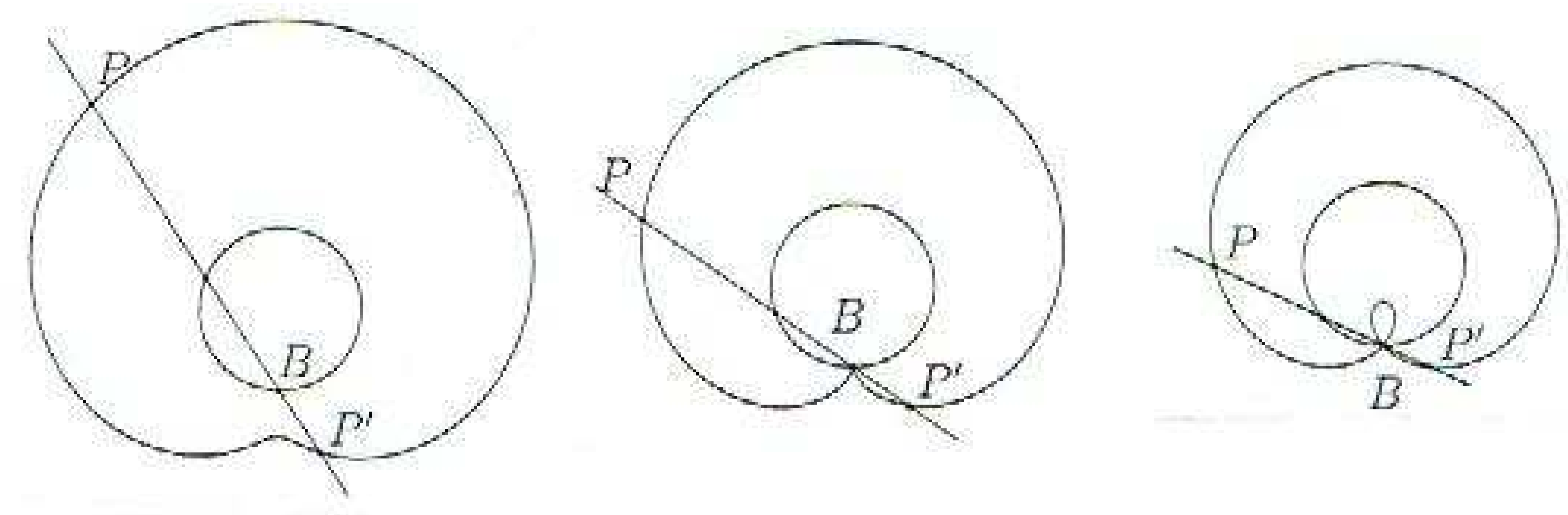


Tu wyraźnie widać dwie części konchoidy – wewnętrzną i zewnętrzną. Obie z obu stron zbiegają asymptotycznie do prostej. Gdy stosunek rozwartości do odległości bieguna od prostej jest mniejszy od jedności, cześć wewnętrzna jest gładka, gdy jest równy 1 – ma ostrze, gdy jest większy od jedności – ma pętlę. Część zewnętrzna jest w każdym przypadku gładka i ma podobny kształt.

W konstrukcji trysekcji Nikomedes posłużył się tylko zewnętrzną częścią.

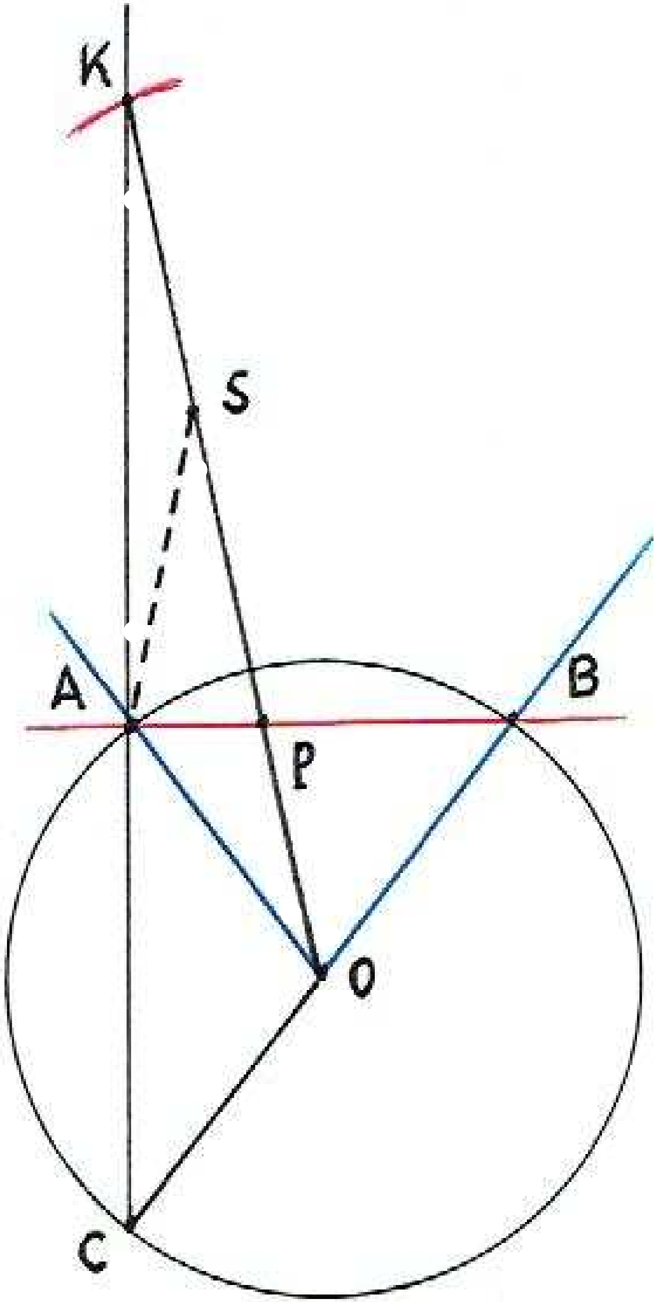
Konchoid okręgu jest wiele, a wśród nich wyróżnione są te, w których biegun konchoidy leży na okręgu – mają nazwę ślimak Pascala.

Parametrem decydującym o kształcie ślimaka jest stosunek rozwartości konchoidografu do promienia okręgu.

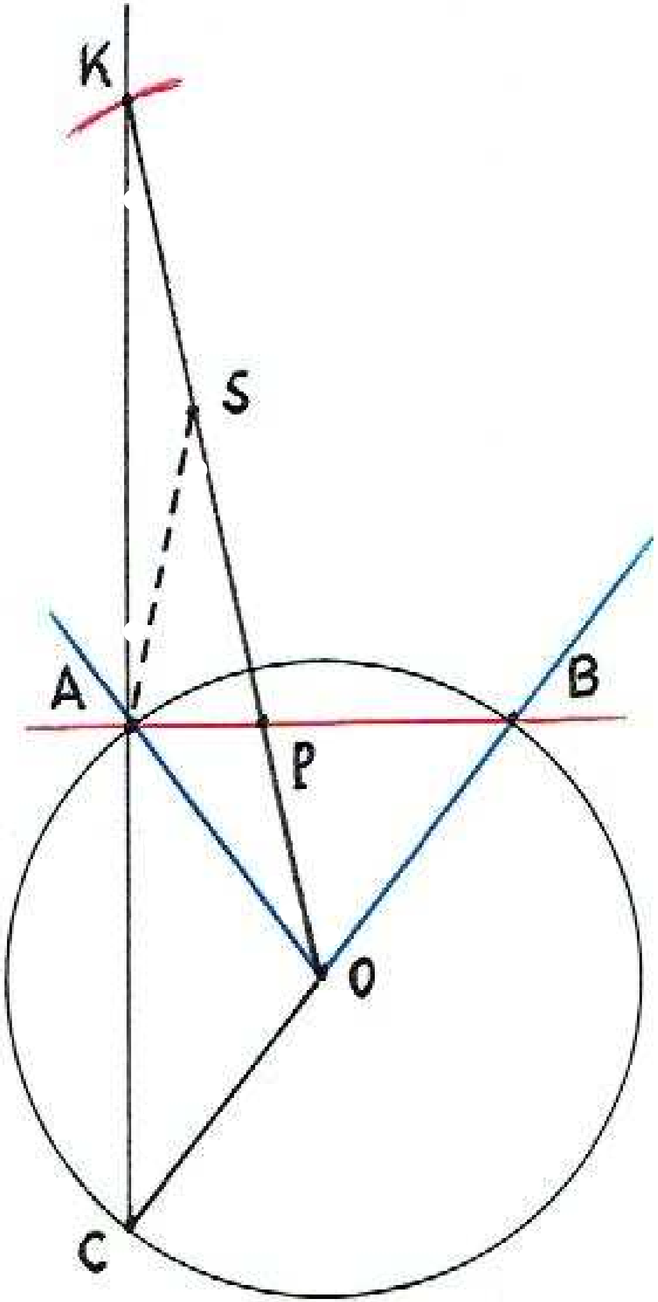


Tu nie ma podziału na zewnętrzną i wewnętrzną część ślimaka.

Podobnie jak dla konchoidy prostej, gdy rozwartość jest większa od średnicy okręgu, ślimak jest gładki (i leży na zewnątrz okręgu), gdy jest równa średnicy – ślimak ma ostrze (i nazywa się wtedy kardioidą) a gdy jest mniejsza – ma pętlę (która jest wewnątrz okręgu).

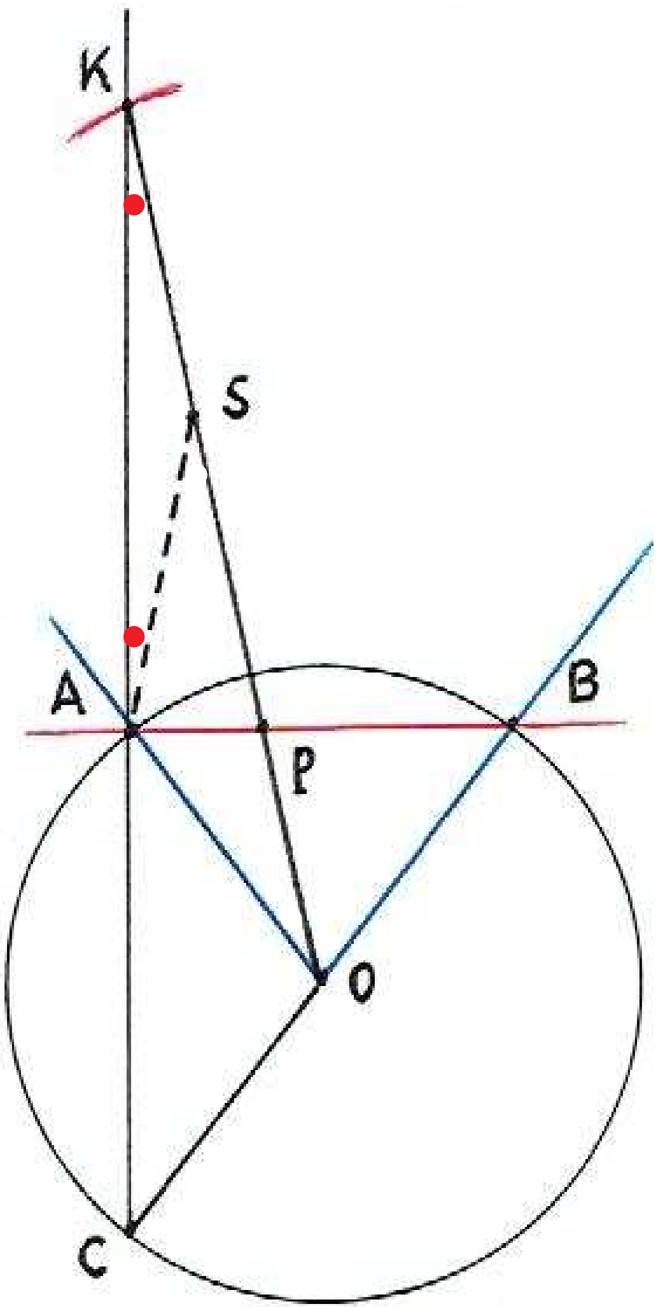


Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;



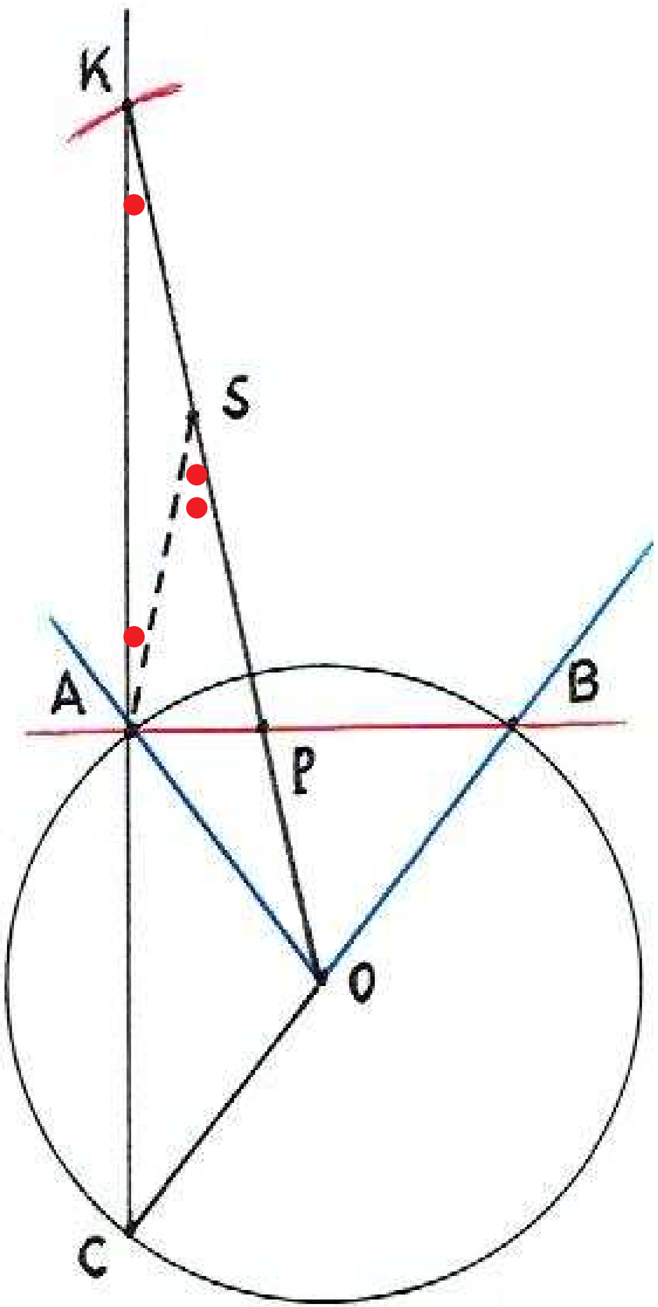
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;



