Mierzenie wielokątów i wielościanów

Jakie warunki musi spełniać miara pola czy objętości?

Jakie warunki musi spełniać miara pola czy objętości?

1. $A \equiv B \to m(A) = m(B)$

Jakie warunki musi spełniać miara pola czy objętości?

1. $A \equiv B \to m(A) = m(B)$

2. $A \cap B \subset \partial A \cap \partial B \to m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

Jakie warunki musi spełniać miara pola czy objętości?

1. $A \equiv B \rightarrow m(A) = m(B)$

2. $A \cap B \subset \partial A \cap \partial B \rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

3. $m(A) \geqslant 0$

Jakie warunki musi spełniać miara pola czy objętości?

1. $A \equiv B \to m(A) = m(B)$

2. $A \cap B \subset \partial A \cap \partial B \to m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

3. $m(A) \geqslant 0$

4. $m(\text{kostka jednostkowa}) = 1$

Ponieważ prostokąty

o odpowiednio równych bokach są przystające,

więc pole prostokąta P

jest funkcją długości a i b jego boków

$$m(P) =: f(a, b).$$

Ustalmy jeden z boków i zajmijmy się powstałą funkcją

$$g(a) := f(a, b_0).$$

Ustalmy jeden z boków i zajmijmy się powstałą funkcją

$$g(a) := f(a,\, b_0).$$

Funkcja ta w oczywisty sposób spełnia zależność

$$g(a_1 + a_2) = g(a_1) + g(a_2)$$

dla dowolnych (dodatnich) $a_1,\ a_2$.

Ustalmy jeden z boków i zajmijmy się powstałą funkcją

$$g(a) := f(a, b_0).$$

Funkcja ta w oczywisty sposób spełnia zależność

$$g(a_1 + a_2) = g(a_1) + g(a_2)$$

dla dowolnych (dodatnich) $a_1,\ a_2$.

Zależność ta to równanie funkcyjne

zwane równaniem Cauchy'ego.

Louis Augustin Cauchy, 1789–1857

Nietrudno wykazać, że

dla dowolnej liczby wymiernej w jest

$$g(w \cdot a) = w \cdot g(a).$$

Nietrudno wykazać, że

dla dowolnej liczby wymiernej w jest

$$g(w \cdot a) = w \cdot g(a).$$

Jest tak, bo

$f((k+1)a) = f(ka) + f(a)$, a więc $f(na) = nf(a)$;

$f(a) = f(m \cdot \frac{1}{m} a) = mf(\frac{1}{m} a)$, a więc $f(\frac{1}{m} a) = \frac{1}{m} f(a)$;

$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, a więc $f(0) = 0$;

$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, a więc $f(-x) = -f(x)$.

Nietrudno wykazać, że

dla dowolnej liczby wymiernej w jest

$$g(w \cdot a) = w \cdot g(a).$$

Biorąc więc $g(1) = \alpha_b$, mamy

$$g(w) = \alpha_b \cdot w.$$

Nietrudno wykazać, że

dla dowolnej liczby wymiernej w jest

$$g(w \cdot a) = w \cdot g(a).$$

Biorąc więc $g(1) = \alpha_b$, mamy

$$g(w) = \alpha_b \cdot w.$$

Powstaje pytanie, czy dla dowolnego x jest

$$g(x) = \alpha_b \cdot x.$$

Okazuje się, że

bez dodatkowych założeń

tego udowodnić nie można.

Okazuje się, że

bez dodatkowych założeń

tego udowodnić nie można.

Ale przecież nie wykorzystaliśmy jeszcze

trzeciej własności miary

– tego, że musi być nieujemna.

Wprowadźmy więc

jeszcze jedną funkcję pomocniczą

$$h(x) := g(x) - \alpha_b \cdot x.$$

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

- spełnia równanie Cauchy'ego,

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

- spełnia równanie Cauchy'ego,

Istotnie,

$$h(x+y) = g(x+y) - \alpha_b(x+y) = g(x) + g(y) - \alpha_b x - \alpha_b y = \\ = g(x) - \alpha_b x + g(y) - \alpha_b y = h(x) + h(y).$$

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

• spełnia równanie Cauchy'ego,

• • jest okresowa z okresem 1,

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

• spełnia równanie Cauchy'ego,

• • jest okresowa z okresem 1,

$h(x+1) = h(x) + h(1) = h(x) + g(1) - \alpha_b \cdot 1 = h(x).$

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

• spełnia równanie Cauchy'ego,

• • jest okresowa z okresem 1,

• • • spełnia $h(x) + h(1-x) = 0$,

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

• spełnia równanie Cauchy'ego,

• • jest okresowa z okresem 1,

• • • spełnia $h(x) + h(1-x) = 0$,

a jeśli spełniony jest warunek **3**,

• jest ograniczona z dołu przez $-\alpha_b$.

