KULA KULI NIERÓWNA

IV problem Hilberta:

Jak wyglądają wszystkie przyzwoite geometrie?

IV problem Hilberta:

Jak wyglądają wszystkie przyzwoite geometrie?

Są to wszystkie możliwe metryzacje przestrzeni rzutowej lub jej wypukłych podzbiorów.

IV problem Hilberta:

Jak wyglądają wszystkie przyzwoite geometrie?

Są to wszystkie możliwe metryzacje przestrzeni rzutowej lub jej wypukłych podzbiorów.

Jak więc wyglądają te metryzacje?

Parę objaśnień na wszelki wypadek:

• Metryzacja przestrzeni rzutowej to taka metryka, że proste rzutowe (dane nam wraz z przestrzenią) okażą się prostymi lub okręgami wielkimi w sensie metryki.

Parę objaśnień na wszelki wypadek:

- Metryzacja przestrzeni rzutowej to taka metryka, że proste rzutowe (dane nam wraz z przestrzenią) okażą się prostymi lub okręgami wielkimi w sensie metryki.
- Prosta w metryce ρ to taki zbiór punktów, że dla dowolnych trzech z nich A, B, C zachodzi

$$\begin{aligned}\rho(AB) + \rho(BC) = \rho(AC) \vee \\ \vee \rho(BC) + \rho(CA) = \rho(BA) \vee \\ \vee \rho(CA) + \rho(AB) = \rho(CB).\end{aligned}$$

Parę objaśnień na wszelki wypadek:

• Metryzacja przestrzeni rzutowej to taka metryka, że proste rzutowe (dane nam wraz z przestrzenią) okażą się prostymi lub okręgami wielkimi w sensie metryki.

• Prosta w metryce ρ to taki zbiór punktów, że dla dowolnych trzech z nich A, B, C zachodzi

$$\begin{aligned}\rho(AB) + \rho(BC) = \rho(AC) \vee \\ \vee \rho(BC) + \rho(CA) = \rho(BA) \vee \\ \vee \rho(CA) + \rho(AB) = \rho(CB).\end{aligned}$$

• Okrąg wielki w metryce ρ to okrąg, na którym istnieją takie trzy punkty A, B, C, że dla każdego z punktów X tego okręgu zachodzi

$$\begin{aligned}\rho(AX) + \rho(XB) = \rho(AB) \vee \\ \vee \rho(BX) + \rho(XC) = \rho(BC) \vee \\ \vee \rho(CX) + \rho(XA) = \rho(CA).\end{aligned}$$

Odpowiedź:

Georg Hamel, *Über die Geometrien in denen Geraden die Kürzesten sind*, Math.Ann. 57(1903), 231-264

W jednej przestrzeni nie mogą być zrealizowane obie możliwości: gdy są same okręgi wielkie, jedyną metryką jest **metryka eliptyczna** i zmetryzowana jest cała przestrzeń;

w przeciwnym przypadku metryzacji podlega tylko przestrzeń afiniczna i jej wypukłe ograniczone podzbiory otwarte.

W przypadku całej przestrzeni afinicznej odpowiednie metryki to **metryki Minkowskiego**.

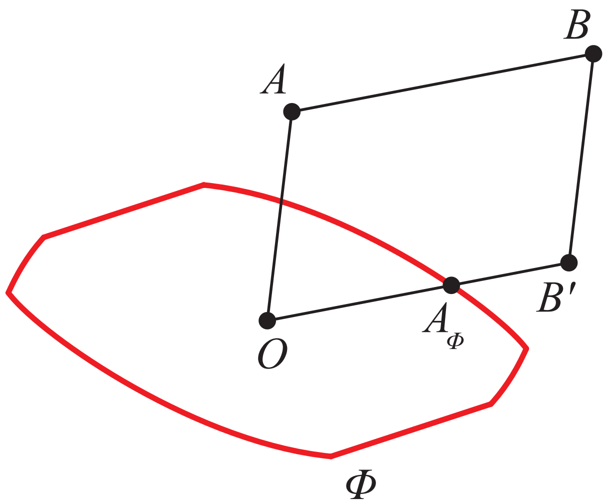
W przypadku wypukłego ograniczonego podbioru przestrzeni afinicznej są to **metryki Hilberta**.

Dalej będzie mowa tylko o metryzacji płaszczyzny afinicznej.

Pojęciem ogólniejszym od metryk Minkowskiego jest **metryka dana przez ciało cechujące**.

Dalej będzie mowa tylko o metryzacji płaszczyzny afinicznej.

Pojęciem ogólniejszym od metryk Minkowskiego jest **metryka dana przez ciało cechujące**. Definicja na obrazku:



$$\rho_\Phi(AB) = \frac{|OB'|}{|OA_\Phi|},$$

gdzie Φ ogranicza zbiór wypukły o środku symetrii O,
$ABB'O$ jest równoległobokiem,
a punkt A_Φ jest przecięciem Φ z półprostą $\overrightarrow{OB'}$.

Przykłady:

Gdy Φ jest kwadratem $(1, 0)(0, 1)(-1, 0)(0, -1)$, otrzymujemy metrykę miejską – oczywiście, nie jest to metryka Minkowskiego.