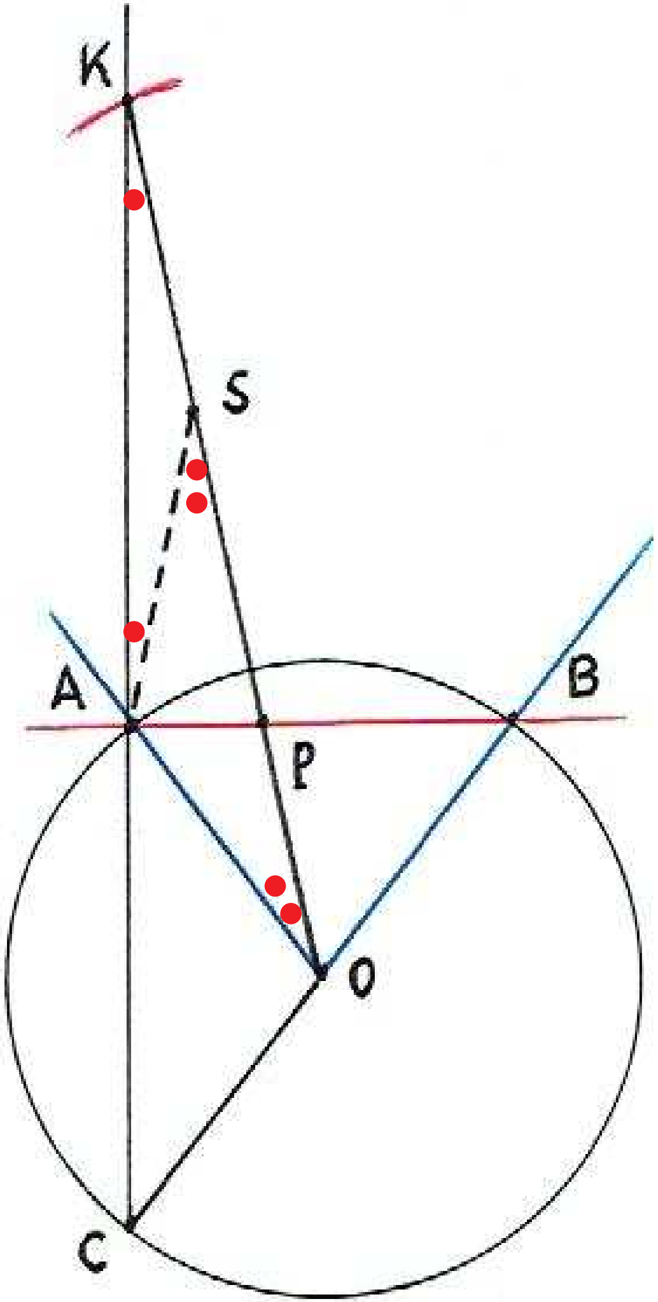
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,



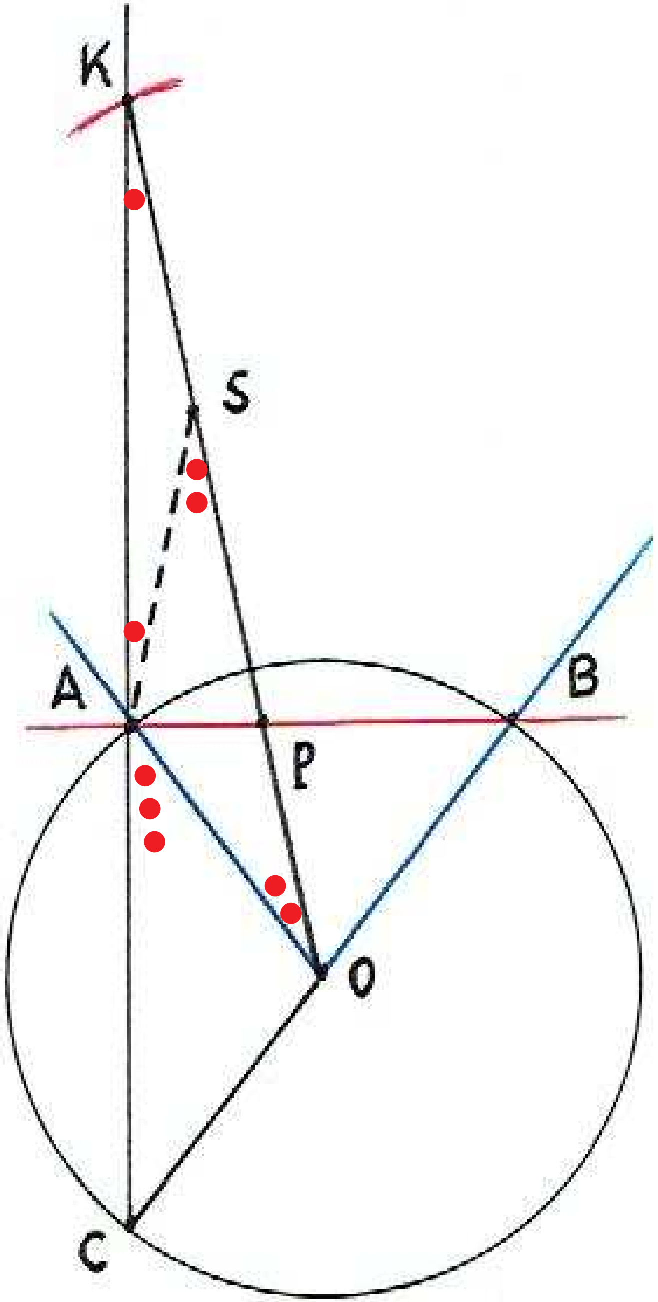
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,
$\sphericalangle ASO$ zewnętrzny w ΔASK;



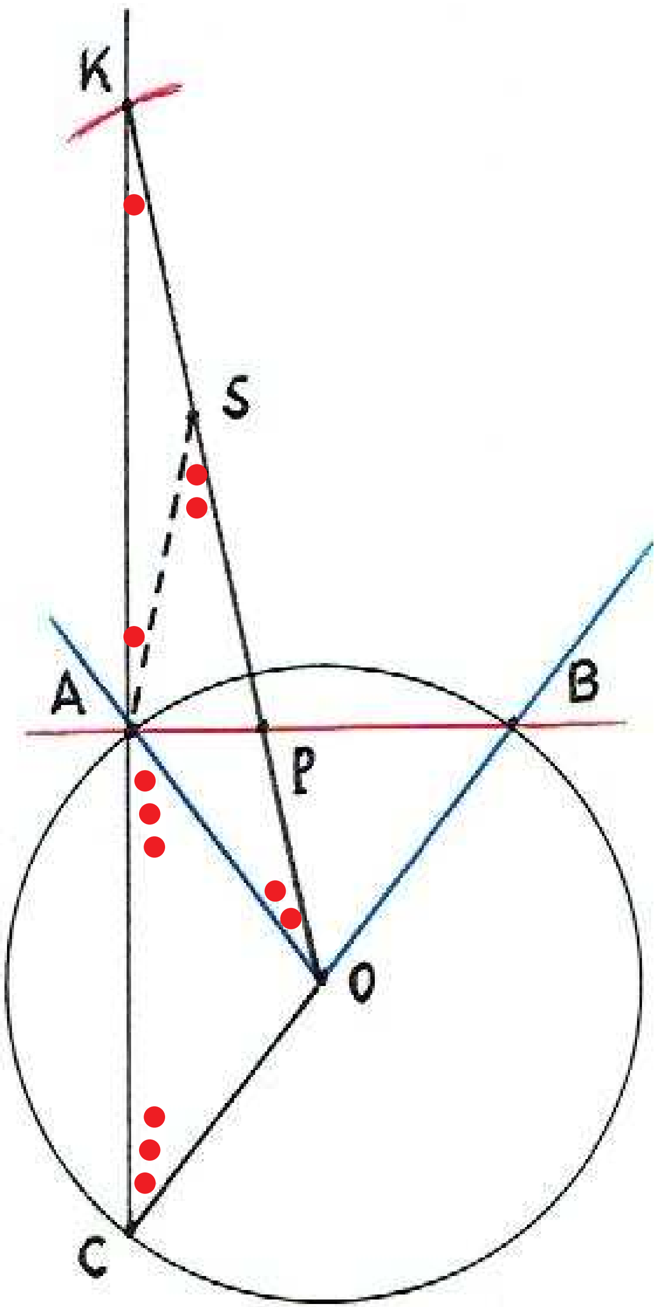
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,
$\sphericalangle ASO$ zewnętrzny w ΔASK;
ΔSAO równoramienny,



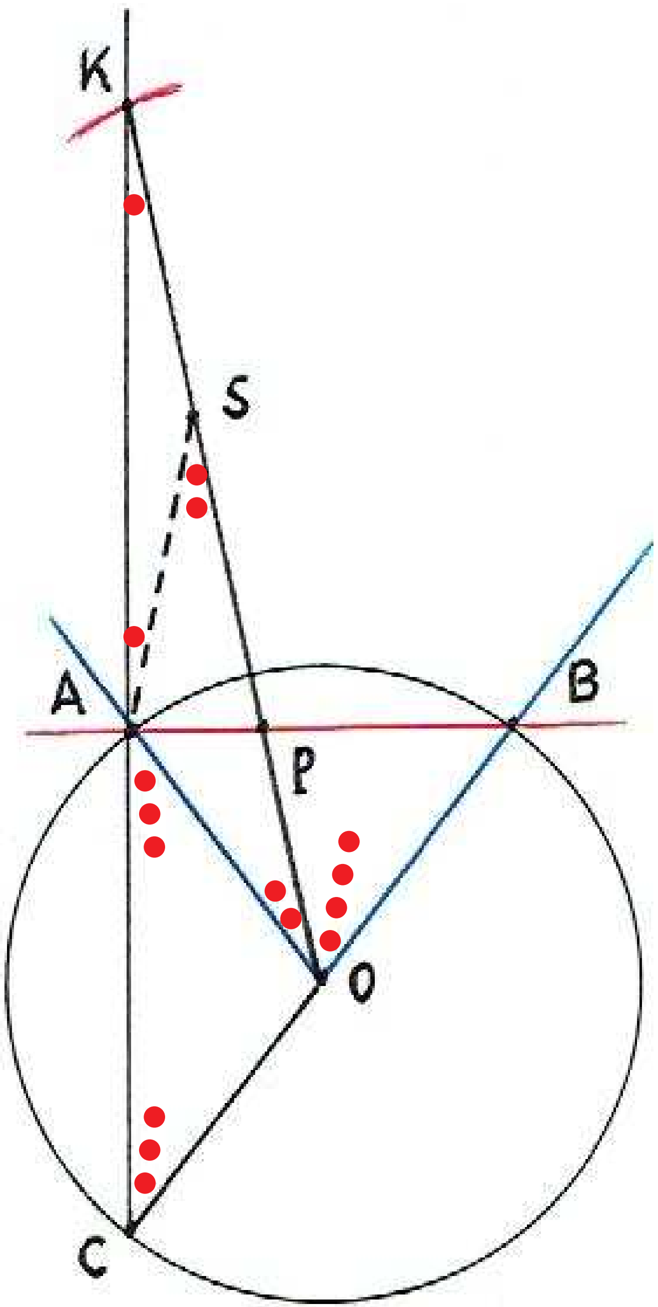
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,
$\sphericalangle ASO$ zewnętrzny w ΔASK;
ΔSAO równoramienny,
$\sphericalangle CAO$ zewnętrzny w ΔKAO;



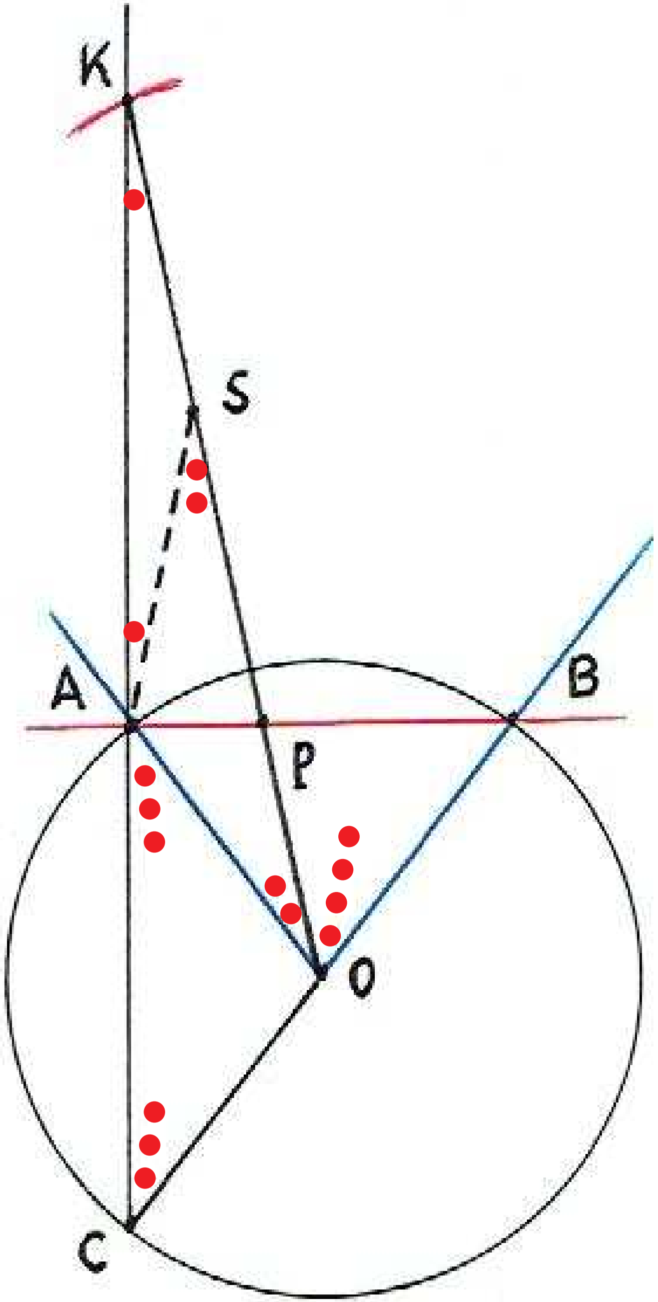
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,
$\sphericalangle ASO$ zewnętrzny w ΔASK;
ΔSAO równoramienny,
$\sphericalangle CAO$ zewnętrzny w ΔKAO;
ΔAOC równoramienny,



Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

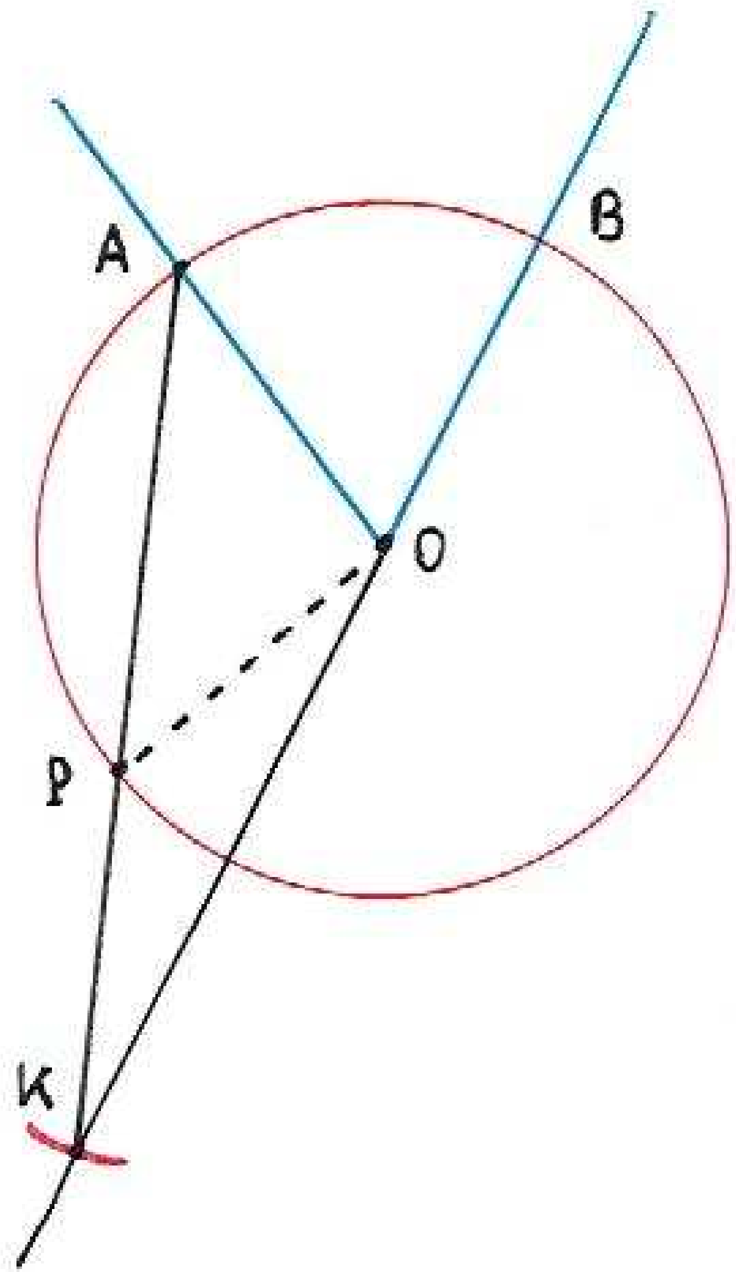
$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,
$\sphericalangle ASO$ zewnętrzny w ΔASK;
ΔSAO równoramienny,
$\sphericalangle CAO$ zewnętrzny w ΔKAO;
ΔAOC równoramienny,
$\sphericalangle KOB$ zewnętrzny w ΔKOC;



Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta,
który chcemy podzielić,
uzupełniamy rysunek punktami A, B, C,
jak widać;
biegun konchoidografu w O, rozwartość BC;
konchoida prostej AB przecina AC w K;

$\sphericalangle CAB$ prosty, bo oparty na średnicy;
ΔKAP prostokątny, $KP = BC$,
S – środek KP, więc $AS = AO$;
ΔASK równoramienny,
$\sphericalangle ASO$ zewnętrzny w ΔASK;
ΔSAO równoramienny,
$\sphericalangle CAO$ zewnętrzny w ΔKAO;
ΔAOC równoramienny,
$\sphericalangle KOB$ zewnętrzny w ΔKOC;

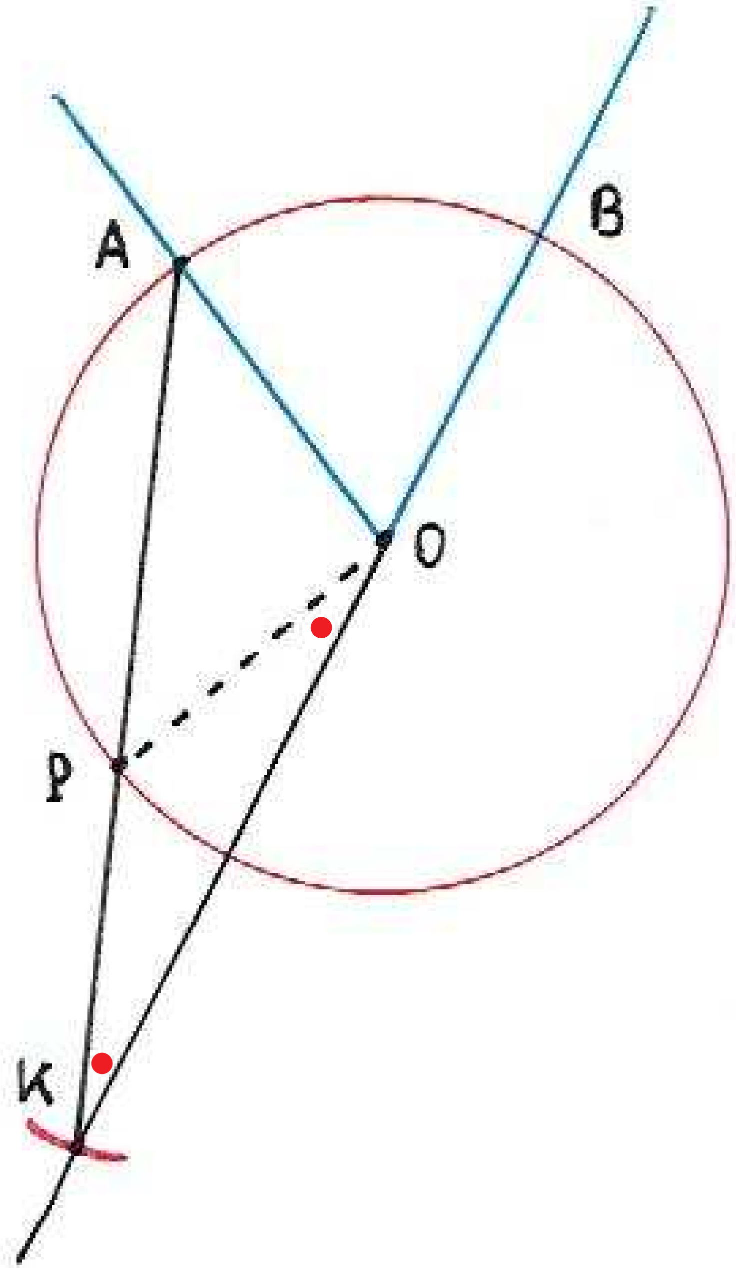
ZATEM $\sphericalangle AOK = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$.



W jednej ze swych trysekcji Archimedes posłużył się ślimakiem Pascala.

Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta.

Ślimak o biegunie w punkcie przecięcia jednego z ramion kąta z okręgiem i rozwartości równej promieniowi okręgu przecina przedłużenie drugiego ramienia w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

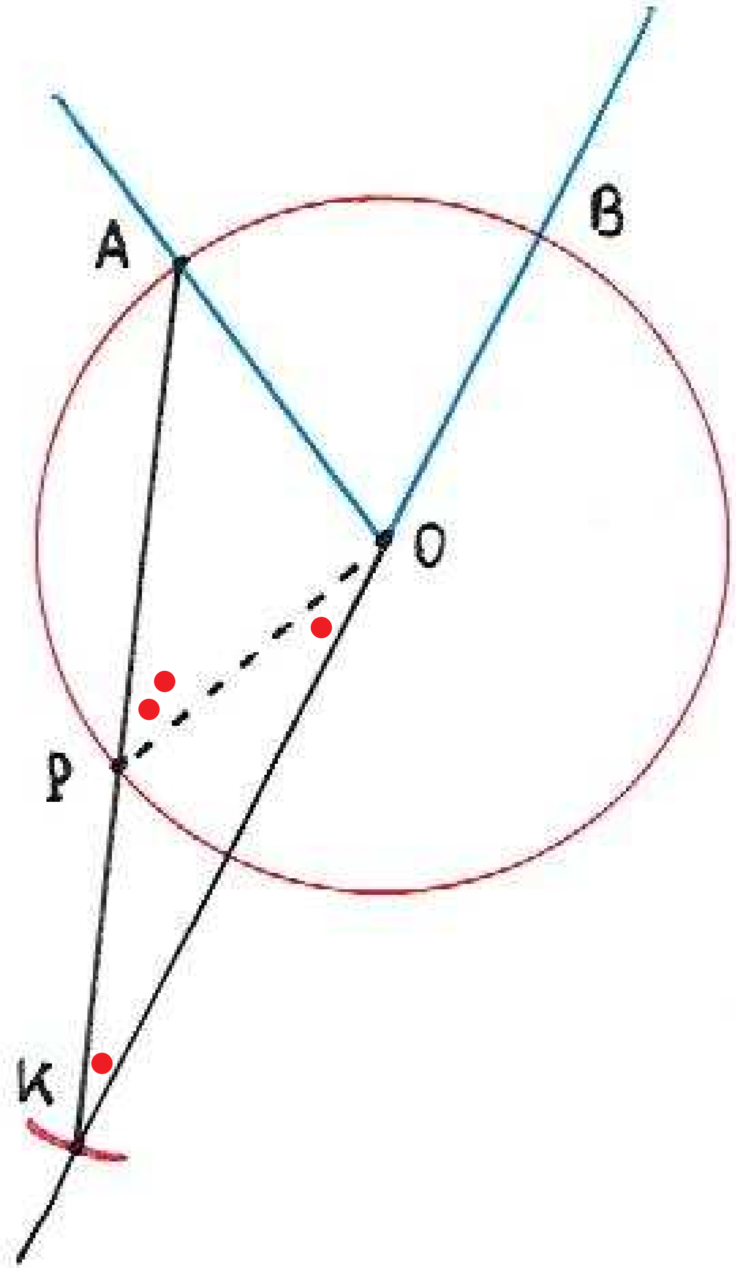


W jednej ze swych trysekcji Archimedes posłużył się ślimakiem Pascala.

Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta.

Ślimak o biegunie w punkcie przecięcia jednego z ramion kąta z okręgiem i rozwartości równej promieniowi okręgu przecina przedłużenie drugiego ramienia w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

ΔKPO jest równoramienny,

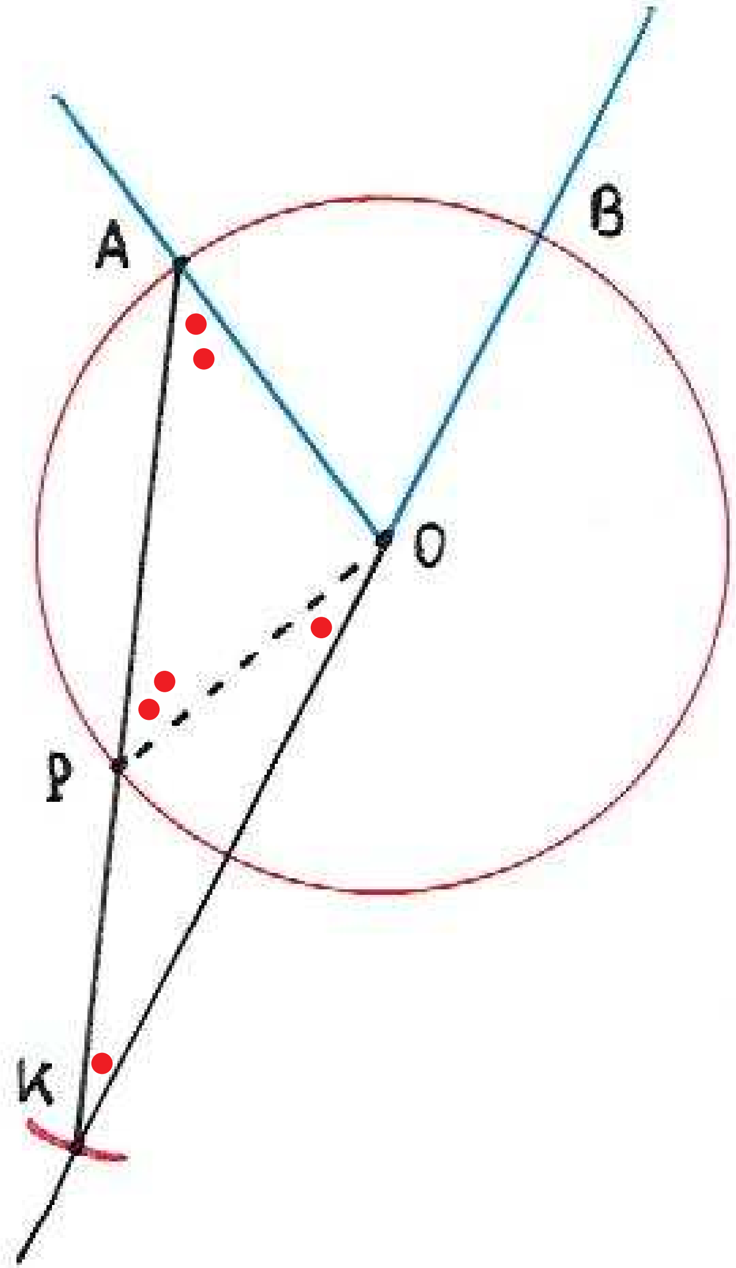


W jednej ze swych trysekcji Archimedes posłużył się ślimakiem Pascala.

Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta.

Ślimak o biegunie w punkcie przecięcia jednego z ramion kąta z okręgiem i rozwartości równej promieniowi okręgu przecina przedłużenie drugiego ramienia w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

ΔKPO jest równoramienny,
$\sphericalangle OPA$ jest zewnętrzny w ΔKPO,

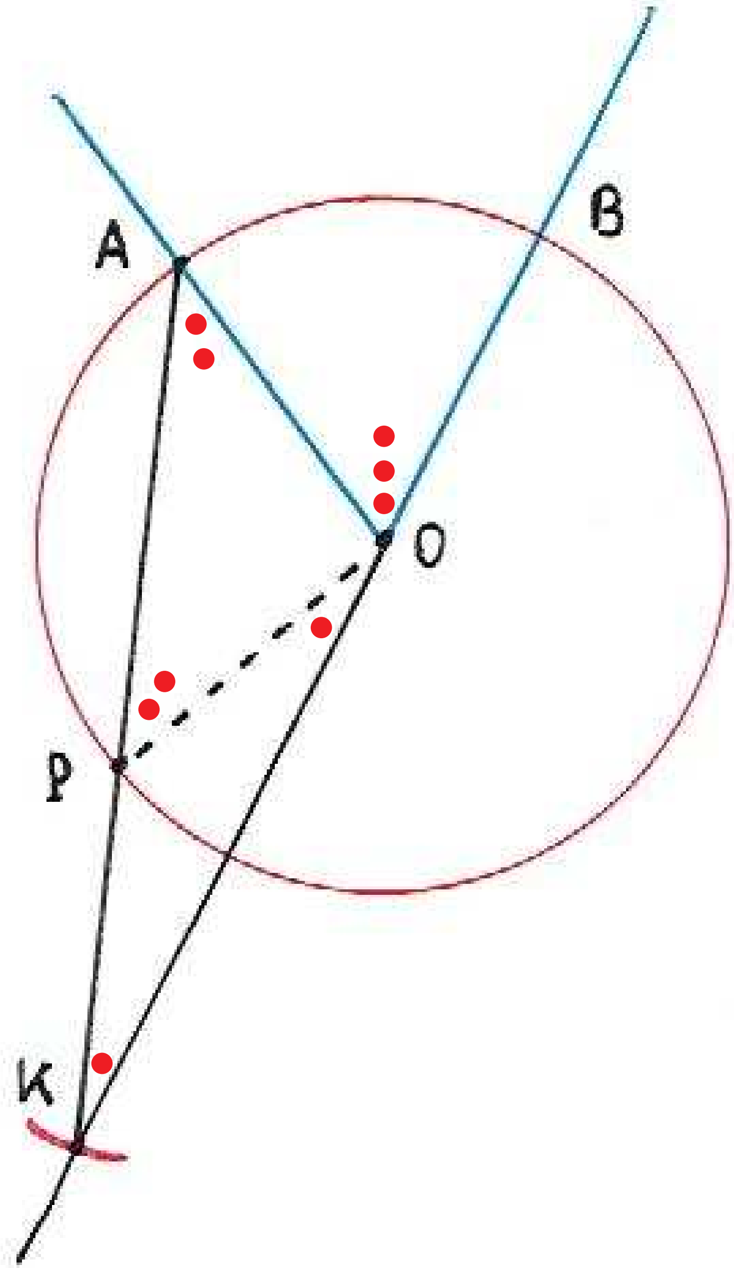


W jednej ze swych trysekcji Archimedes posłużył się ślimakiem Pascala.

Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta.

Ślimak o biegunie w punkcie przecięcia jednego z ramion kąta z okręgiem i rozwartości równej promieniowi okręgu przecina przedłużenie drugiego ramienia w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

ΔKPO jest równoramienny,
$\sphericalangle OPA$ jest zewnętrzny w ΔKPO,
ΔPOA jest równoramienny,

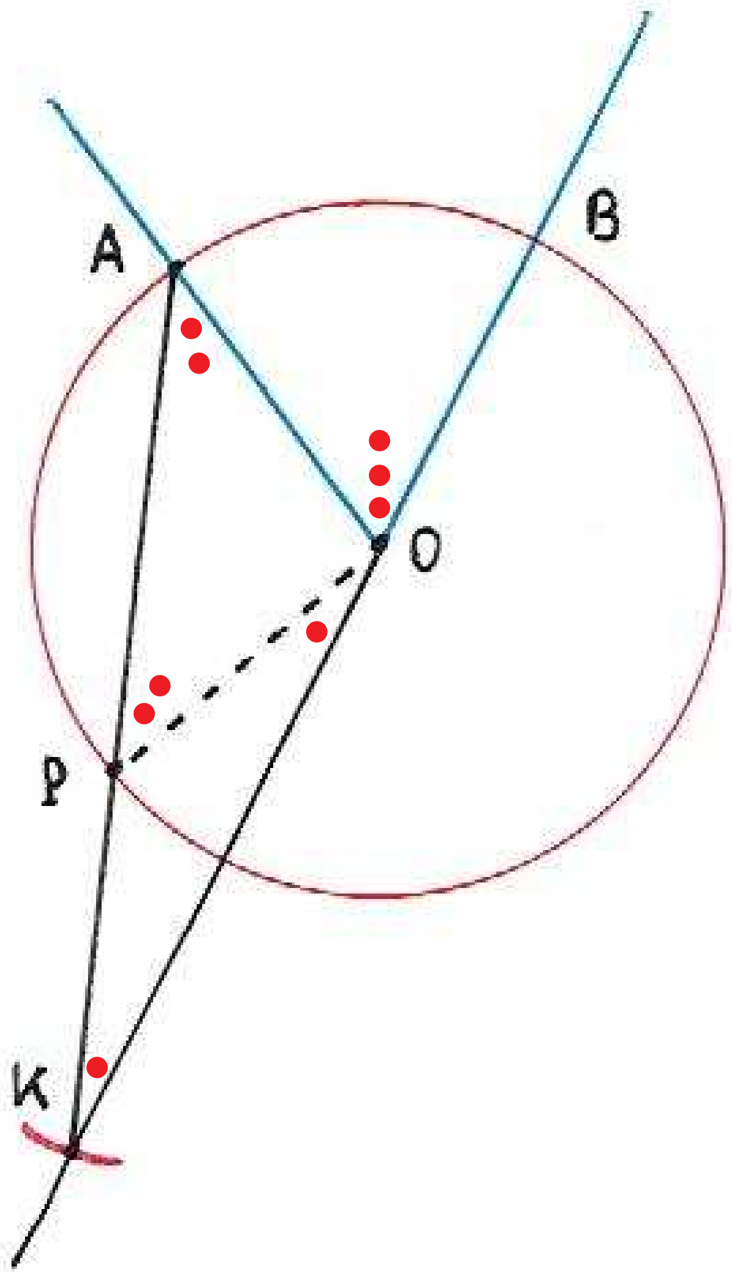


W jednej ze swych trysekcji Archimedes posłużył się ślimakiem Pascala.

Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta.

Ślimak o biegunie w punkcie przecięcia jednego z ramion kąta z okręgiem i rozwartości równej promieniowi okręgu przecina przedłużenie drugiego ramienia w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

ΔKPO jest równoramienny,
$\sphericalangle OPA$ jest zewnętrzny w ΔKPO,
ΔPOA jest równoramienny,
$\sphericalangle AOB$ jest zewnętrzny w ΔAKO,



W jednej ze swych trysekcji Archimedes posłużył się ślimakiem Pascala.

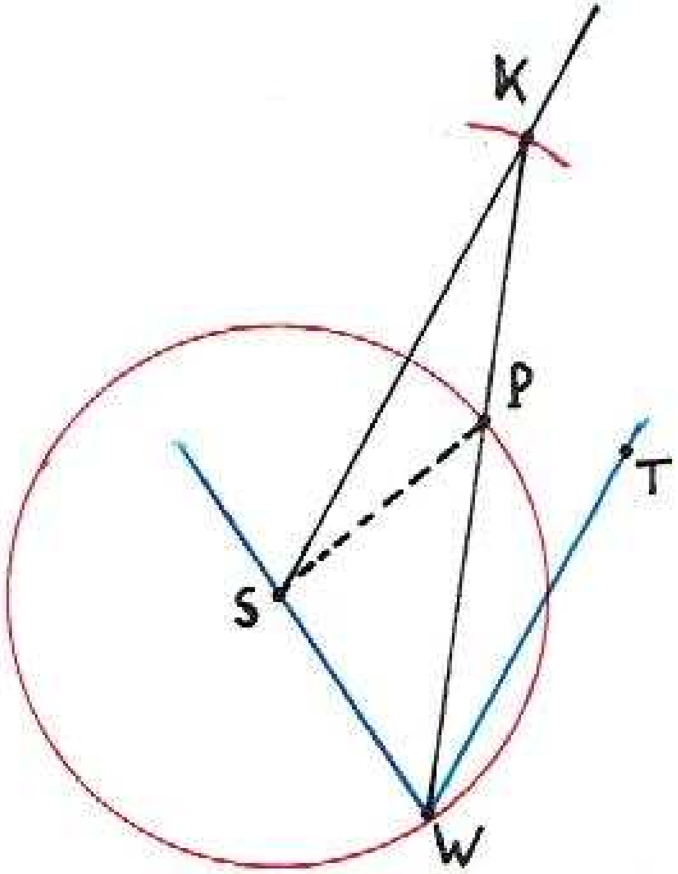
Rysujemy okrąg o środku w wierzchołku kąta.

Ślimak o biegunie w punkcie przecięcia jednego z ramion kąta z okręgiem i rozwartości równej promieniowi okręgu przecina przedłużenie drugiego ramienia w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

ΔKPO jest równoramienny,
$\sphericalangle OPA$ jest zewnętrzny w ΔKPO,
ΔPOA jest równoramienny,
$\sphericalangle AOB$ jest zewnętrzny w ΔAKO,

ZATEM $\sphericalangle AKB = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$.

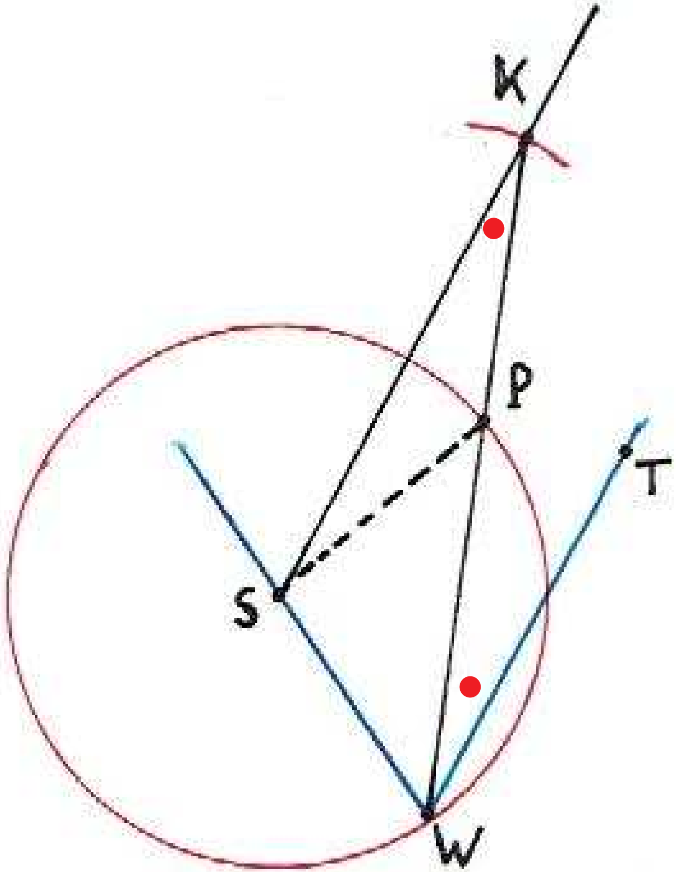
Pascal też użył ślimaka, ale inaczej.



Rysujemy okrąg o środku S
obranym na jednym z ramion kąta
i przechodzący przez jego wierzchołek W
oraz prowadzimy przez S prostą równoległą
do drugiego ramienia kąta.

Ślimak o biegunie W
i rozwartości równej promieniowi okręgu
przecina tę równoległą w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

Pascal też użył ślimaka, ale inaczej.

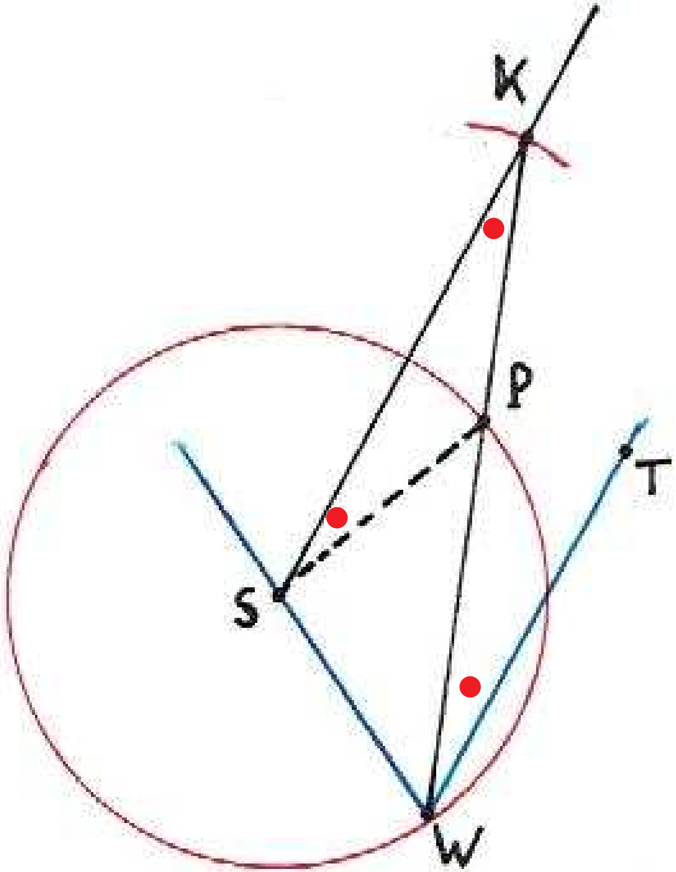


Rysujemy okrąg o środku S
obranym na jednym z ramion kąta
i przechodzący przez jego wierzchołek W
oraz prowadzimy przez S prostą równoległą
do drugiego ramienia kąta.

Ślimak o biegunie W
i rozwartości równej promieniowi okręgu
przecina tę równoległą w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

$\sphericalangle TWK = \sphericalangle WKS$
(dwie proste równoległe przecięte trzecią),

Pascal też użył ślimaka, ale inaczej.

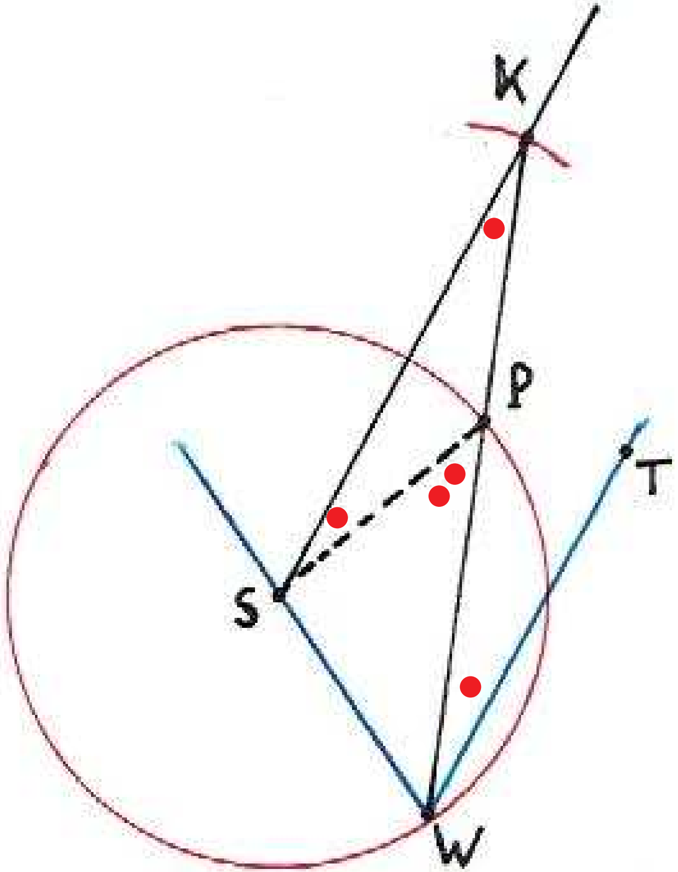


Rysujemy okrąg o środku S
obranym na jednym z ramion kąta
i przechodzący przez jego wierzchołek W
oraz prowadzimy przez S prostą równoległą
do drugiego ramienia kąta.

Ślimak o biegunie W
i rozwartości równej promieniowi okręgu
przecina tę równoległą w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

$\sphericalangle TWK = \sphericalangle WKS$
(dwie proste równoległe przecięte trzecią),
ΔKPS jest równoramienny,

Pascal też użył ślimaka, ale inaczej.