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

• spełnia równanie Cauchy'ego,

• • jest okresowa z okresem 1,

• • • spełnia $h(x) + h(1 - x) = 0$,

a jeśli spełniony jest warunek **3**,

• jest ograniczona z dołu przez $-\alpha_b$.

W przedziale $[0, 1)$ mamy bowiem

$h(x) = g(x) - \alpha_b x \geqslant -\alpha_b x > -\alpha_b$,

co, wobec okresowości, wystarcza.

Funkcja $h(x) = g(x) - \alpha_b \cdot x$

• spełnia równanie Cauchy'ego,

• • jest okresowa z okresem 1,

• • • spełnia $h(x) + h(1-x) = 0$,

a jeśli spełniony jest warunek **3**,

• jest ograniczona z dołu przez $-\alpha_b$.

Jeśli h nie jest stale równa zeru, to wobec • • •

dla pewnego y przyjmuje wartość ujemną,

ale wtedy

$h(n \cdot y) = n \cdot h(y)$ jest nieograniczenie ujemne.

SPRZECZNOŚĆ!

Zatem dla wszystkich x jest

$$g(x) = \alpha_b \cdot x,$$

czyli $f(a,\, b_0) = \alpha_b \cdot a$, gdzie α_b zależy od (jest funkcją) b_0.

Zatem dla wszystkich x jest

$$g(x) = \alpha_b \cdot x,$$

czyli $f(a,\, b_0) = \alpha_b \cdot a$, gdzie α_b zależy od (jest funkcją) b_0.

Dzieląc inaczej prostokąt, otrzymujemy

dla każdego a

$$\alpha_b(b_1 + b_2) \cdot a = f(a,\, b_1 + b_2) =$$
$$= \alpha_b(b_1) \cdot a + \alpha_b(b_2) \cdot a = (\alpha_b(b_1) + \alpha_b(b_2)) \cdot a,$$

czyli

$$\alpha_b(b_1 + b_2) = \alpha_b(b_1) + \alpha_b(b_2),$$

a więc znowu równanie Cauchy'ego.

Funkcja α_b spełnia równanie Cauchy'ego,
można więc dla niej powtórzyć to, co robiliśmy
z funkcją g, otrzymując dla dowolnego x
$\alpha_b(x) = \beta \cdot x,$

a więc

$f(a, b) = \beta \cdot a \cdot b.$

Gdy teraz zastosujemy własność **4**, otrzymamy
$1 = f(1, 1) = \beta \cdot 1 \cdot 1 = \beta$, czyli $f(a, b) = a \cdot b$,

a więc ostatecznie

pole prostokąta o bokach a i b musi być równe $a \cdot b$.

Nietrudno zauważyć, iż

– zupełnie tak samo, jak dla prostokąta –

można uzyskać stwierdzenie, że

objętość prostopadłościanu o krawędziach a, b, c

musi być równa $a \cdot b \cdot c$.

Nietrudno zauważyć, iż

– zupełnie tak samo, jak dla prostokąta –

można uzyskać stwierdzenie, że

objętość prostopadłościanu o krawędziach $a,\ b,\ c$

musi być równa $a \cdot b \cdot c$.

Zanim zajmiemy się przeniesieniem tych rezultatów na wszystkie wielokąty i wielościany – kilka faktów o równaniach funkcyjnych.

Gdy na rozwiązanie równania Cauchy'ego, nie narzucimy dodatkowych warunków otrzymamy tych rozwiązań wiele

– wrócimy do nich dalej.

Gdy jednak zażądać, powiedzmy, ciągłości od poszukiwanych funkcji, wówczas wiele równań funkcyjnych będzie miało jednoznaczne odpowiedzi.

I wtedy np. jedynym rozwiązaniem równania funkcyjnego

$$L(xy) = L(x) + L(y) \quad \text{jest } \log_a x \quad \text{dla dowolnego } a > 0,$$

a równania funkcyjnego

$$A(x + y) = A(x)A(y) \ - \ \text{funkcja } a^x \quad \text{dla dowolnego } a > 0.$$

Funkcje trygonometryczne $S(x) = \sin cx$ oraz $C(x) = \cos cx$ spełniają oczywiście znane związki (c to dowolna stała)

(1) $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$

(2) $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$

(3) $S(x-y) = S(x)C(y) - C(x)S(y)$

(4) $C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y)$

ale żadne z tych równań, nawet przy założeniu ciągłości, nie daje jedynie funkcji trygonometrycznych.

"Najbliżej" jest (4) – poza funkcjami trygonometrycznymi jest jeszcze $C(x) = d$ i $S(x) = \pm\sqrt{d(1-d)}$ dla $d \in (0,\, 1)$.

Wracamy do wielokątów.

Ponieważ nożyczkami można zrobić

- z dowolnego wielokąta same trójkąty,

Wracamy do wielokątów.