Przykłady:

Gdy Φ jest kwadratem $(1, 0)(0, 1)(-1, 0)(0, -1)$, otrzymujemy metrykę miejską – oczywiście, nie jest to metryka Minkowskiego.

Gdy Φ jest elipsą otrzymujemy metrykę euklidesową (poprawna nazwa, bo otrzymana geometria to geometria euklidesowa).

Przykłady:

Gdy Φ jest kwadratem $(1, 0)(0, 1)(-1, 0)(0, -1)$, otrzymujemy metrykę miejską – oczywiście, nie jest to metryka Minkowskiego.

Gdy Φ jest elipsą otrzymujemy metrykę euklidesową (poprawna nazwa, bo otrzymana geometria to geometria euklidesowa).

Teraz przeprowadzimy dowód, że ρ_Φ jest metryką przesuwalną i odpowiemy na pytanie, kiedy jest metryką Minkowskiego.

Przykłady:

Gdy Φ jest kwadratem $(1, 0)(0, 1)(-1, 0)(0, -1)$, otrzymujemy metrykę miejską – oczywiście, nie jest to metryka Minkowskiego.

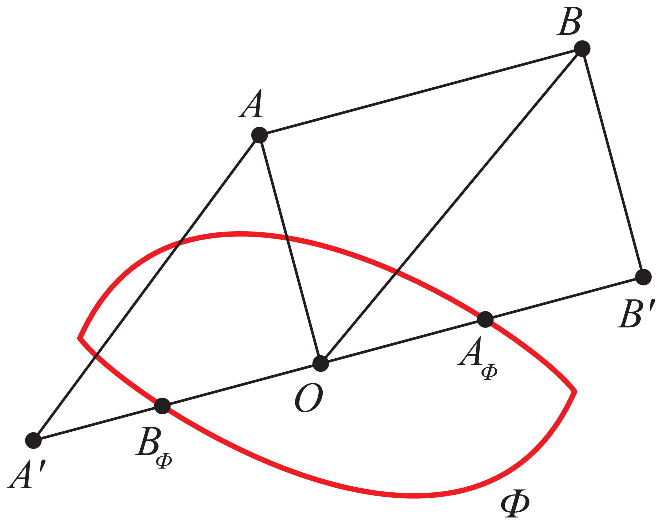
Gdy Φ jest elipsą otrzymujemy metrykę euklidesową (poprawna nazwa, bo otrzymana geometria to geometria euklidesowa).

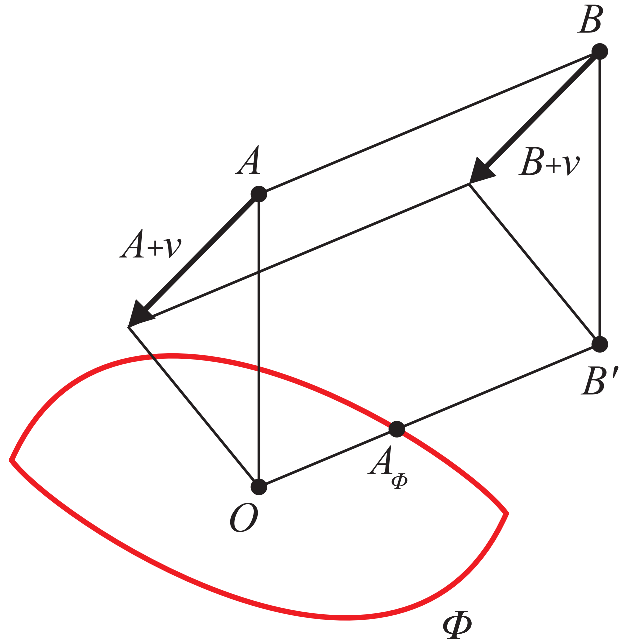
Teraz przeprowadzimy dowód, że ρ_Φ jest metryką przesuwalną i odpowiemy na pytanie, kiedy jest metryką Minkowskiego.

Dalej rozpatrzymy pytanie, jak od własności Φ zależy zdefiniowana przez nią geometria.

Wszystko, poza nierównością trójkąta, to oczywista oczywistość:

$$\rho_\Phi(AB) = 0 \leftrightarrow \rho(OB') = 0 \leftrightarrow \rho(AB) = 0 \leftrightarrow a = b$$





$$\rho_\Phi(AB) = \rho_\Phi(BA) \qquad \rho_\Phi(AB) = \rho_\Phi((A+v)(B+v))$$

Równie łatwo jest zauważyć, że

$$\rho(AX) + \rho(XB) = \rho(AB) \rightarrow \rho(OX') + \rho(X'B') = \rho(OB') \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{\rho(OX')+\rho(X'B')=\rho(OB')}{\rho(OA_\Phi)} \rightarrow \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(AB),$$

czyli, że jeśli X jest punktem prostej afinicznej AB, to jest punktem prostej metrycznej AB.