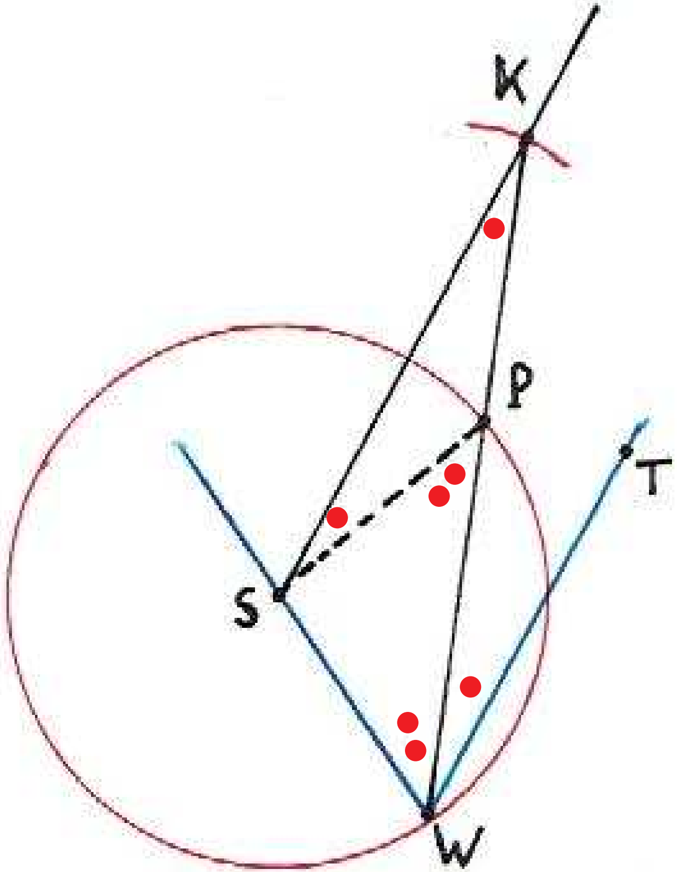


Rysujemy okrąg o środku S
obranym na jednym z ramion kąta
i przechodzący przez jego wierzchołek W
oraz prowadzimy przez S prostą równoległą
do drugiego ramienia kąta.

Ślimak o biegunie W
i rozwartości równej promieniowi okręgu
przecina tę równoległą w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

$\sphericalangle TWK = \sphericalangle WKS$
(dwie proste równoległe przecięte trzecią),
ΔKPS jest równoramienny,
$\sphericalangle SPW$ jest zewnętrzny w ΔKPS,

Pascal też użył ślimaka, ale inaczej.

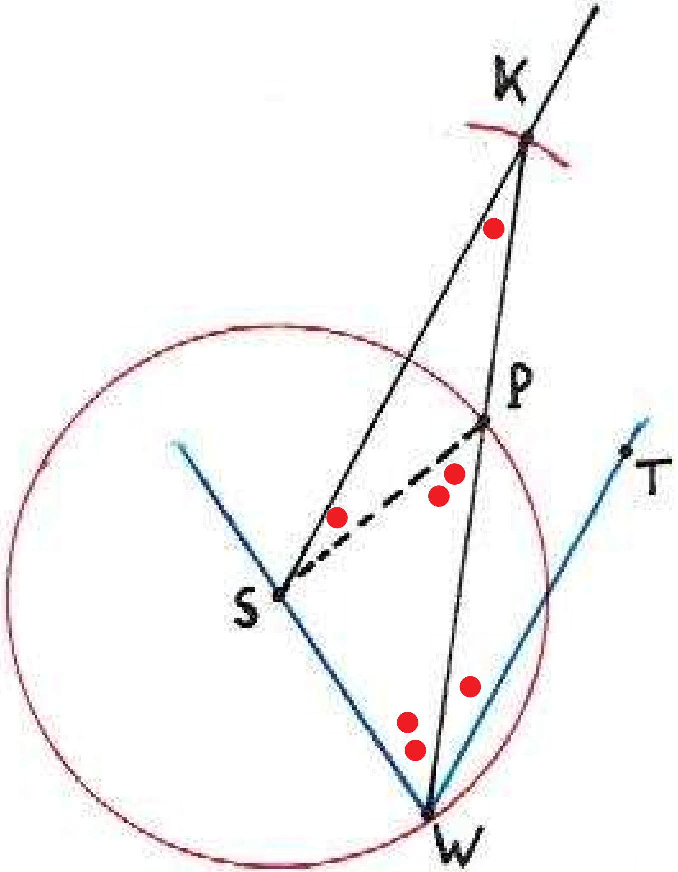


Rysujemy okrąg o środku S
obranym na jednym z ramion kąta
i przechodzący przez jego wierzchołek W
oraz prowadzimy przez S prostą równoległą
do drugiego ramienia kąta.

Ślimak o biegunie W
i rozwartości równej promieniowi okręgu
przecina tę równoległą w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

$\sphericalangle TWK = \sphericalangle WKS$
(dwie proste równoległe przecięte trzecią),
ΔKPS jest równoramienny,
$\sphericalangle SPW$ jest zewnętrzny w ΔKPS,
ΔPSW jest równoramienny;

Pascal też użył ślimaka, ale inaczej.



Rysujemy okrąg o środku S
obranym na jednym z ramion kąta
i przechodzący przez jego wierzchołek W
oraz prowadzimy przez S prostą równoległą
do drugiego ramienia kąta.

Ślimak o biegunie W
i rozwartości równej promieniowi okręgu
przecina tę równoległą w punkcie K.
Uzupełniamy rysunek punktem P.

$\sphericalangle TWK = \sphericalangle WKS$
(dwie proste równoległe przecięte trzecią),
ΔKPS jest równoramienny,
$\sphericalangle SPW$ jest zewnętrzny w ΔKPS,
ΔPSW jest równoramienny;

ZATEM $\sphericalangle TWK = \frac{1}{3} \sphericalangle TWS$.

Teraz kwadratura koła.

Potrzebne spostrzeżenie: Dowolny wielokąt można pociąć na mniejsze wielokąty, z których da się ułożyć kwadrat.

Teraz kwadratura koła.

Potrzebne spostrzeżenie: Dowolny wielokąt można pociąć na mniejsze wielokąty, z których da się ułożyć kwadrat.

Oto uzasadnienie:

– dowolny wielokąt można pociąć na trójkąty;

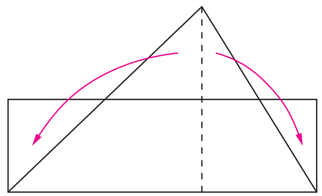
Teraz kwadratura koła.

Potrzebne spostrzeżenie: Dowolny wielokąt można pociąć na mniejsze wielokąty, z których da się ułożyć kwadrat.

Oto uzasadnienie:

– dowolny wielokąt można pociąć na trójkąty;

– dowolny trójkąt można zamienić na prostokąt;



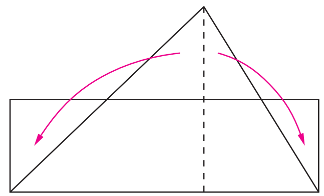
Teraz kwadratura koła.

Potrzebne spostrzeżenie: Dowolny wielokąt można pociąć na mniejsze wielokąty, z których da się ułożyć kwadrat.

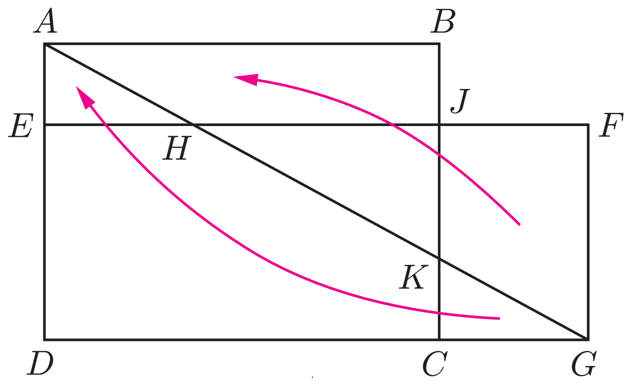
Oto uzasadnienie:

– dowolny wielokąt można pociąć na trójkąty;

– dowolny trójkąt można zamienić na prostokąt;



– dowolny prostokąt można zamienić na kwadrat, oznaczmy $DG = a$, $GF = b$ i niech $ABCD$ będzie kwadratem o boku c, takim że $c^2 = ab$, wówczas $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a-c}{c-b}$, a więc $CE \parallel GA \parallel FB$ wobec twierdzenia odwrotnego do tw. Talesa, zatem przesunięcie ΔCGK o $\overrightarrow{CE}$ daje ΔEHA, a przesunięcie ΔHGF o $\overrightarrow{FB}$ daje ΔAKB;

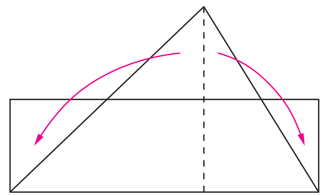


Teraz kwadratura koła.

Potrzebne spostrzeżenie: Dowolny wielokąt można pociąć na mniejsze wielokąty, z których da się ułożyć kwadrat.

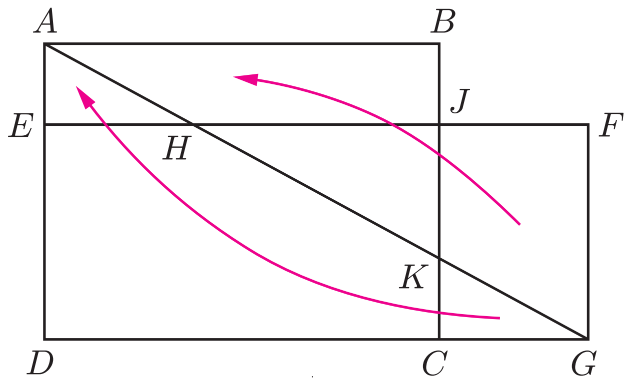
Oto uzasadnienie:

– dowolny wielokąt można pociąć na trójkąty;

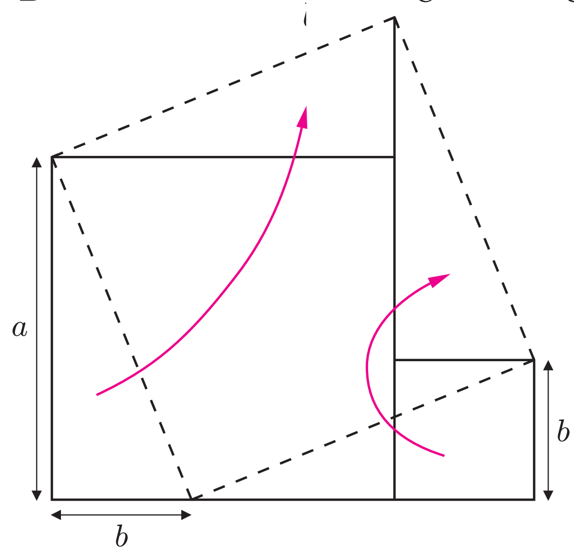


– dowolny trójkąt można zamienić na prostokąt;

– dowolny prostokąt można zamienić na kwadrat, oznaczmy $DG = a$, $GF = b$ i niech $ABCD$ będzie kwadratem o boku c, takim że $c^2 = ab$, wówczas $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a-c}{c-b}$, a więc $CE \parallel GA \parallel FB$ wobec twierdzenia odwrotnego do tw. Talesa, zatem przesunięcie ΔCGK o $\overrightarrow{CE}$ daje ΔEHA, a przesunięcie ΔHGF o $\overrightarrow{FB}$ daje ΔAKB;

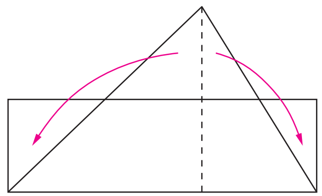


– dowolną liczbę kwadratów można zamienić na jeden (wystarczy wykazać to dla dwóch).



Teraz kwadratura koła.

Potrzebne spostrzeżenie: Dowolny wielokąt można pociąć na mniejsze wielokąty, z których da się ułożyć kwadrat.

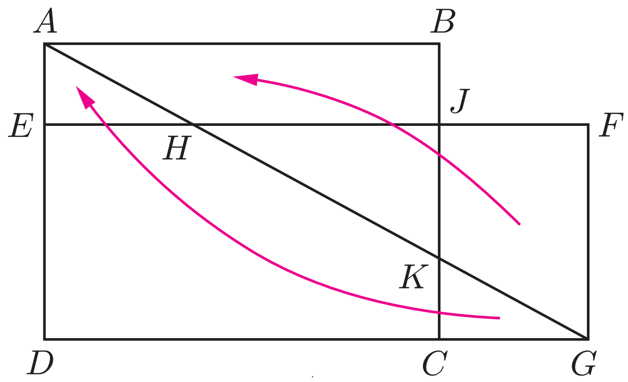


Oto uzasadnienie:

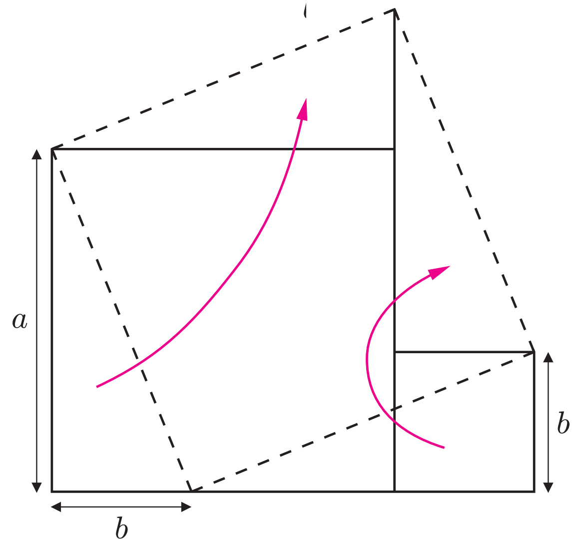
– dowolny wielokąt można pociąć na trójkąty;

– dowolny trójkąt można zamienić na prostokąt;

– dowolny prostokąt można zamienić na kwadrat, oznaczmy $DG = a$, $GF = b$ i niech $ABCD$ będzie kwadratem o boku c, takim że $c^2 = ab$, wówczas $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a-c}{c-b}$, a więc $CE \parallel GA \parallel FB$ wobec twierdzenia odwrotnego do tw. Talesa, zatem przesunięcie ΔCGK o $\overrightarrow{CE}$ daje ΔEHA, a przesunięcie ΔHGF o $\overrightarrow{FB}$ daje ΔAKB;



– dowolną liczbę kwadratów można zamienić na jeden (wystarczy wykazać to dla dwóch).



Wniosek: Dla wykonania kwadratury koła wystarczy zbudowanie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych w stosunku $1 : 2\pi$.

Wniosek: Dla wykonania kwadratury koła wystarczy zbudowanie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych w stosunku $1 : 2\pi$.

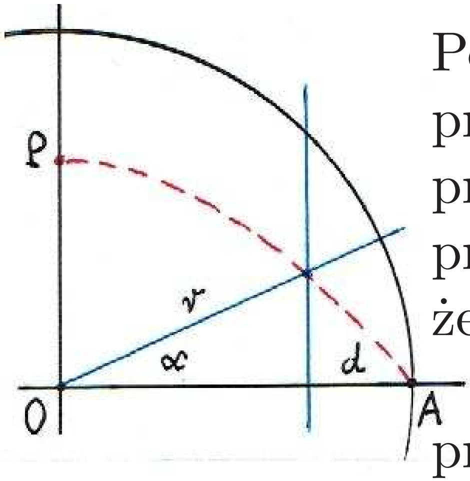
Zmieniając bowiem jednokładnie ten trójkąt w stosunku r otrzymamy trójkąt o polu $\frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$, czyli równym polu koła o promieniu r.

Dłuższa przyprostokątna tego trójkąta to długość okręgu o promieniu r – znajdowanie odcinka o tej długości nazywa się *rektyfikacją* (wyprostowaniem) okręgu.

Zatem rektyfikacja okręgu i kwadratura koła to zadania równoważne.

Zarówno Dinostratos, jak Archimedes konstruowali właśnie takie trójkąty, czyli rozwiązywali rektyfikację okręgu.
Używali do tego nieco bardziej skomplikowanych przyrządów, niż konchoidograf.