Ponieważ nożyczkami można zrobić

• z dowolnego wielokąta same trójkąty,

• • z dowolnego trójkąta prostokąt,

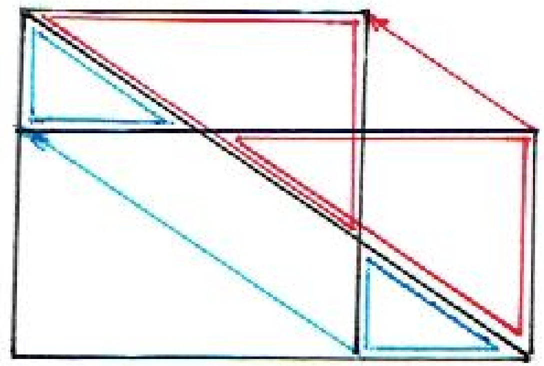
Wracamy do wielokątów.

Ponieważ nożyczkami można zrobić

• z dowolnego wielokąta same trójkąty,

• • z dowolnego trójkąta prostokąt,

• • • z dowolnego prostokąta kwadrat,
a nawet dowolny inny prostokąt o tym samym polu,
(twierdzenie Bolyaia– Gerwiena)



Wracamy do wielokątów.

Ponieważ nożyczkami można zrobić

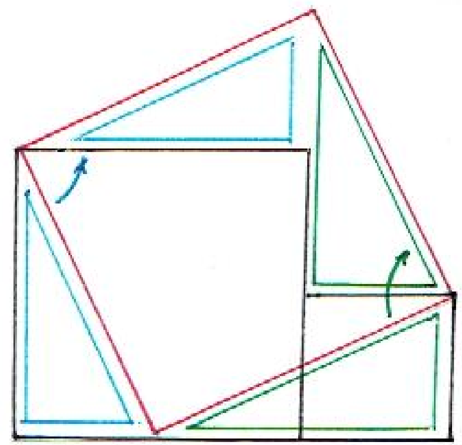
• z dowolnego wielokąta same trójkąty,

• • z dowolnego trójkąta prostokąt,

• • • z dowolnego prostokąta kwadrat,

(twierdzenie Bolyaia– Gerwiena)

• • • • z dwóch kwadratów jeden,



Wracamy do wielokątów.

Ponieważ nożyczkami można zrobić

• z dowolnego wielokąta same trójkąty,

• • z dowolnego trójkąta prostokąt,

• • • z dowolnego prostokąta kwadrat,

(twierdzenie Bolyaia– Gerwiena)

• • • • z dwóch kwadratów jeden,

więc możemy – jak w tangramie –
zamienić dowolny wielokąt na kwadrat o równym mu polu,
co wyznacza zatem to pole jednoznacznie.

(zob. też **konstrukcje**, str. 27 –31)

Przejdźmy do wielościanów

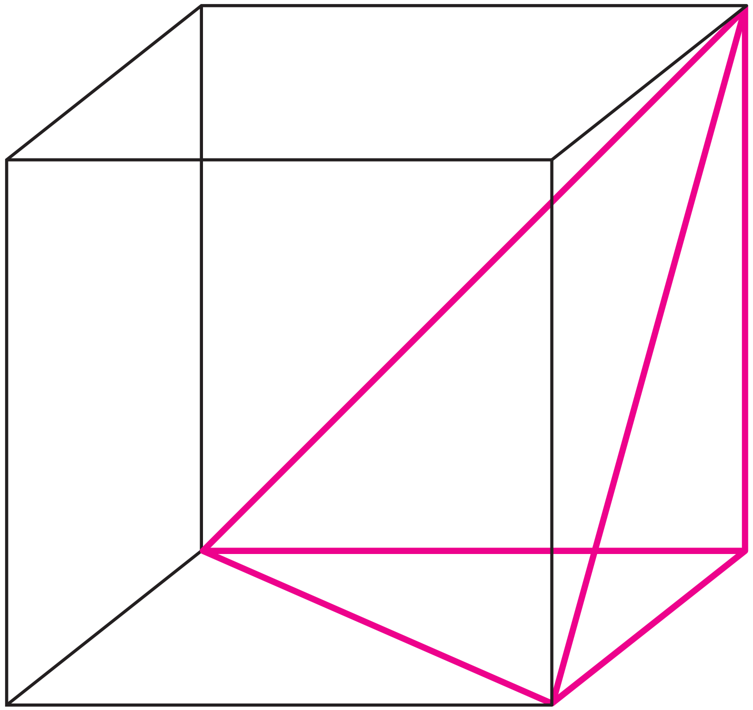
W sposób oczywisty dowolny graniastosłup prosty można (tym razem piłą) pociąć na mniejsze wielościany, z których ułoży się prostopadłościan, a nawet sześcian.