Aby wykazać, że ρ_Φ jest metryką należy wykazać jeszcze, że

$$\rho(AX) + \rho(XB) > \rho(AB) \rightarrow \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) \geq \rho_\Phi(AB).$$

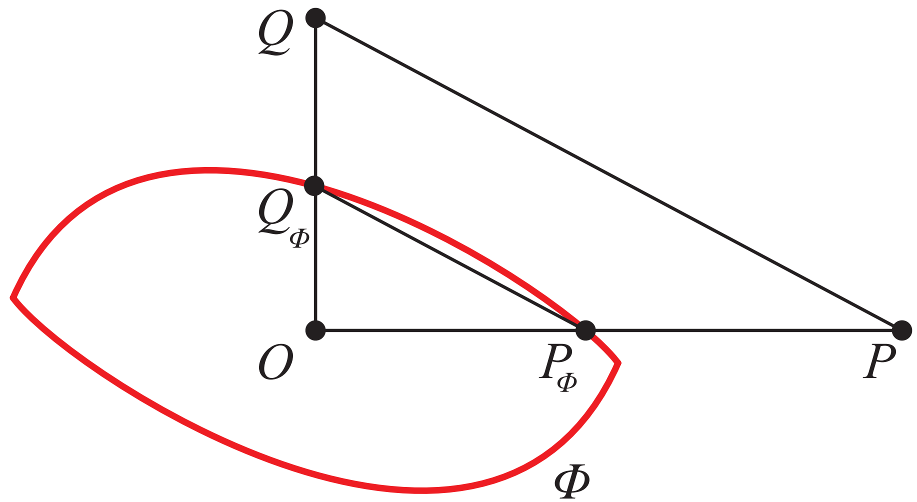
Natomiast, by wykazać, że jest metryką Minkowskiego, należy wykazać więcej:

$$\rho(AX) + \rho(XB) > \rho(AB) \rightarrow \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) > \rho_\Phi(AB),$$

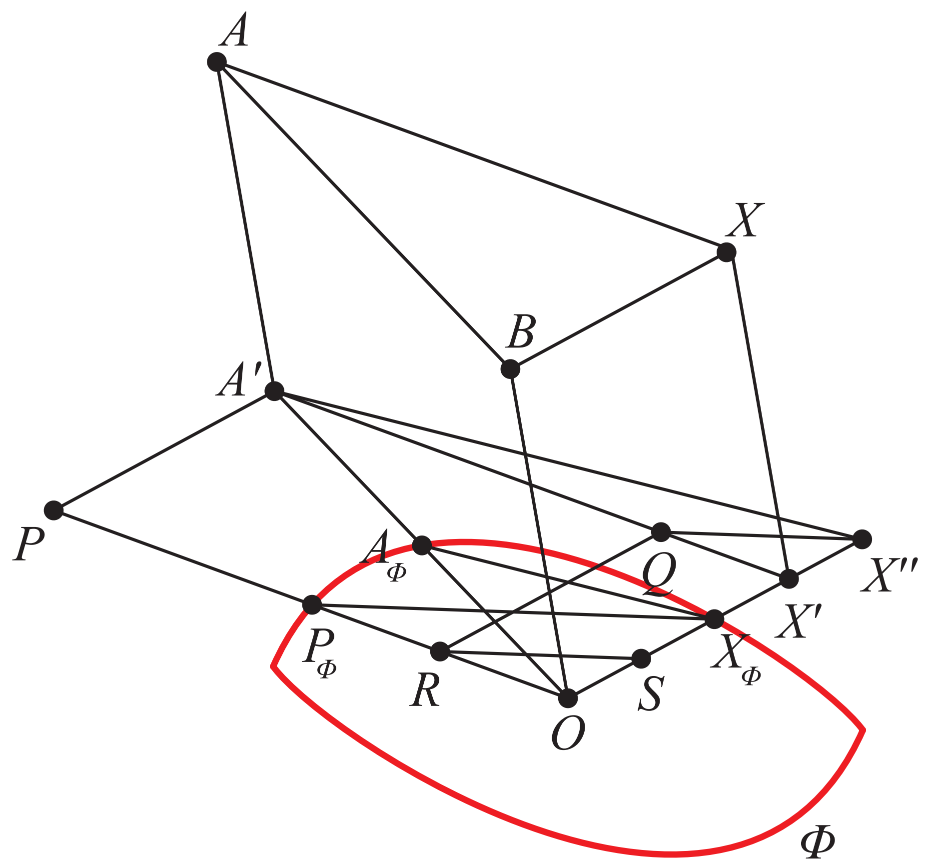
czyli, że jeśli punkt X nie jest punktem prostej afinicznej, to nie jest punktem prostej metrycznej.

Uwaga techniczna:

$$\rho_\Phi(OP) = \rho_\Phi(OQ) \leftrightarrow PQ \parallel P_\Phi Q_\Phi$$

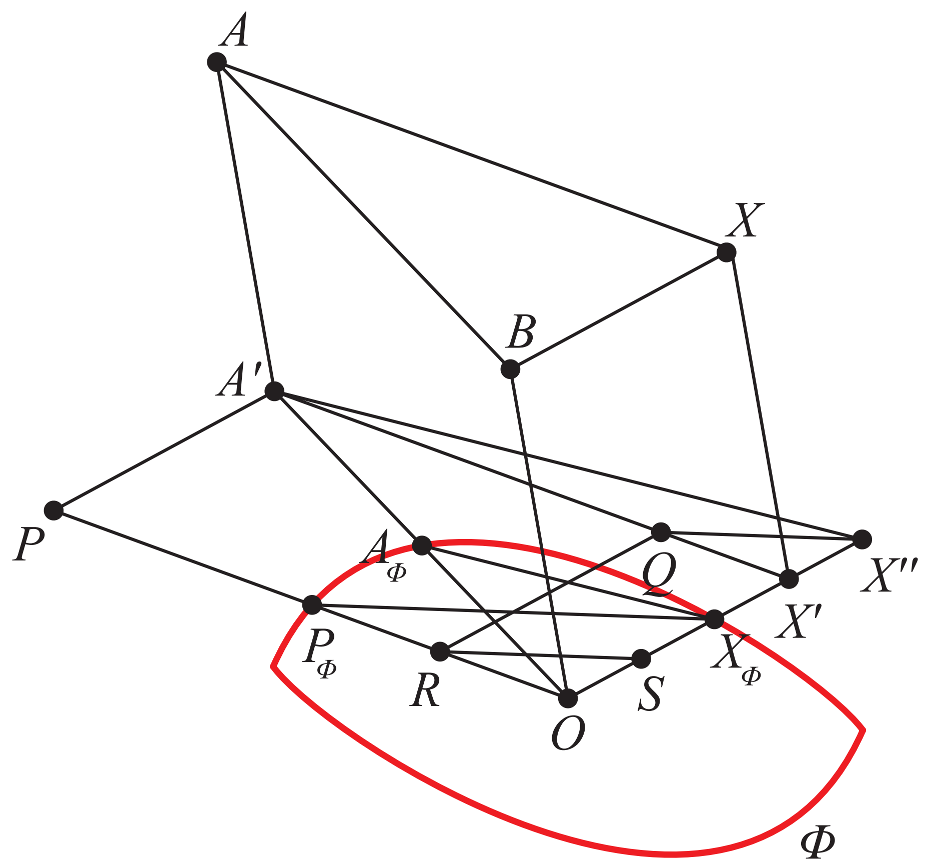


Bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho_\Phi(XB) < \rho_\Phi(AB)$.



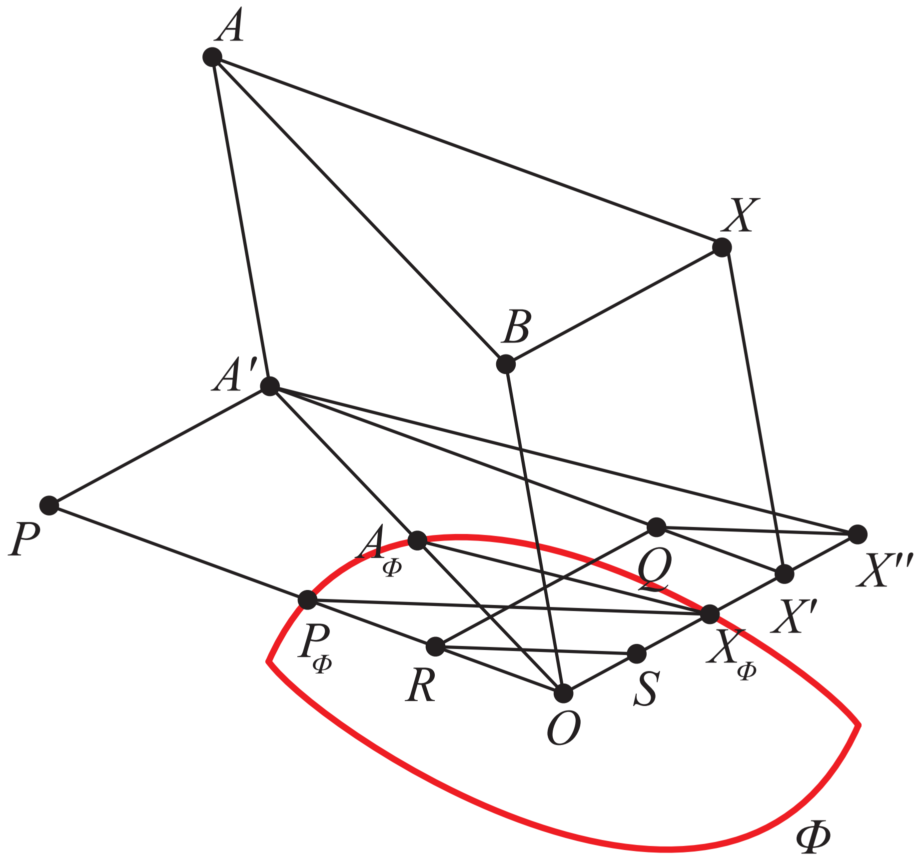
$AA'OB$, $AA'X'X$, $XX'OB$ i $A'X'OP$ są równoległobokami;
$X''O \parallel X'O$ i $X''A' \parallel X_\Phi A_\Phi$ oraz $QX' \parallel X'A'$ i $X''Q \parallel X_\Phi P_\Phi$;
$QX'OR$ i $X''QRS$ są równoległobokami.