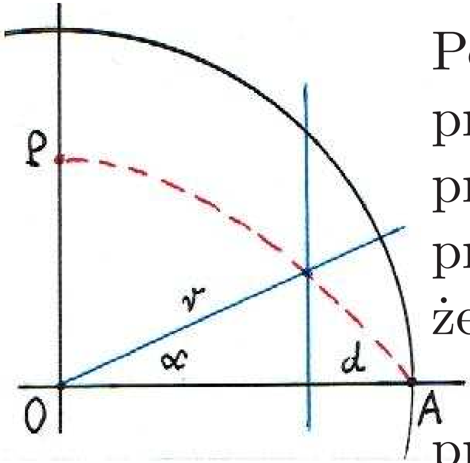
Dinostratos używał kwadratrysy Hippiasza (– V wiek),
który wcale nie rozwiązywał kwadratury, lecz trysekcję kąta.



Powstaje ona jako linia zakreślona przez wspólny punkt prostej obracającej się wokół środka okręgu i prostej przesuwającej się równolegle ku środkowi tego okręgu, przy czym oba te ruchy są jednostajne i dobrane w ten sposób, że obie proste pokrywają się, gdy pierwsza z nich

przyjmuje kierunek równoległy do drugiej, co wyraża prosty warunek $\frac{d}{\alpha} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}}$, gdzie a to promień okręgu.

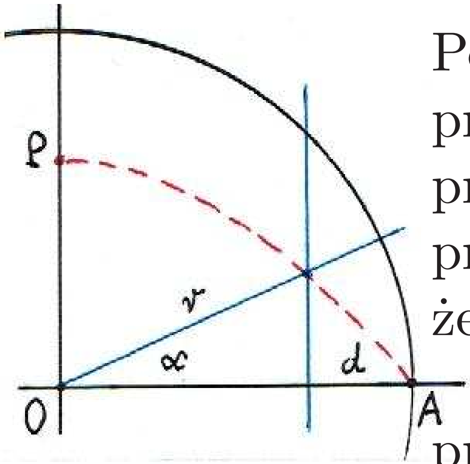
Dinostratos używał kwadratrysy Hippiasza (– V wiek),
który wcale nie rozwiązywał kwadratury, lecz trysekcję kąta.



Powstaje ona jako linia zakreślona przez wspólny punkt prostej obracającej się wokół środka okręgu i prostej przesuwającej się równolegle ku środkowi tego okręgu, przy czym oba te ruchy są jednostajne i dobrane w ten sposób, że obie proste pokrywają się, gdy pierwsza z nich przyjmuje kierunek równoległy do drugiej, co wyraża prosty warunek $\frac{d}{\alpha} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}}$, gdzie a to promień okręgu.

Hippiasz za pomocą tej krzywej realizował podział kąta na dowolną liczbę równych części, bo, gdy n-krotnie zmniejszymy d,
to n-krotnie zmniejszy się kąt α.

Dinostratos używał kwadratrysy Hippiasza (– V wiek),
który wcale nie rozwiązywał kwadratury, lecz trysekcję kąta.



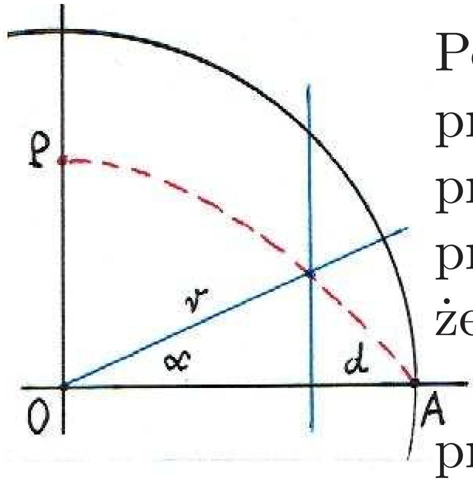
Powstaje ona jako linia zakreślona przez wspólny punkt prostej obracającej się wokół środka okręgu i prostej przesuwającej się równolegle ku środkowi tego okręgu, przy czym oba te ruchy są jednostajne i dobrane w ten sposób, że obie proste pokrywają się, gdy pierwsza z nich przyjmuje kierunek równoległy do drugiej, co wyraża prosty warunek $\dfrac{d}{\alpha} = \dfrac{a}{\frac{\pi}{2}}$, gdzie a to promień okręgu.

Stąd $d = \frac{2a}{\pi}\alpha$ i $r = \dfrac{a-d}{\cos\alpha} = \dfrac{a - \frac{2a}{\pi}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2a}{\pi} \cdot \dfrac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2a}{\pi} \cdot \dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$ dla $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ponieważ $\frac{\varphi}{\sin\varphi} \longrightarrow 1$ dla $\varphi \to 0$, więc $OP = \frac{2a}{\pi}$

Dinostratos używał kwadratrysy Hippiasza (– V wiek),
który wcale nie rozwiązywał kwadratury, lecz trysekcję kąta.

Powstaje ona jako linia zakreślona przez wspólny punkt prostej obracającej się wokół środka okręgu i prostej przesuwającej się równolegle ku środkowi tego okręgu, przy czym oba te ruchy są jednostajne i dobrane w ten sposób, że obie proste pokrywają się, gdy pierwsza z nich



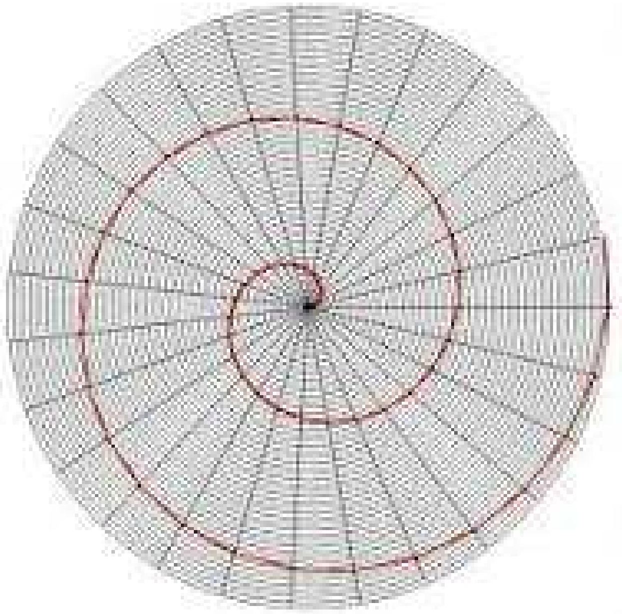
przyjmuje kierunek równoległy do drugiej, co wyraża prosty warunek $\dfrac{d}{\alpha} = \dfrac{a}{\frac{\pi}{2}}$, gdzie a to promień okręgu.

Stąd $d = \frac{2a}{\pi}\alpha$ i $r = \dfrac{a-d}{\cos\alpha} = \dfrac{a - \frac{2a}{\pi}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2a}{\pi} \cdot \dfrac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2a}{\pi} \cdot \dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$ dla $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ponieważ $\frac{\varphi}{\sin\varphi} \longrightarrow 1$ dla $\varphi \to 0$, więc $OP = \frac{2a}{\pi}$

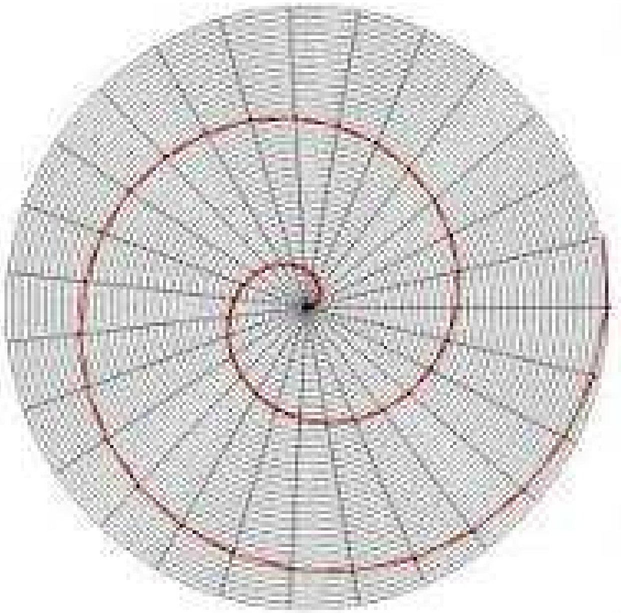
i przedłużając OA czterokrotnie otrzymujemy trójkąt POQ
o żądanej proporcji przyprostokątnych, bo $\frac{2a}{\pi} : 4a = 1 : 2\pi$.

Archimedes też użył złożenia jednostajnego obrotu
z jednostajnym przemieszczeniem:

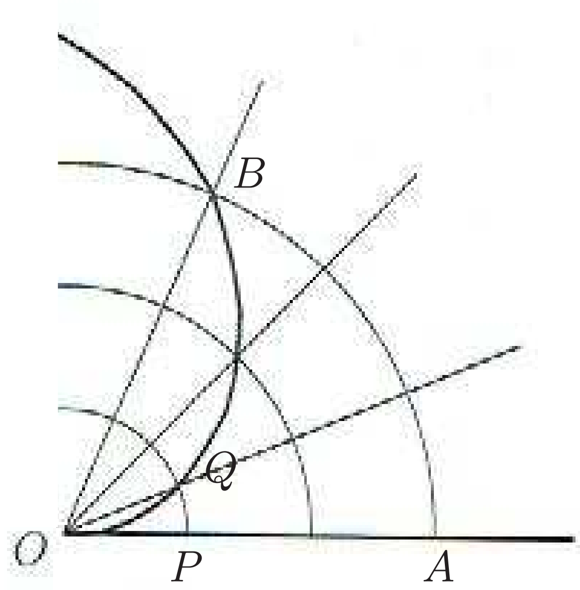


Po obracającym się promieniu oddala się
od środka obrotu punkt i tworzy
spiralę Archimedesa,
co można zapisać w układzie biegunowym
jako $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ dla pewnej stałej a.

Archimedes też użył złożenia jednostajnego obrotu
z jednostajnym przemieszczeniem:



Po obracającym się promieniu oddala się
od środka obrotu punkt i tworzy
spiralę Archimedesa,
co można zapisać w układzie biegunowym
jako $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ dla pewnej stałej a.



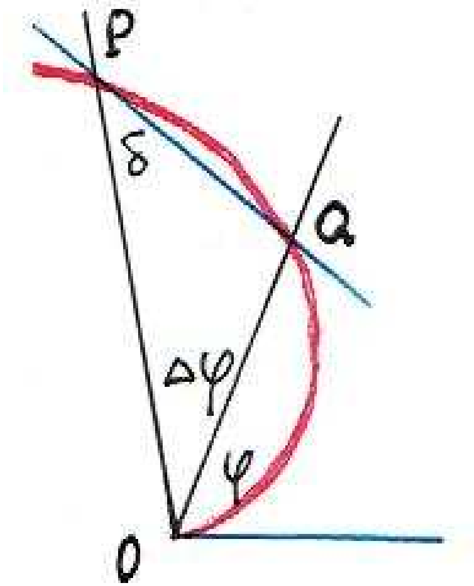
Za pomocą tej spirali też można uzyskać
podział kąta na dowolną liczbę n równych części,
co na rysunku jest pokazane dla $n = 3$:
ponieważ okrąg o środku O przez P ma promień
trzykrotnie mniejszy od okręgu przez A,
więc $\sphericalangle AOQ = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$.

Archimedes udowodnił bardzo przydatną własność swojej spirali:

w punkcie $r(\varphi)$ tangens kąta między styczną do spirali
a promieniem wodzącym jest równy φ.

Archimedes udowodnił bardzo przydatną własność swojej spirali:

w punkcie $r(\varphi)$ tangens kąta między styczną do spirali a promieniem wodzącym jest równy φ.

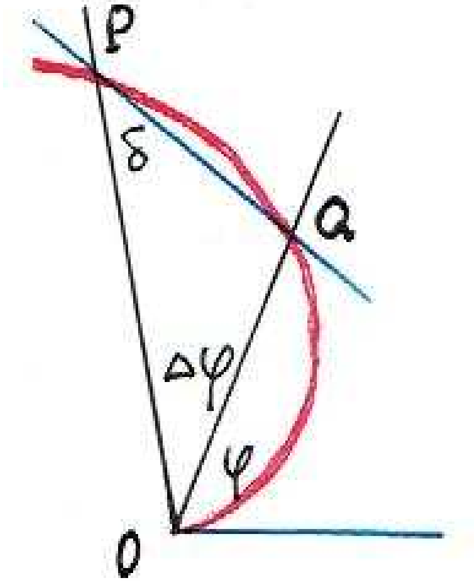


Niech $P = r(\varphi + \Delta\varphi)$, $Q = r(\varphi)$ i $\sphericalangle OPQ = \delta$.

Przy $\Delta\varphi \to 0$ sieczna PQ staje się styczną,
a kąt δ kątem, o którym mówi dowodzona własność.
Z twierdzenia sinusów mamy $\dfrac{\sin\delta}{a\varphi} = \dfrac{\sin(\pi - (\delta + \Delta\varphi))}{a(\varphi + \Delta\varphi)}$,
czyli $(\varphi + \Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin(\delta + \Delta\varphi) =$
$= \varphi(\sin\delta\cos\Delta\varphi + \cos\delta\sin\Delta\varphi)$,
a więc $(\varphi + \Delta\varphi - \varphi\cos\Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin\Delta\varphi\cos\delta$.

Archimedes udowodnił bardzo przydatną własność swojej spirali:

w punkcie $r(\varphi)$ tangens kąta między styczną do spirali a promieniem wodzącym jest równy φ.



Niech $P = r(\varphi + \Delta\varphi)$, $Q = r(\varphi)$ i $\sphericalangle OPQ = \delta$.

Przy $\Delta\varphi \to 0$ sieczna PQ staje się styczną, a kąt δ kątem, o którym mówi dowodzona własność.

Z twierdzenia sinusów mamy $\dfrac{\sin\delta}{a\varphi} = \dfrac{\sin(\pi - (\delta + \Delta\varphi))}{a(\varphi + \Delta\varphi)}$,

czyli $(\varphi + \Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin(\delta + \Delta\varphi) =$

$= \varphi(\sin\delta\cos\Delta\varphi + \cos\delta\sin\Delta\varphi)$,

a więc $(\varphi + \Delta\varphi - \varphi\cos\Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin\Delta\varphi\cos\delta$.