Kłopot w tym, że nie umiano wykazać, iż dowolny ostrosłup (wystarczy to umieć dla czworościanu) można pociąć na wielościany, z których da się ułożyć jakiś graniastosłup.

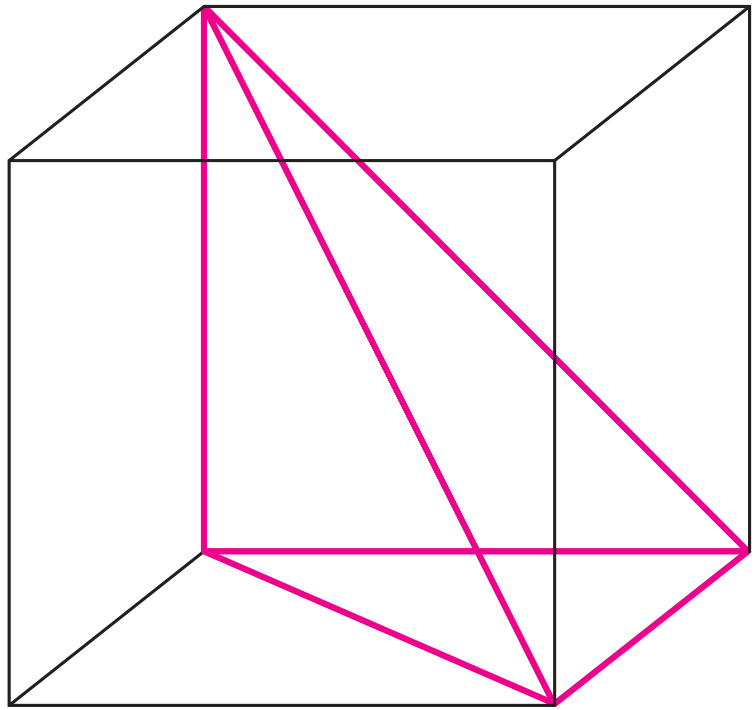
Euklides w *Elementach* posłużył się metodą wyczerpywania
patrz np. **wyczerpywanie**
i nikt później nie umiał wymyślić niczego lepszego.
Aż w 1900 roku David Hilbert uczynił z pytania
czy objętość czworościanu da się obliczyć elementarnie?
jedno z zadań matematyki na XX wiek.

III problem Hilberta ma rozwiązanie negatywne.

Oto przykład czworościanu,
którego nie można pociąć
na takie mniejsze wielościany,
z których da się ułożyć
prostopadłościan.



A ten czworościan
da się tak pociąć.



Objaśnia to

Twierdzenie Dehna – Sydlera:

Dwa wielościany są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe wszystkie niezmienniki Dehna.

Objaśnia to

Twierdzenie Dehna – Sydlera:

Dwa wielościany są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe wszystkie niezmienniki Dehna.

Oczywiście, najpierw należy wyjaśnić,
co to takiego te niezmienniki Dehna,
a to wymaga wprowadzenia **funkcji addytywnych**
i ich szczególnego przypadku – **funkcji Dehna**.

Funkcje addytywne
to wszystkie funkcje spełniające dla dowolnych x, y warunek
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ czyli równanie Cauchy'ego.

Jak stwierdziliśmy, jeśli f jest funkcją addytywną, to dla dowolnej liczby a i dowolnej liczby wymiernej w zachodzi $f(w \cdot a) = w \cdot f(a)$.

Stwierdziliśmy też, że dodatkowe warunki mogą spowodować, że będzie to jedynie $f(x) = \gamma \cdot x$ dla dowolnej stałej γ.

Jeśli jednak nie chcemy określać funkcji addytywnej dla wszystkich liczb rzeczywistych, a chcemy mieć ją na pewno dla niektórych liczb, możemy takich funkcji wskazać więcej.

Ustalając np., że $f(1) = \gamma_1$ mamy $f(w) = \gamma_1 \cdot w$.

Jednak dla dowolnej liczby niewymiernej, np. $\sqrt{2}$ możemy ustalić dowolnie $f(\sqrt{2}) = \gamma_2$. Wówczas dla liczb postaci $w+v\sqrt{2}$ będziemy mieli $f(w + v\sqrt{2}) = \gamma_1 \cdot w + \gamma_2 \cdot v$.

Liczba π nie jest tej postaci – możemy więc przyjąć np. $f(\pi) = \gamma_3$ i wówczas będzie $f(w + v\sqrt{2} + u\pi) = \gamma_1 \cdot w + \gamma_2 \cdot v + \gamma_3 \cdot u$ dla w, v, u wymiernych.

I tak dalej.

Funkcje Dehna to te, dla których $f(\pi) = 0$.

Niezmiennik Dehna

to liczba obliczana dla wielościanu w następujący sposób
$k_1 \cdot f(\varphi_1) + k_2 \cdot f(\varphi_2) + \ldots + k_n \cdot f(\varphi_n)$,
gdzie k_i to kolejne krawędzie wielościanu,
a φ_i to kąty dwuścienne przy nich,
f natomiast to dowolna funkcja Dehna.