Mamy $\angle OX''Q = \angle OX_\Phi P_\Phi \leq \angle OX_\Phi A_\Phi = \angle OX''A'$. (1)



Zatem $\rho_\Phi(AB) - \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(OX'') - \rho_\Phi(OX') = \rho_\Phi(X'X'') =$
$= \rho_\Phi(OS) = \rho_\Phi(OR) = \rho_\Phi(X'Q) \leq \rho_\Phi(X'A') = \rho_\Phi(AX)$. (2)

Mamy $\angle OX''Q = \angle OX_\Phi P_\Phi \leq \angle OX_\Phi A_\Phi = \angle OX''A'$. (1)

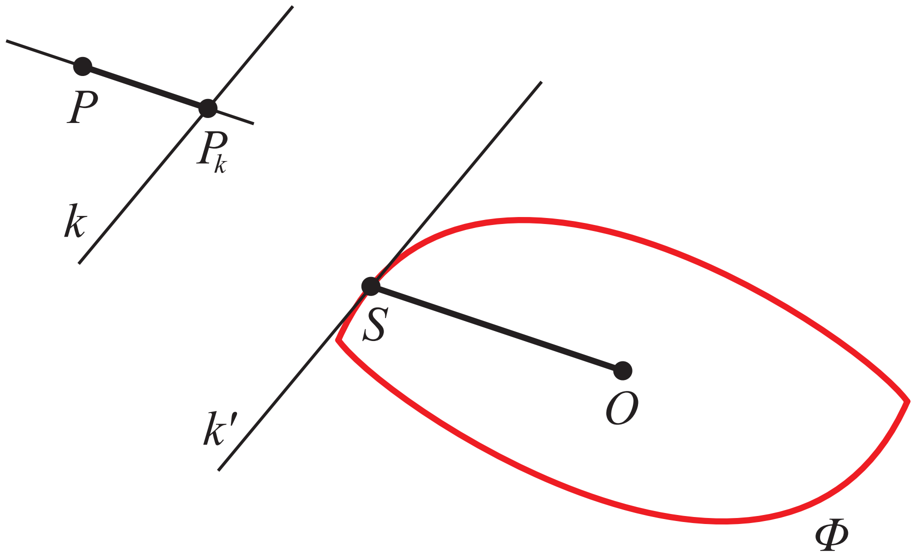


Zatem $\rho_\Phi(AB) - \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(OX'') - \rho_\Phi(OX') = \rho_\Phi(X'X'') =$
$= \rho_\Phi(OS) = \rho_\Phi(OR) = \rho_\Phi(X'Q) \leq \rho_\Phi(X'A') = \rho_\Phi(AX)$. (2)
Jeśli w (1) będzie $<$, to i w (2) będzie $<$.

Zatem ciało cechujące faktycznie daje metrykę, w której okręgami (sferami $(n-1)$-wymiarowymi) są wszystkie obrazy Φ w przesunięciach i jednokładnościach, a samo Φ jest okręgiem (sferą) jednostkowym.

Gdy ciało cechujące jest mocno wypukłe (czyli Φ nie zawiera odcinków), otrzymana metryka jest metryką Minkowskiego.

Rzut prostokątny P_k punktu P na prostą k to najbliższy punktowi P punkt prostej k:



gdy równoległa do k styczna k' do Φ ma z Φ punkt wspólny S, to $PP_k \parallel OS$.

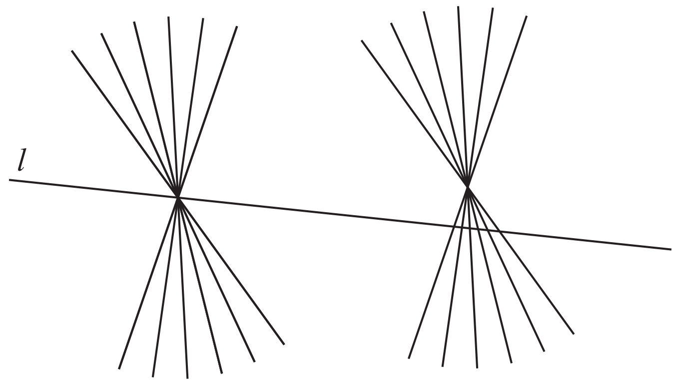
Stąd

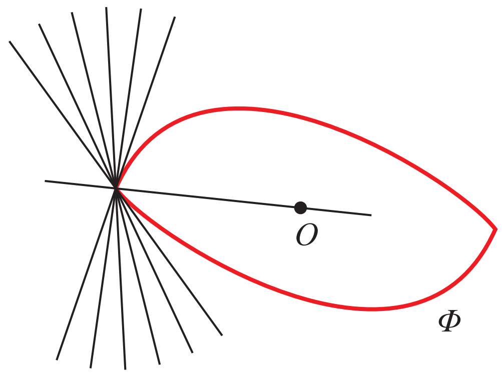
$$k \perp l \leftrightarrow \forall P, Q \in l \ (P_k = Q_k).$$

Oczywiście, $k \perp l_1 \wedge k \perp l_2 \rightarrow l_1 \parallel l_2$.