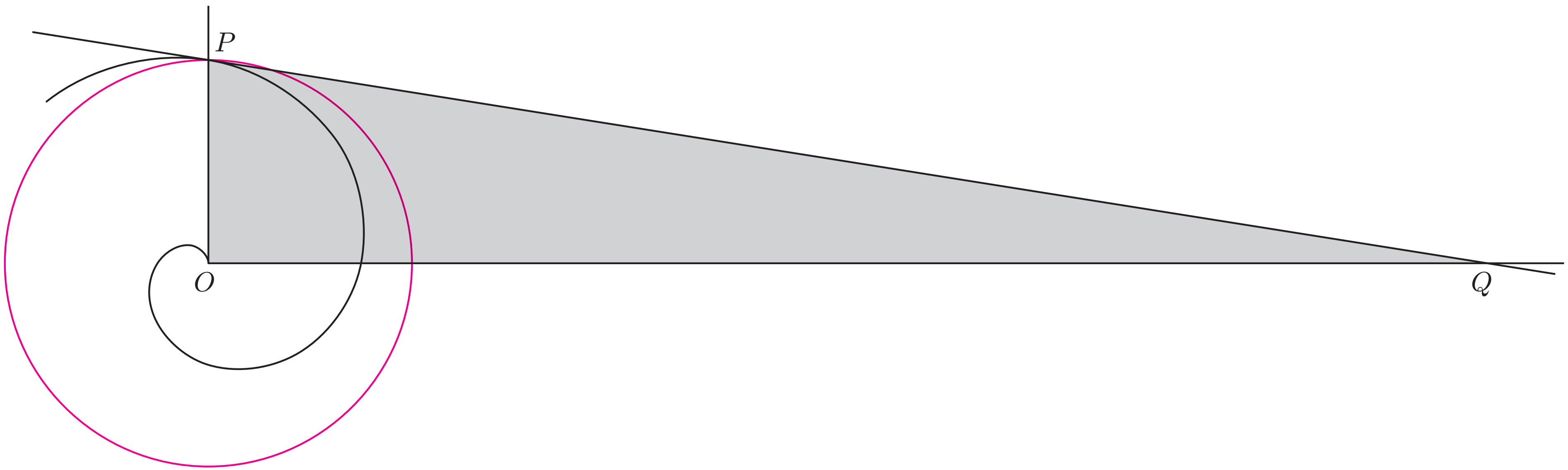
Ostatecznie $\operatorname{ctg}\delta = \dfrac{1}{\sin\Delta\varphi} + \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} - \dfrac{\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} = \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \dfrac{1-\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} =$

$$= \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2} \xrightarrow[\Delta\varphi\to 0]{} \frac{1}{\varphi}.$$

Rysując więc styczną w $r(2\pi)$ otrzymujemy trójkąt, w którym

$$\frac{OQ}{OP} = \operatorname{tg}\sphericalangle OPQ = 2\pi$$

czyli rektyfikację i kwadraturę.



O ile konchoidograf i jego użytkowanie przypominają posługiwanie się cyrklem i linijką, o tyle urządzenia potrzebne do realizacji kwadratur Dinostratosa i Archimedesa mogą budzić wątpliwości.

Nie chodzi tutaj o sporządzenie przyrządu rysującego kwadratysę czy spiralę. To da się zrobić.

W przypadku kwadratrysy zastrzeżenia budzić może fakt, że punkt wspólny zbliżających się prostych jest trudny do precyzyjnego zlokalizowania, a więc dokładność narysowania końcowego punktu kwadratrysy jest niezbyt wielka.

W przypadku zaś spirali potrzebne jest narysowanie stycznej, co również jest trudne do precyzyjnej realizacji.

Ale idźmy dalej.

By zrealizować podwojenie sześcianu, mogą przydać się średnie proporcjonale.

To, jeszcze w latach 40. ubiegłego wieku obecne w szkole, pojęcie określa się następująco:

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ *stanowią* n *średnich proporcjonalnych liczb* a *i* b *jeśli zachodzi* $\dfrac{a}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2} = \ldots = \dfrac{x_{n-1}}{x_n} = \dfrac{x_n}{b}$.

Jedna średnia proporcjonalna to średnia geometryczna.

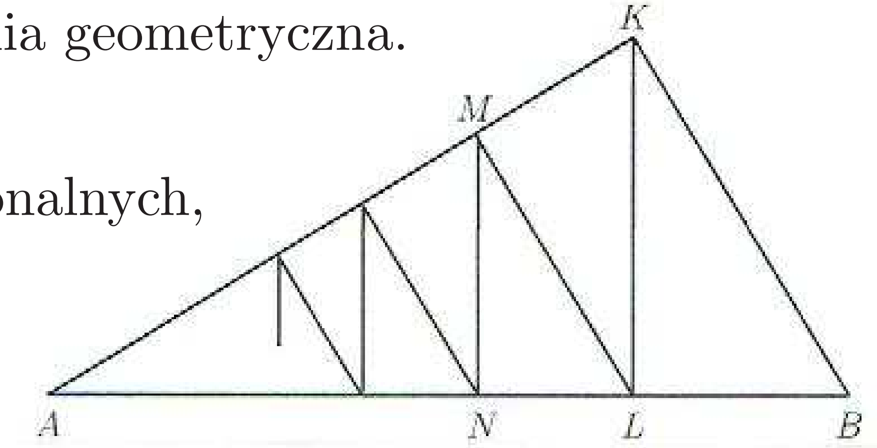
By zrealizować podwojenie sześcianu, mogą przydać się średnie proporcjonale.

To, jeszcze w latach 40. ubiegłego wieku obecne w szkole, pojęcie określa się następująco:

$x_1,\ x_2,\ \dots,x_{n-1},\ x_n$ *stanowią* n *średnich proporcjonalnych liczb* a *i* b *jeśli zachodzi* $\dfrac{a}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dots = \dfrac{x_{n-1}}{x_n} = \dfrac{x_n}{b}$.

Jedna średnia proporcjonalna to średnia geometryczna.

Trójkąt prostokątny dostarcza dowolnie długi ciąg średnich proporcjonalnych, bo $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AL}{AM} = \dfrac{AM}{AN} = \dots$

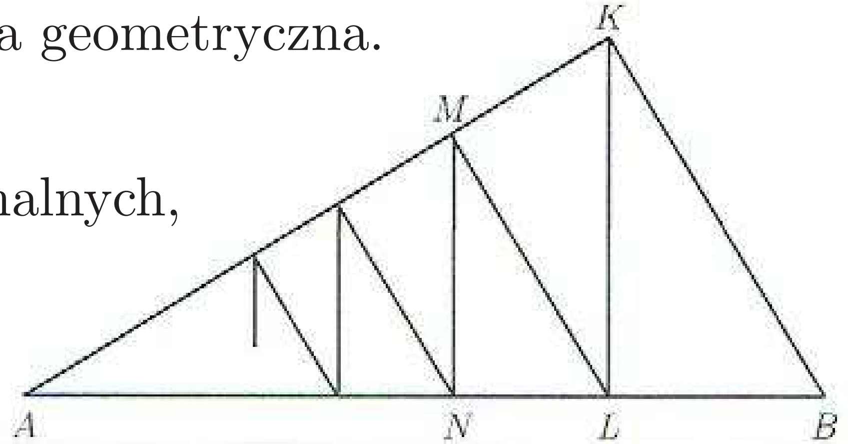


By zrealizować podwojenie sześcianu, mogą przydać się średnie proporcjonale.

To, jeszcze w latach 40. ubiegłego wieku obecne w szkole, pojęcie określa się następująco:

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ stanowią n średnich proporcjonalnych liczb a i b jeśli zachodzi $\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}$.

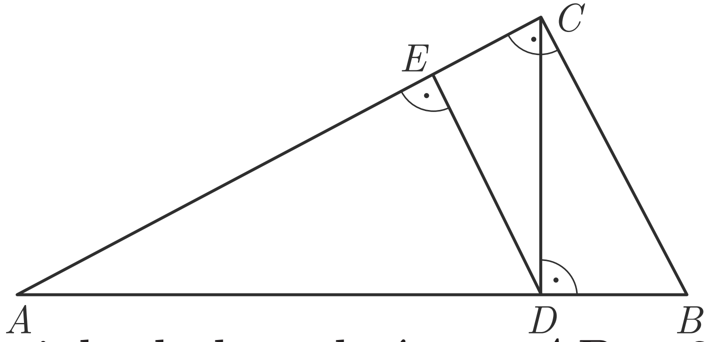
Jedna średnia proporcjonalna to średnia geometryczna.



Trójkąt prostokątny dostarcza dowolnie długi ciąg średnich proporcjonalnych, bo $\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AM} = \frac{AM}{AN} = \ldots$

Dwie średnie proporcjonalne dla a i $2a$ dają podwojenie sześcianu, bo jeśli $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, to $y = \frac{x^2}{a}$ i $y^2 = 2ax$,

a więc $\frac{x^4}{a^2} = 2ax$, czyli $x^3 = 2a^3$.



Zatem $x = \sqrt[3]{2}a$, potrzebny jest więc trójkąt, jak obok, w którym $AB = 2AE$.

Archytas posłużył się rozumowaniem, które później zyskało nazwę
analiza Starożytnych.

Polega to na przyjęciu, że mamy już poszukiwany obiekt
i kolekcjonujemy (a więc staramy się odnaleźć) najrozmaitsze jego właściwości,
bo przecież to niemożliwe, by jedyną jego cechą było spełnianie
definiującego go warunku.
A wśród uzyskanych jego cech być może znajdą się i takie,
które pozwolą nam go skonstruować.

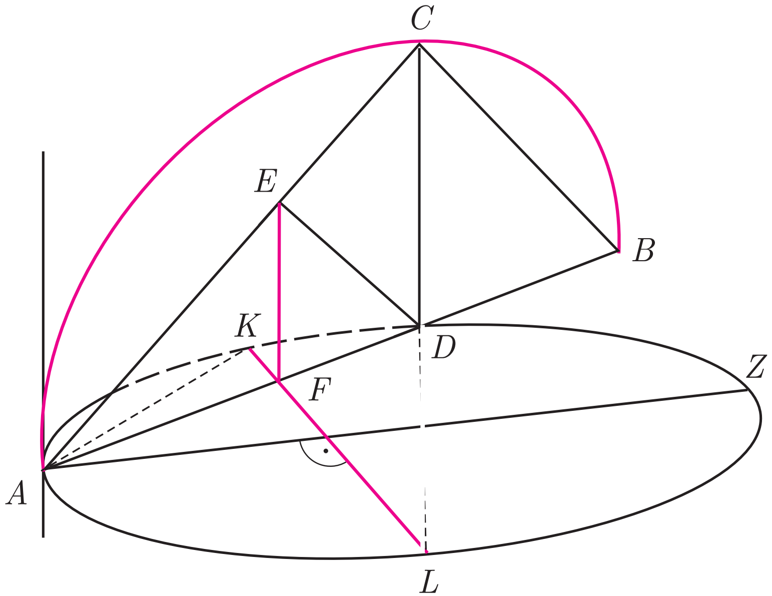
Archytas posłużył się rozumowaniem, które później zyskało nazwę
analiza Starożytnych.

Polega to na przyjęciu, że mamy już poszukiwany obiekt
i kolekcjonujemy (a więc staramy się odnaleźć) najrozmaitsze jego właściwości,
bo przecież to niemożliwe, by jedyną jego cechą było spełnianie
definiującego go warunku.
A wśród uzyskanych jego cech być może znajdą się i takie,
które pozwolą nam go skonstruować.

Załóżmy więc, że mamy poszukiwany trójkąt.
Możemy nawet dać mu byt materialny (np. wykonać go z drutu),
jak też wyposażyć w półokrąg (również druciany),
w który – jako trójkąt prostokątny – jest wpisany.

I to jest przyrząd, z którym Archytas przystąpił do konstruowania
podwojenia sześcianu.

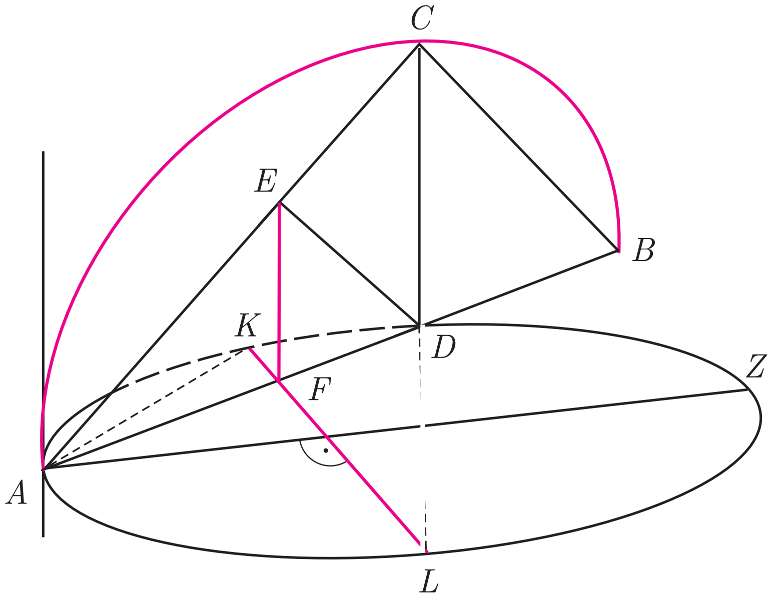
Konstrukcja (jak uprzedzałem!) będzie przestrzenna.



Na płaszczyźnie rysujemy okrąg o średnicy $2a$. W jednym z jego punktów wystawiamy prostopadłą i w płaszczyźnie tej prostej umieszczamy nasz trójkąt z opisanym na nim półokręgiem. Obracamy ten trójkąt względem narysowanej prostej dotąd, aż spodek jego wysokości znajdzie się na narysowanym okręgu.

Wskażemy trzy powierzchnie przechodzące przez punkt C.

Konstrukcja (jak uprzedzałem!) będzie przestrzenna.

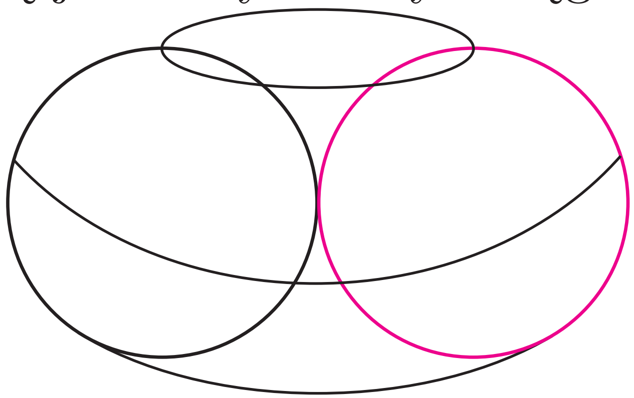


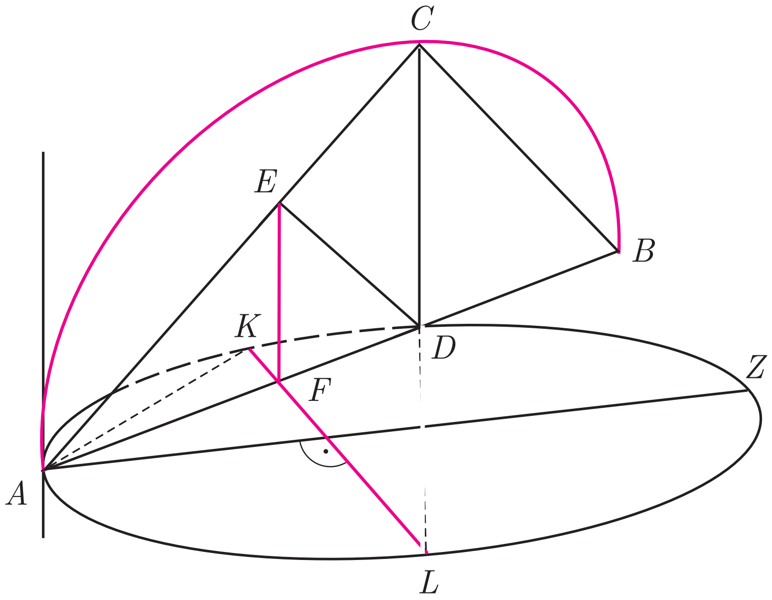
Na płaszczyźnie rysujemy okrąg o średnicy $2a$. W jednym z jego punktów wystawiamy prostopadłą i w płaszczyźnie tej prostej umieszczamy nasz trójkąt z opisanym na nim półokręgiem. Obracamy ten trójkąt względem narysowanej prostej dotąd, aż spodek jego wysokości znajdzie się na narysowanym okręgu.