Niezmiennik Dehna

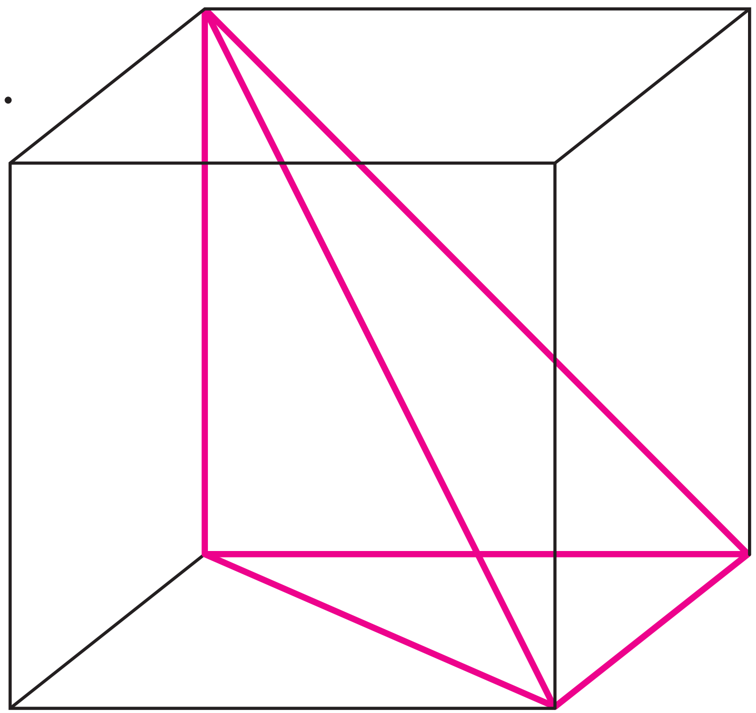
to liczba obliczana dla wielościanu w następujący sposób
$k_1 \cdot f(\varphi_1) + k_2 \cdot f(\varphi_2) + \ldots + k_n \cdot f(\varphi_n)$,
gdzie k_i to kolejne krawędzie wielościanu,
a φ_i to kąty dwuścienne przy nich,
f natomiast to dowolna funkcja Dehna.

Wszystkie kąty dwuścienne prostopadłościanu są proste,
czyli równe $\frac{\pi}{2}$, a więc są wymiernymi wielokrotnościami π.
Stąd wszystkie niezmienniki Dehna prostopadłościanu są równe 0.

Zatem – na mocy twierdzenia Dehna–Sydlera –
równoważne prostopadłościanowi (czy sześcianowi)
przez pocięcie są te i tylko te wielościany,
dla których wszystkie niezmienniki Dehna są równe 0.

Niezmiennik Dehna

to liczba obliczana dla wielościanu w następujący sposób
$k_1 \cdot f(\varphi_1) + k_2 \cdot f(\varphi_2) + \ldots + k_n \cdot f(\varphi_n)$,
gdzie k_i to kolejne krawędzie wielościanu,
a φ_i to kąty dwuścienne przy nich,
f natomiast to dowolna funkcja Dehna.



Z twierdzenia Dehna–Sydlera wynika
natychmiast, że ten czworościan
daje się pociąć na wielościany,
z których można ułożyć
prostopadłościan,
bo wszystkie jego kąty dwuścienne
to wymierne wielokrotności π.

Niezmiennik Dehna

to liczba obliczana dla wielościanu w następujący sposób

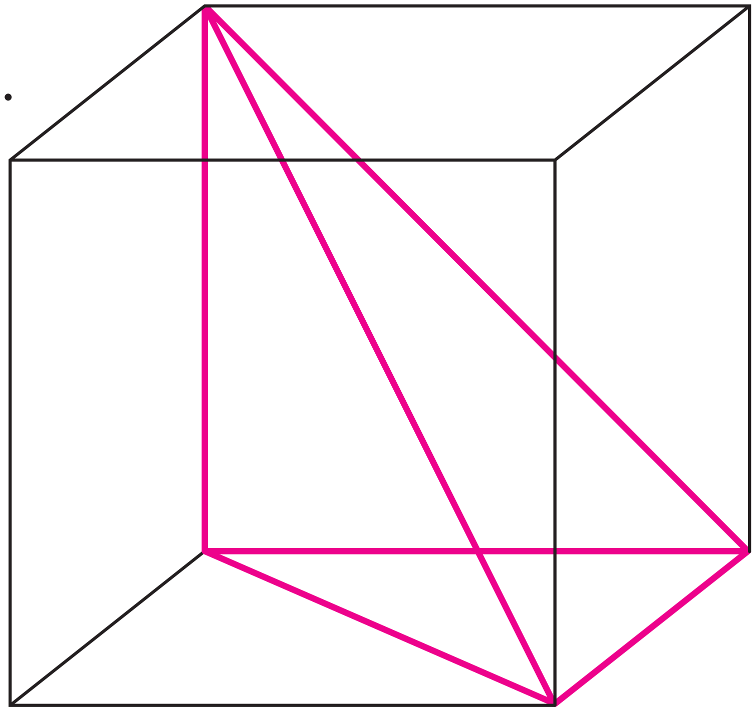
$k_1 \cdot f(\varphi_1) + k_2 \cdot f(\varphi_2) + \ldots + k_n \cdot f(\varphi_n)$,