Łatwo zauważyć, że jednak nie musi być

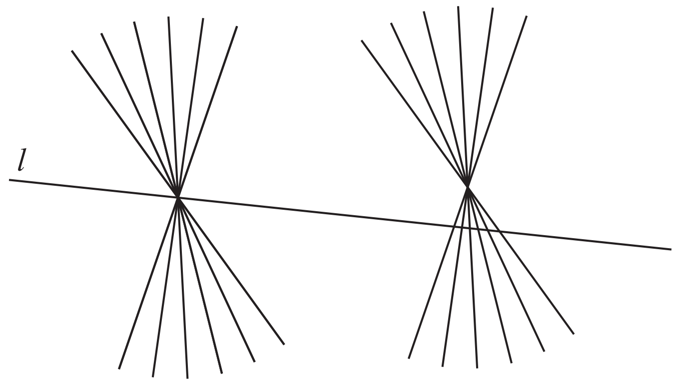
$$k_1 \perp l \wedge k_2 \perp l \rightarrow k_1 \parallel k_2:$$

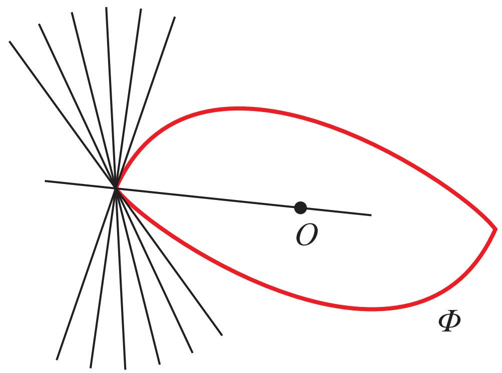




Łatwo zauważyć, że jednak nie musi być

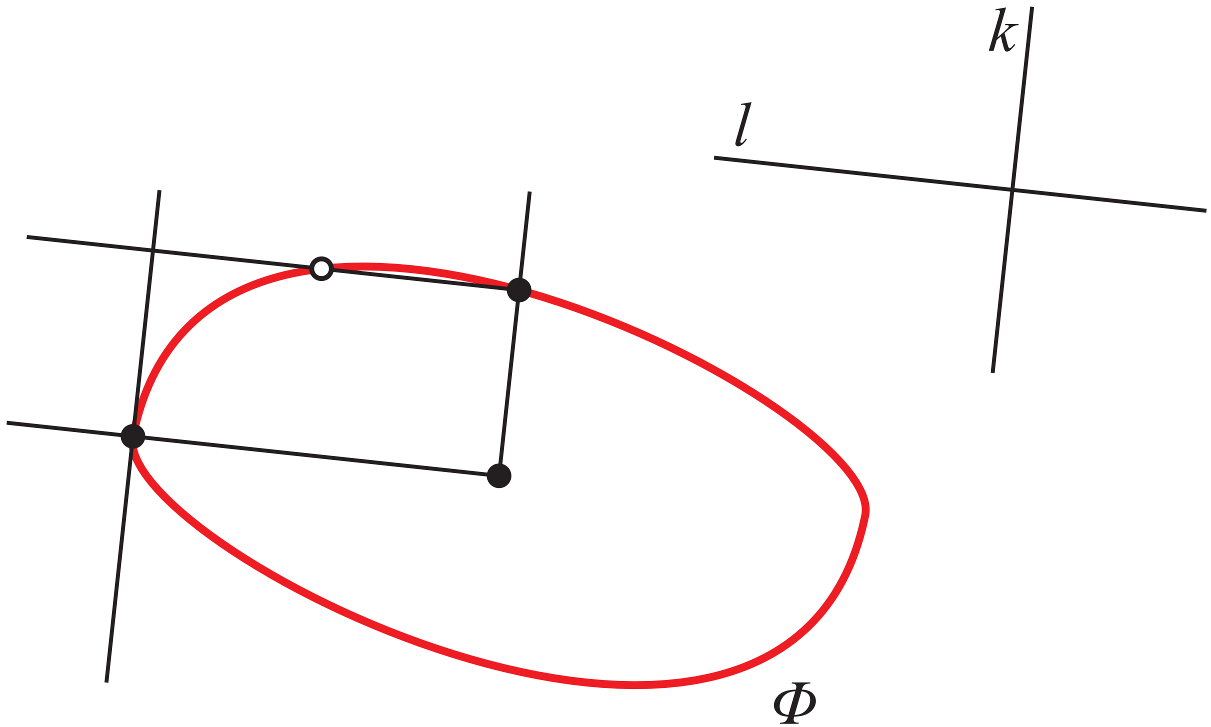
$$k_1 \perp l \wedge k_2 \perp l \to k_1 \parallel k_2:$$