Wskażemy trzy powierzchnie przechodzące przez punkt C.

Pierwsza jest oczywista – to walec, którego podstawą jest narysowany okrąg.

Druga to “torus bez dziurki”, który powstałby, gdybyśmy czerwony półokrąg uzupełnili do okręgu, i obracali dokoła narysowanej prostej.



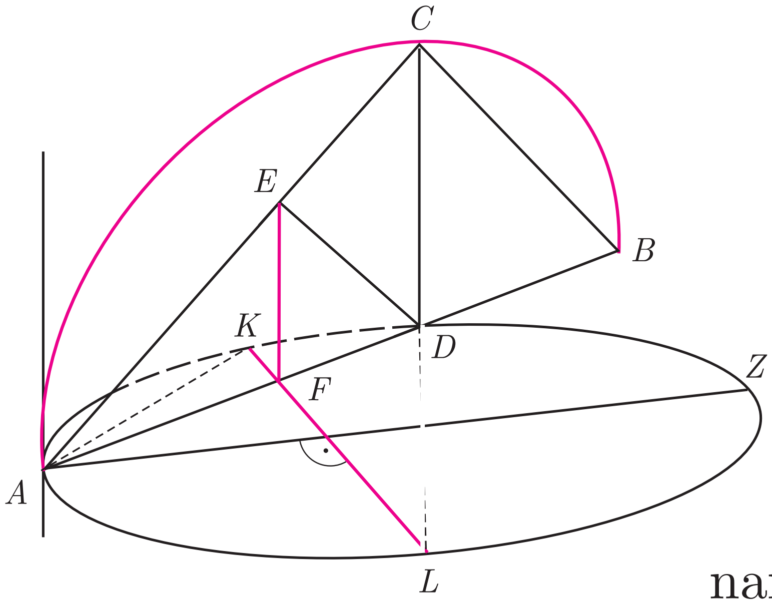


Aby wskazać trzecią powierzchnię opuszczamy prostopadłą z E, otrzymując F, przez który prowadzimy prostopadłą do średnicy okręgu, otrzymując K i L, jednakowo odległe od A, bo cięciwa prostopadła do średnicy jest przez nią połowiona.

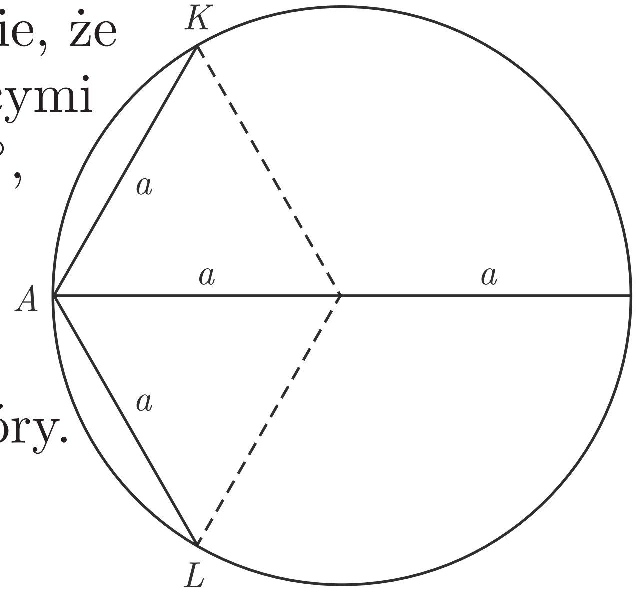
Mamy $EF^2 = AF \cdot FD = KF \cdot FL$.

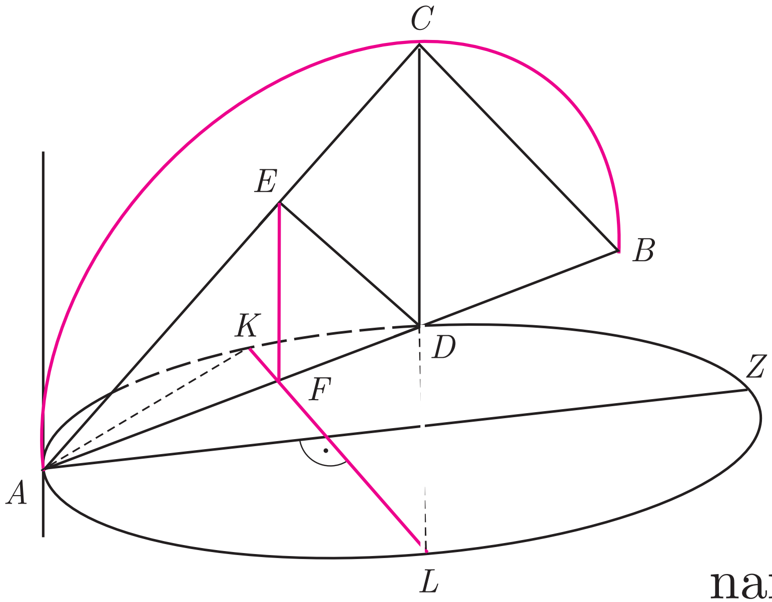
Pierwsza z równości to fakt, że w trójkącie prostokątnym wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na które dzieli przeciwprostokątną.

Druga wynika z potęgi F względem okręgu (iloczyn odcinków na przecinających się siecznych jest równy).
A skoro $EF^2 = KF \cdot FL$, to trójkąt KEF jest prostokątny i można na nim opisać okrąg o środku na średnicy AZ.
Płaszczyzna tego okręgu jest prostopadła do AZ, zatem $AK = AL = AE = a$.
Proste z A przechodzące przez ten okrąg tworzą stożek, na którym leży punkt C.

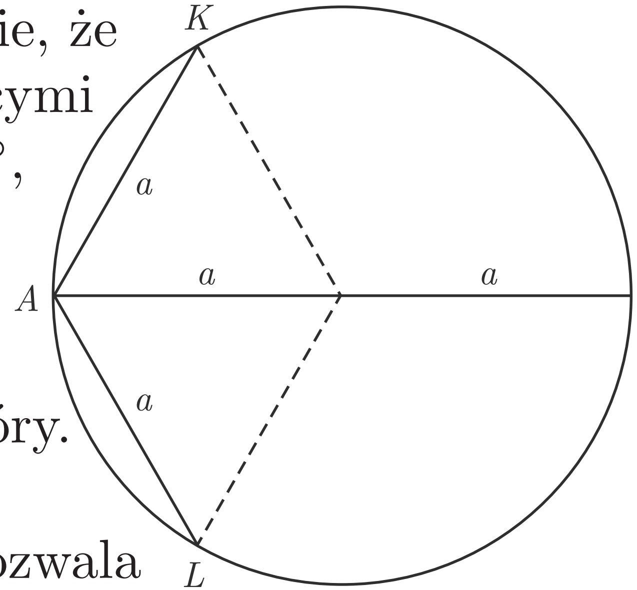


Lokalizację punktu C, a więc jednoznaczne określenie stożka kończy spostrzeżenie, że kąt między tworzącymi a osią stożka to $60°$, co widać, gdy spojrzy się na początkowo narysowany okrąg z góry.





Lokalizację punktu C, a więc jednoznaczne określenie stożka kończy spostrzeżenie, że kąt między tworzącymi a osią stożka to $60°$, co widać, gdy spojrzy się na początkowo narysowany okrąg z góry.



Wiemy już zatem, jak skonstruować punkt C, co pozwala odtworzyć cały trójkąt ABC, czyli uzyskać podwojenie sześcianu.

Podziwowi dla konstrukcji Archytasa towarzyszyć jednak musi refleksja, że o ile konstrukcje kwadratury koła Dinostratosa i Archimedesa operują dość skomplikowanymi środkami, to środki użyte przez Archytasa niewątpliwie są znacznie bardziej złożone.

Pytanie o prawomocność używania w konstrukcjach geometrycznych takich czy innych środków została – właśnie z racji rozwiązania przez Architasa problemu podwojenia sześcianu – postawiona przez współczesnego mu Platona.

Po argumenty w tej kwestii Platon sięgnął do ogólnej koncepcji nauki, w której głosił skrajnie radykalne tezy.

Nauka ma zdaniem Platona polegać na intelektualnym kontakcie ze światem idei, w którym panuje wszystko ogarniający ład.

Rzeczywistość, z którą mamy do czynienia, jest tylko bardzo niedoskonałą podpowiedzią, jak owe idee wyglądają. Im bardziej będziemy umieli się od realiów oderwać, tym bliżej znajdziemy się świata idei.

W szczególności czerpanie wiedzy z doświadczenia i wyciąganie wniosków ze skuteczności praktycznych działań tylko zaciemnia prawdę świata idei.

Stąd posługiwanie się przez Archytasa (i współczesnego im Hippiasza) urządzeniami mechanicznymi w celu uzyskania faktów matematycznych jest nie dość, że kłamliwe, to jeszcze świętokradcze.

Debatę między Platonem i Archytasem Cyprian Norwid *(o dziwo wcale nie nazywał się Kamil, lecz Cyprian Ksawery Gerard Walenty Norwid)* opisał w postaci następującego wiersza/dialogu

ARCHITA

Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem,
Aż żal mi było bezwiedności gminu,
Mimo że wieczną on jest miarą czynów!. . .
Więc – Geometrii myślane promienie
(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenię,
Sferyczność w drzewie wykłuwszy toporem
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce. . .
To – któż wie. . .

PLATO

Boskie zmysłowiąc obrysy
Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotnść niebieskiego zgrubisz,
Więc filozofię, Grecję może zgubisz. . .

ARCHITA

0! Plato. . . padam przed prawdy bez-końcem
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,
Tak wielce wszystko przesiąkłe jest słońcem,
Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;
Dlatego świętych nie zniżę arkanów,
Ani ojczyzny krągłą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które cię dziś rażą, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie
(Lubo promienność uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba,
Tą siły ramion zmnożywszy nauką,
Nie zdoła broni się jak morska ryba?. . .

PLATO

Przyjdzie i tobie dzień zwycięstwa – sztuko!. . .

Norwid, co z wiersza nie do końca wynika, opowiadał się po stronie Platona, nazywając stanowisko Archytasa zdegradowaniem kontemplacji.

Platon włączanie mechaniki do konstrukcji geometrycznych
nie tylko krytykował, lecz proponował restrykcyjne przepisy
prawdziwych konstrukcji:
po pierwsze, konstrukcja musi być realizowana na płaszczyźnie,
po drugie, musi być realizowania przez kreślenie linii doskonałych.

Ten ostatni warunek oznacza, że muszą to być linie ślizgające się po sobie.

Takich linii jest trzy: prosta, okrąg, linia śrubowa,
przy czym tylko pierwsze dwie są płaskie.

I tak został ogłoszony kanon konstrukcji geometrycznej, obowiązujący do dziś:
konstruować wolno jedynie
używając jednostronnej linijki bez podziałki i cyrkla.

Norwid, co z wiersza nie do końca wynika, opowiadał się po stronie Platona, nazywając stanowisko Archytasa zdegradowaniem kontemplacji.

Platon włączanie mechaniki do konstrukcji geometrycznych
nie tylko krytykował, lecz proponował restrykcyjne przepisy
prawdziwych konstrukcji:
po pierwsze, konstrukcja musi być realizowana na płaszczyźnie,
po drugie, musi być realizowania przez kreślenie linii doskonałych.

Ten ostatni warunek oznacza, że muszą to być linie ślizgające się po sobie.

Takich linii jest trzy: prosta, okrąg, linia śrubowa,
przy czym tylko pierwsze dwie są płaskie.

I tak został ogłoszony kanon konstrukcji geometrycznej, obowiązujący do dziś:
konstruować wolno jedynie
używając jednostronnej linijki bez podziałki i cyrkla.

Wszystkie inne przytoczone tu konstrukcje są późniejsze od konstrukcji Archytasa, a więc i deklaracji Platona i – jak widać – mają jego zakazy za nic.

Zakazy Platona zostały przez ogół matematyków przyjęte
dopiero w matematyce, odradzającej się po czasach zastoju
podczas pięćset lat trwającego panowania Imperium Rzymskiego
(choć przykład Pascala pokazuje, że nie przez wszystkich).

Trysekcji kąta, kwadratury koła i podwojenia sześcianu
zatem znów nie umiano wykonać.
Ale na stwierdzenie, że jest to niewykonalne
przyszło poczekać kolejne tysiąc lat.

Wówczas, to jest w XIX wieku, problem konstruowalności sprowadzono
do pytania o rozwiązalność odpowiednich równań algebraicznych wśród liczb,
które można otrzymać z liczb występujących w warunkach zadania
przez dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie
i wyciąganie pierwiastka kwadratowego.

W przypadku trysekcji kąta α należało w taki sposób rozwiązać równanie $4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$, co dla niektórych kątów (np. 90°) da się zrobić, a dla niektórych (np. 60°) nie.

W przypadku trysekcji kąta odpowiednie równanie to $x^3 = 2$, co sprowadza się do pytania, czy z liczb wymiernych przez wielokrotne stosowanie czterech działań i wyciągania pierwiastków kwadratowych da się uzyskać $\sqrt[3]{2}$.

Oba te problemy uprościł i rozwiązał Pierre Wanzel w 1837 roku.

Metody wprowadzone przez Wanzela nie dawały się zastosować do problemu kwadratury koła ze względu na niewystarczającą znajomość algebraicznych własności liczby π.

Sprawę wyjaśnił dopiero Ferdinand Lindemann, który w 1882 roku wykazał, że π jest liczbą przestępną (niealgebraiczną), czyli nie jest pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych.

Tak więc restrykcyjne warunki narzucone przez Platona uniemożliwiają wykonanie trysekcji dowolnego kąta, kwadratury koła i podwojenia sześcianu, choć Starożytni wszystkie te konstrukcje wykonywali.

Sprawa kwadratury koła powróciła za sprawą twierdzenia Felixa Hausdorffa o paradoksalnym rozkładzie, które mówi, że

jeśli w przestrzeni dane są dwa zbiory ograniczone o niepustym wnętrzu, to można jeden z nich podzielić na skończoną liczbę części, z których – po przemieszczeniu – można uzyskać drugi.

Konsekwencją tego twierdzenia jest wynik Stefana Banacha i Alfreda Tarskiego, mówiący, że kulę można podzielić na pięć części, z których – po przemieszczeniu – da się uzyskać dwie takie kule jak wyjściowa.

Banach udowodnił, że na płaszczyźnie paradoksalnego rozkładu nie ma. W szczególności każdy rozkład zachowuje pole.

Tarski postawił więc problem, czy można koło podzielić na skończoną liczbę części, z których da się ułożyć kwadrat.

Problem rozwiązał w 1990 roku Miklos Laczkovich, opisując taki rozkład. Ma on ponad 10^{50} części. Części te są niemierzalne, choć składają się na (oczywiście) mierzalny kwadrat.