gdzie k_i to kolejne krawędzie wielościanu,

a φ_i to kąty dwuścienne przy nich,

f natomiast to dowolna funkcja Dehna.

Z twierdzenia Dehna–Sydlera wynika natychmiast, że ten czworościan daje się pociąć na wielościany, z których można ułożyć prostopadłościan, bo wszystkie jego kąty dwuścienne to wymierne wielokrotności π.



prawda?

Oba składniki twierdzenia Dehna–Sydlera powstały nierównocześnie.

Max Dehn (1878–1952) nie miał możliwości poznać twierdzenia Sydlera (1921–1988), bo powstało ono już po jego śmierci.

Dehn stwierdza, kiedy dwa wielościany nie są równoważne przez podział, Sydler – kiedy są.

Dowód Dehna jest prosty: wystarczy zauważyć, że

(1) $k_1 f(\varphi) + k_2 f(\varphi) = (k_1 + k_2) f(\varphi)$, co jest oczywiste,

(2) $k f(\varphi_1) + k f(\varphi_2) = k f(\varphi_1 + \varphi_2)$, bo f jest addytywna.

(3) $f(\frac{m}{n}\pi) = 0$, bo f jest funkcją Dehna,

i wykazać, że jeśli wielościan $\mathcal{W}$ został pocięty na mniejsze wielościany, to każdy jego niezmiennik Dehna jest równy sumie tych samych niezmienników dla powstałych części.

Dogodnie jest zająć się krawędziami powstałych wielościanów.

Rozważymy cztery przypadki.

Jeśli jakaś krawędź $\mathcal{W}$ zostanie podzielona na części, to wobec (1) suma nie ulegnie zmianie.

Jeśli kąt dwuścienny przy którejś krawędzi $\mathcal{W}$ zostanie podzielony, to wobec (2) suma również nie ulegnie zmianie.

Jeśli któraś z krawędzi w którymś z mniejszych wielościanów powstała z odcinka leżącego wewnątrz $\mathcal{W}$, to wobec (3) zawierające ją składniki znikną, bo w $\mathcal{W}$ suma kątów dwuściennych wokół tej krawędzi ma rozwartość 2π.

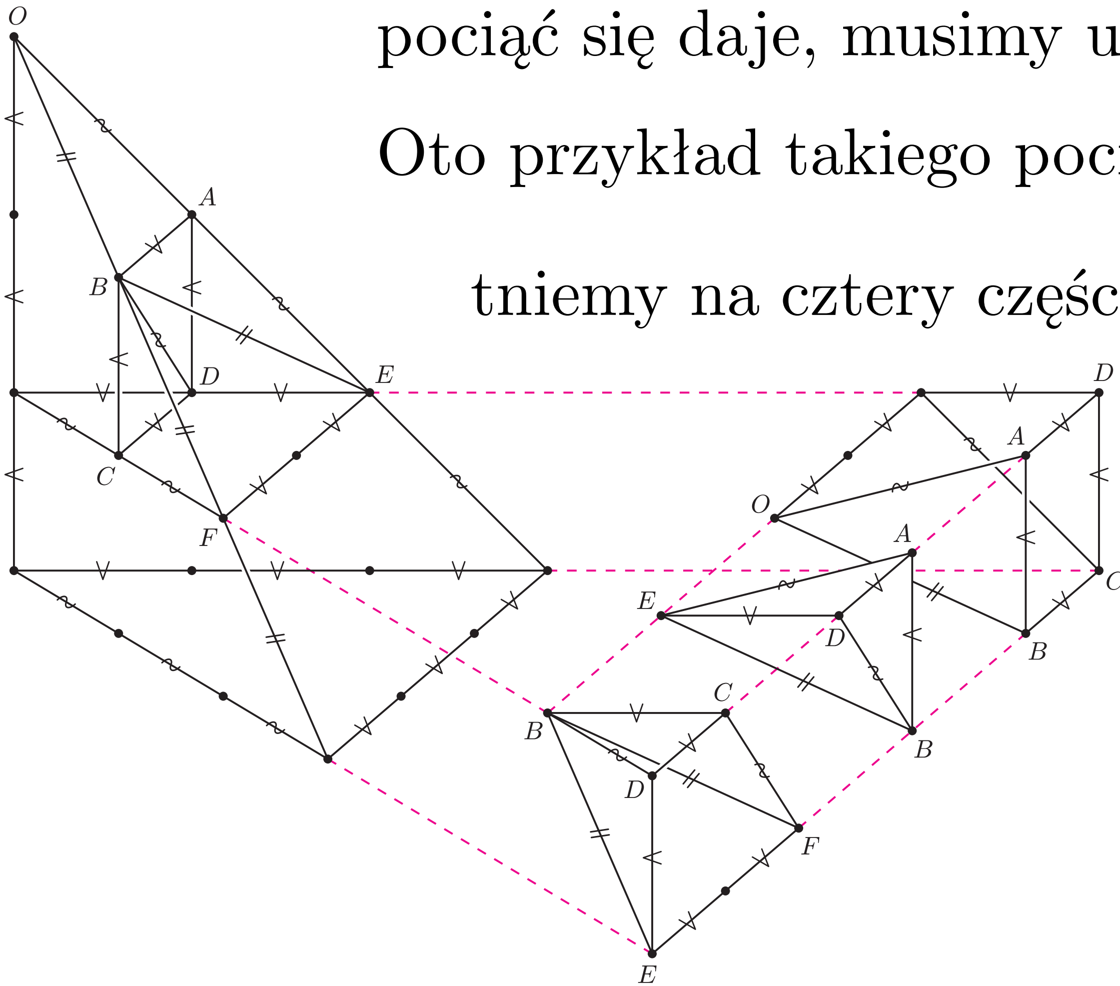
Podobnie będzie, gdy któraś z tych krawędzi powstała z odcinka leżącego na ścianie $\mathcal{W}$ – rozwartość π,