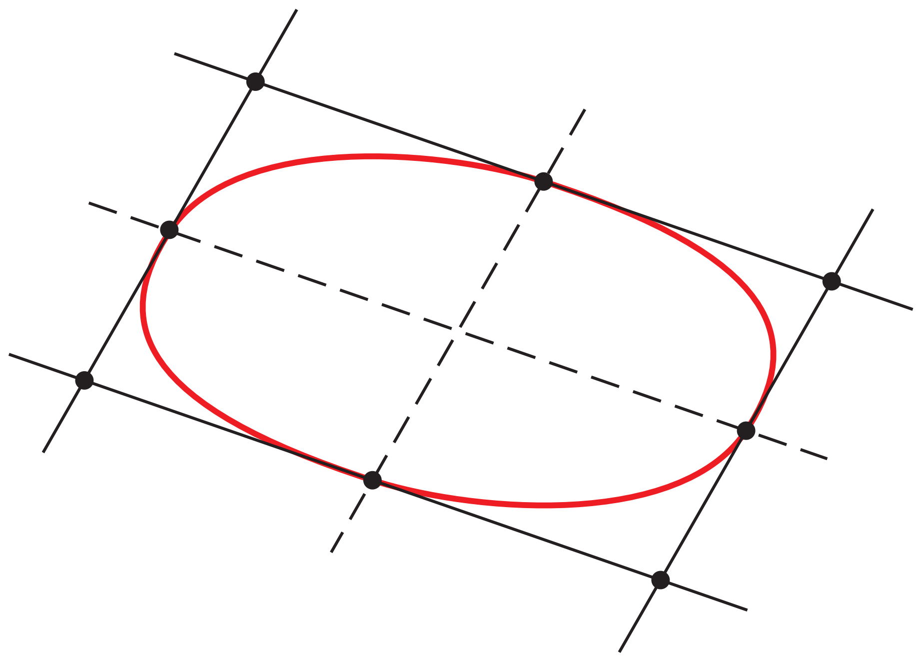
Aby można było jednoznacznie podnosić i opuszczać prostopadłą, Φ musi być gładka.

Nawet dla gładkiej Φ prostopadłość nie musi być symetryczna:



Aby prostopadłość była symetryczna potrzeba i wystarcza, aby Φ miała *własność równoległoboku*, co oznacza, że

jeśli opiszemy na Φ równoległobok, którego dwa przeciwległe boki są styczne do Φ w swoich środkach, to jest tak i dla drugiej pary boków.



Powstaje pytanie, czy każda gładka Φ mająca własność równoległoboku jest elipsą, czyli definiuje geometrię euklidesową.

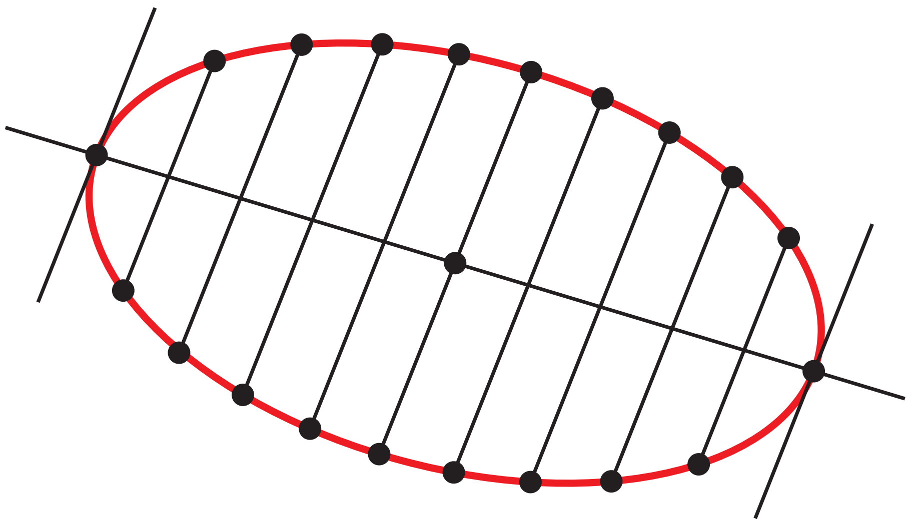
Pytanie okazało się trudne, a odpowiedź negatywna.

Johann Radon, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Ber.Vehr.Sachs.Akad., 68 (1916), 123-128.

Co więc, poza mocną wypukłością ciała, gładkością brzegu i własnością równoległoboku, jest potrzebne, aby geometria była euklidesowa, czyli by Φ była elipsą (elipsoidą)?

Dopełnia te warunki *własność symetrii*:

dla każdej średnicy l krzywej Φ istnieje taka średnica k,
że wszystkie sieczne równoległe do k mają środek na l.



Nazwa warunku bierze się stąd, że implikuje on istnienie symetrii osiowej względem każdej prostej.

Skoro umiemy wyróżnić, spośród geometrii danych w przestrzeni afinicznej przez ciało cechujące, geometrię euklidesową, powstaje też pytanie, jak dalece różnią się one od tej ich najdoskonalszej wersji.

Skoro umiemy wyróżnić, spośród geometrii danych w przestrzeni afinicznej przez ciało cechujące, geometrię euklidesową, powstaje też pytanie, jak dalece różnią się one od tej ich najdoskonalszej wersji.

Odpowiedź jest przykra: różnią się niewiele, a dokładniej:
dla każdej krzywej Φ istnieje taka elipsa (elipsoida) E, że

$$\rho_E \leq \rho_\Phi \leq \sqrt{n} \cdot \rho_E,$$

gdzie n jest wymiarem przestrzeni.

Fritz John, *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions* in Studies and Essays presented to R.Courant..., NY 1948.

W tytule pracy Johna pojawia się hasło Szkoły: poszukujemy ekstremalnych elips: opisanej i wpisanej w Φ.

Dowód dogodnie jest przeprowadzić przez trzy lematy:

Lemat 1. *Dla ograniczonego środkowosymetrycznego ciała wypukłego istnieje zawarta w nim elipsa o maksymalnym polu, co więcej, jest z nim współśrodkowa.*

Lemat 2. *Ze wszystkich rombościanów opisanych na jednostkowej kuli najmniejszą miarę ma kostka.*

Dowód. Rombościan to obraz kostki w powinowactwie prostokątnym o kierunku jednej z głównych przekątnych. Przyjmiemy też, że powinowactwo to ma skalę większą od jedności. Przy takim rozumieniu tej nazwy jego objętość jest postaci

$$V_n(a) = k_n \cdot a \cdot b^{n-1},$$

gdzie a to odległość najdalszego wierzchołka rombościanu od jego środka symetrii (będącego, oczywiście środkiem wymienionej w twierdzeniu kuli); b to promień $(n-1)$-wymiarowej kuli wpisanej w przecięcie rombościanu symetralną odcinka łączącego jego najodleglejsze wierzchołki; k_n to współczynnik charakterystyczny dla wymiaru n przestrzeni (np. $k_2 = 1$, $k_3 = 2/3$).

Skoro rombościan jest opisany na kuli jednostkowej, więc

$$\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \quad \text{i} \quad b = a(a^2-1)^{-(1/2)}.$$

Oznaczmy $$f_n(a) := V_n(a)/k_n = a \cdot b^{n-1} = a^n(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}}.$$

Jak łatwo obliczyć

$$\begin{aligned}
f'(a) = & \\
&= n a^{n-1}(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}} + a^n \cdot \left(-\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2a(a^2-1)^{\frac{-(n+1)}{2}} = \\
&= a^{n-1}(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}}\left(n(a^2-1)-(n-1)a^2\right) = \\
&= a^{n-1}(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}}(a^2-n).
\end{aligned}$$

Zatem ekstremum jest dla $\sqrt{n}$.

Lemat 3. *Jeśli największą elipsoidą zawartą w ciele $\mathcal{C}$ jest kula jednostkowa, to $\mathcal{C}$ zawiera się w kuli o promieniu $\sqrt{n}$.*

Dowód. Niech P będzie punktem $\mathcal{C}$ najdalszym od O – jego środka symetrii (i środka kuli $\mathcal{K}$). Opiszmy na kuli kostkę tak, by Q – jeden z jej wierzchołków – leżał na półprostej $\vec{OP}$. Niech $\mathcal{P}$ będzie symetrycznym uwypukleniem $\mathcal{K} \cup \{P\}$, $\mathcal{Q}$ zaś $\mathcal{K} \cup \{Q\}$.

Przypuśćmy, że Q jest wewnątrz odcinka OP.
Wówczas $$\mathcal{K} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}.$$
$\mathcal{K}$ jest, wobec lematu 2, największą elipsoidą w kostce, więc tym bardziej w $\mathcal{Q}$. Wykonajmy powinowactwo prostokątne φ o hiperpłaszczyźnie stałej przechodzącej przez O, w którym $\varphi(Q) = P$. Obraz $\mathcal{K}$ w φ jest elipsoidą wpisaną w $\mathcal{P}$, a więc zawartą w $\mathcal{C}$ i większą od $\mathcal{K}$ – sprzeczność.
Zatem P jest punktem odcinka OQ i $\rho(OP) \leq \sqrt{n}$.

Dowód twierdzenia Johna:

Oznaczmy największą elipsoidę wpisaną w ciało $\mathcal{C}$ przez $\mathcal{E}$, a przez ψ powinowactwo osiowe przekształcające $\mathcal{E}$ na kulę i wreszcie przez χ jednokładność przekształcającą tę kulę na kulę jednostkową $\mathcal{K}$.

Wobec lematu 3 istnieje kula $\mathcal{K}'$ o promieniu $\sqrt{n}$ zawierająca $\chi(\psi(\mathcal{C}))$. Zatem $\mathcal{E}' := \psi^{-1}(\chi^{-1}(\mathcal{K}))$ jest szukaną elipsoidą, jednokładną z $\mathcal{E}$ w skali $\sqrt{n}$ i zawierającą $\mathcal{C}$.

Dowód twierdzenia Johna:

Oznaczmy największą elipsoidę wpisaną w ciało $\mathcal{C}$ przez $\mathcal{E}$, a przez ψ powinowactwo osiowe przekształcające $\mathcal{E}$ na kulę i wreszcie przez χ jednokładność przekształcającą tę kulę na kulę jednostkową $\mathcal{K}$.

Wobec lematu 3 istnieje kula $\mathcal{K}'$ o promieniu $\sqrt{n}$ zawierająca $\chi(\psi(\mathcal{C}))$. Zatem $\mathcal{E}' := \psi^{-1}(\chi^{-1}(\mathcal{K}))$ jest szukaną elipsoidą, jednokładną z $\mathcal{E}$ w skali $\sqrt{n}$ i zawierającą $\mathcal{C}$.

Morał zamykający:

Wszelkie geometrie skończenie wymiarowe dane przez ciała cechujące różnią się nieistotnie, bo wszystko w nich daje się oszacować dość dobrze tak z góry, jak z dołu przez geometrię euklidesową.