co kończy dowód.

Natomiast dowód twierdzenia Sydlera jest – jak dotąd – bardzo skomplikowany.

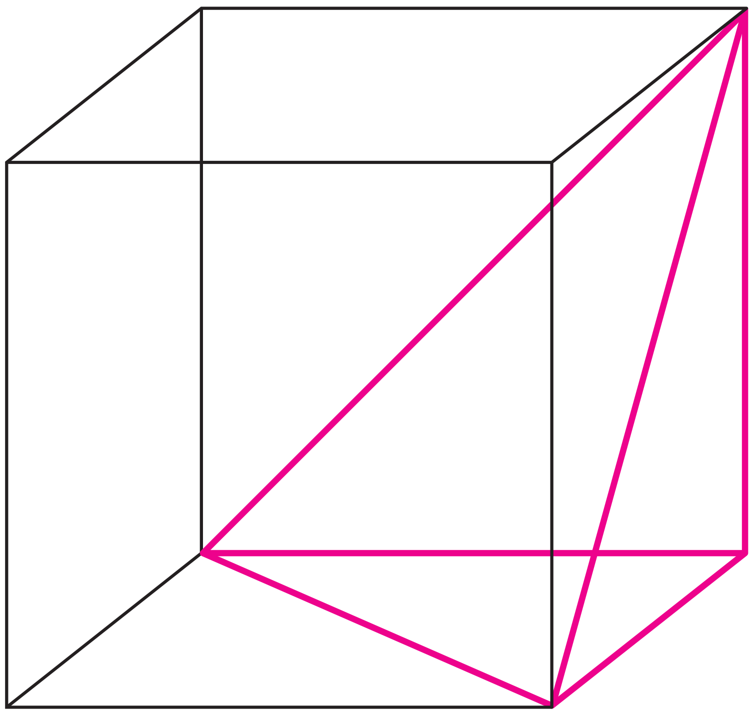
Gdy więc chcemy pokazać, jak pociąć coś, co – jak wiemy – pociąć się daje, musimy uczynić to artystycznie.

Oto przykład takiego pocięcia:



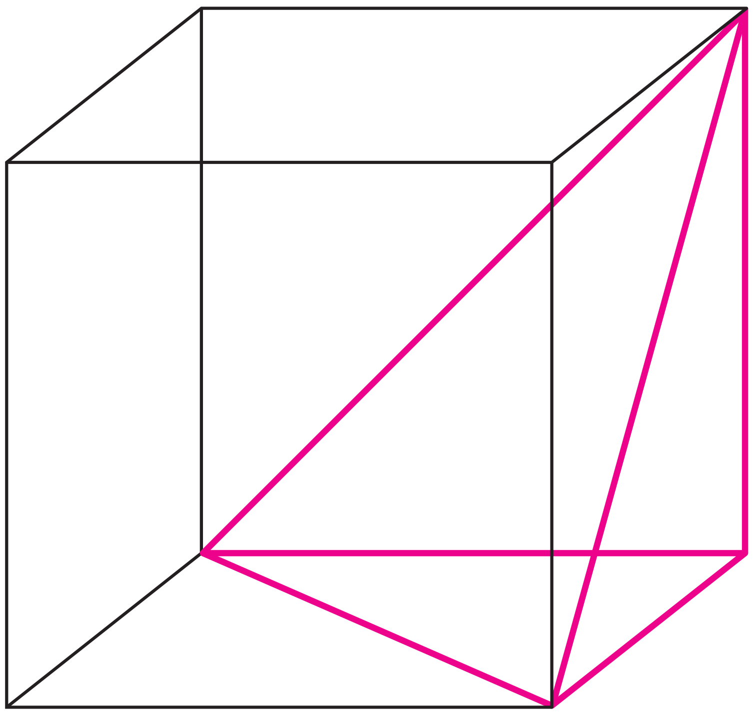
tniemy na cztery części i mamy . . . graniastosłup!

A teraz ten drugi czworościan:



jego niezmienniki Dehna to
$3 \cdot 1 \cdot f(\frac{\pi}{2}) + 3 \cdot \sqrt{2} f(\varphi) = 3\sqrt{2} f(\varphi)$,
gdzie $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

A teraz ten drugi czworościan:



jego niezmienniki Dehna to
$3 \cdot 1 \cdot f(\frac{\pi}{2}) + 3 \cdot \sqrt{2} f(\varphi) = 3\sqrt{2} f(\varphi)$,
gdzie $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Wszystkie niezmienniki Dehna będą równe 0, gdy φ będzie wymierną wielokrotnością π.

Gdy φ nie będzie wymierną wielokrotnością π,
będziemy mogli obrać wartość $f(\varphi)$ dowolnie,
w szczególności różną od 0, co oznaczać będzie, że ten czworościan nie jest równoważny przez rozkład z żadnym prostopadłościanem.

Okazuje się, że $\cos n\varphi = \frac{a_n}{\sqrt{3}^n}$, gdzie a_n jest całkowite i $3 \nmid a_n$,

co nigdy nie jest równe 1.

Okazuje się, że $\cos n\varphi = \frac{a_n}{\sqrt{3}^n}$, gdzie a_n jest całkowite i $3 \not| a_n$,

co nigdy nie jest równe 1.

Oto dowód.

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$,

a więc $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$.

Ponieważ $\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi \cdot \cos\varphi$, więc

$\cos(k+1)\varphi = 2\cos k\varphi \cdot \cos\varphi - \cos(k-1)\varphi =$

$$= 2\frac{a_k}{\sqrt{3}^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a_{k-1}}{\sqrt{3}^{k-1}} = \frac{2a_k - 3a_{k-1}}{\sqrt{3}^{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{\sqrt{3}^{k+1}}.$$

Zatem $3 \not| a_{k+1}$ i w konsekwencji $3 \not| a_n$ dla dowolnego n.

Okazuje się, że $\cos n\varphi = \frac{a_n}{\sqrt{3}^n}$, gdzie a_n jest całkowite i $3 \not| a_n$,

co nigdy nie jest równe 1.

Oto dowód.

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$,

a więc $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$.

Ponieważ $\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi \cdot \cos\varphi$, więc

$$\cos(k+1)\varphi = 2\cos k\varphi \cdot \cos\varphi - \cos(k-1)\varphi =$$
$$= 2\frac{a_k}{\sqrt{3}^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a_{k-1}}{\sqrt{3}^{k-1}} = \frac{2a_k - 3a_{k-1}}{\sqrt{3}^{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{\sqrt{3}^{k+1}}.$$

Zatem $3 \not| a_{k+1}$ i w konsekwencji $3 \not| a_n$ dla dowolnego n.

Ale gdyby zachodziło $\varphi = \frac{m}{n}\pi$,

mielibyśmy $2n\varphi = 2m\pi$ i $\cos(2n\varphi) = 1$.

SPRZECZNOŚĆ!

Lista czworościanów, które są przez pocięcie równoważne prostopadłościanowi (a więc też sześcianowi) nie jest zamknięta i liczy trzy nieskończone serie i 27 pojedynczych egzemplarzy. Powiększenie tej listy byłoby ważnym wynikiem naukowym.

Na liście jest np. czworościan $ABCD$, w którym
$AB = BD = \sqrt{3}$, $AC = CD = \sqrt{2}$, $AD = 2$ i $BC = 1$.

Nie wszystkie z nich mają wyłącznie kąty
będące wielokrotnościami π.
Np. dla dowolnego kąta ostrego α da się pociąć czworościan, który przy krawędziach AB i CD ma kąt dwuścienny α, przy krawędzi BD kąt $\pi - 2\alpha$ i pozostałe "przyzwoite": przy krawędziach AD i BC kąt $\frac{\pi}{2}$ i przy krawędzi AC kąt $\frac{\pi}{3}$.

Aktualny stan listy – patrz **lista**.