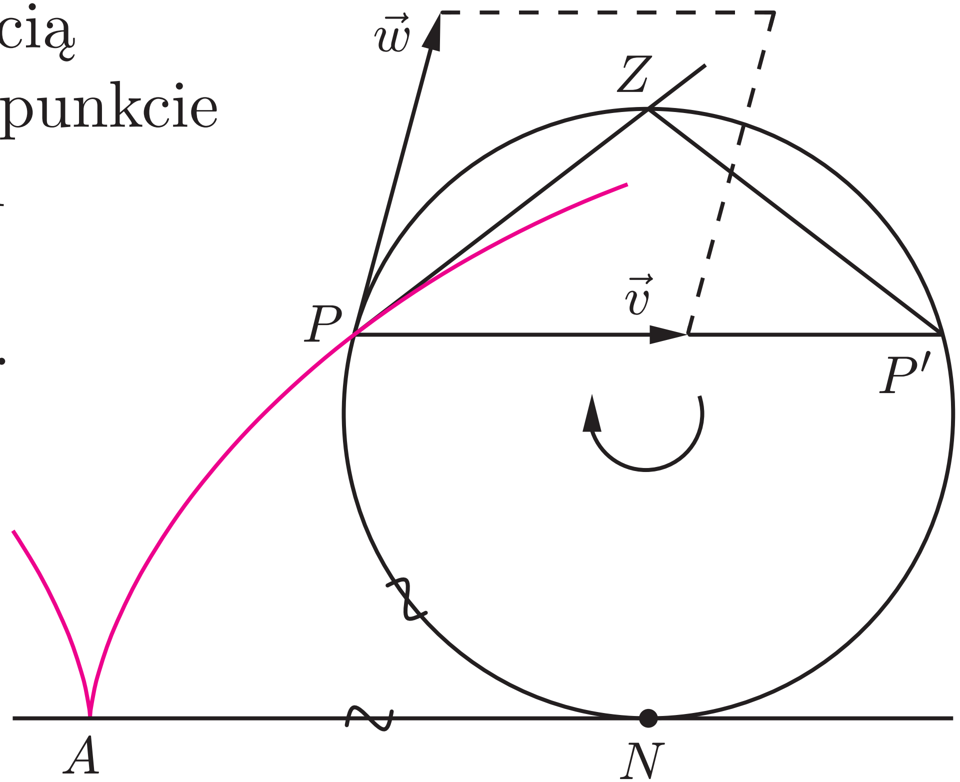
# Wszystko

no, prawie wszystko

# o cykloidzie

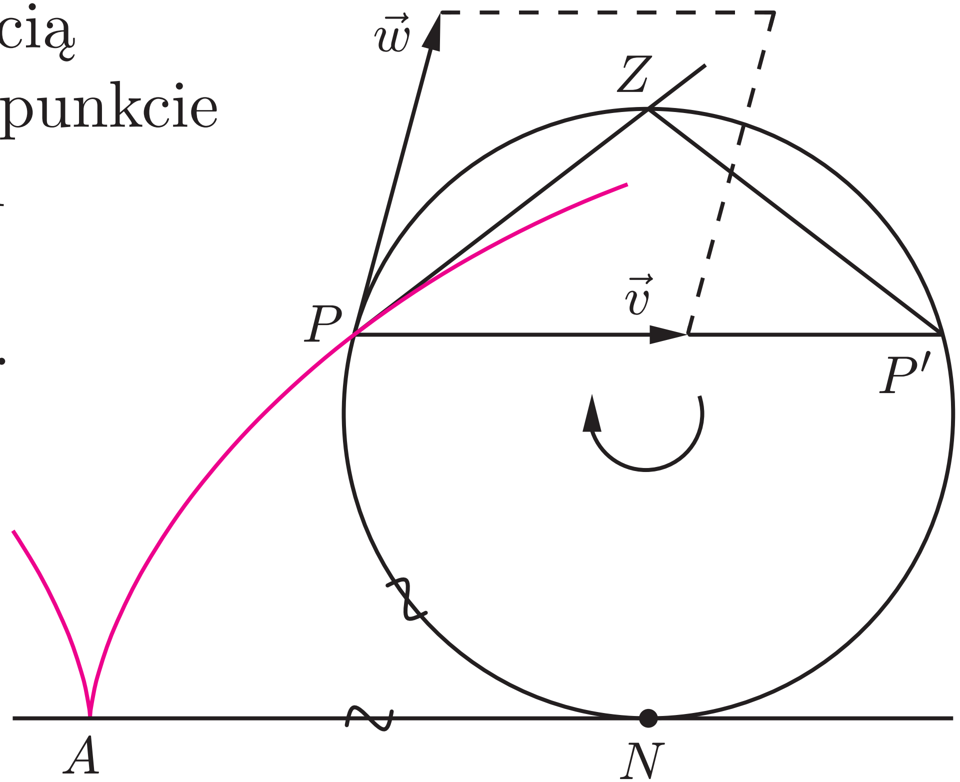
Cykloida to tor
punktu okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej.

Jej najważniejszą własnością jest fakt, iż w każdym jej punkcie styczna do niej przechodzi przez najwyższy punkt wyznaczającego ją okręgu.



Cykloida to tor
punktu okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej.

Jej najważniejszą własnością
jest fakt, iż w każdym jej punkcie
styczna do niej przechodzi
przez najwyższy punkt
wyznaczającego ją okręgu.




Obejrzymy, co zdziałała
w zegarmistrzostwie
i podróżach morskich,
w saneczkarstwie
i rachunku wariacyjnym,
w optyce

oraz, przy okazji,
zmierzymy jej długość i ograniczające ją pole.

Szerokość geograficzna jest pojęciem przyrodniczym,
długość geograficzna jest pojęciem umownym;
do określenia długości geograficznej (przed GPS)

niezbędny był zegar.

Szerokość geograficzna jest pojęciem przyrodniczym,
długość geograficzna jest pojęciem umownym;
do określenia długości geograficznej (przed GPS)

niezbędny był zegar.

Jak stwierdził Galileusz,
okres wahania wahadła nie zależy od wychylenia
jedynie
gdy wychylenie jest takie, że można stosować przybliżenie

$$\alpha = \sin\alpha.$$

Szerokość geograficzna jest pojęciem przyrodniczym,
długość geograficzna jest pojęciem umownym;
do określenia długości geograficznej (przed GPS)
niezbędny był zegar.

Jak stwierdził Galileusz,
okres wahania wahadła nie zależy od wychylenia
jedynie
gdy wychylenie jest takie, że można stosować przybliżenie

$$\alpha = \sin\alpha.$$

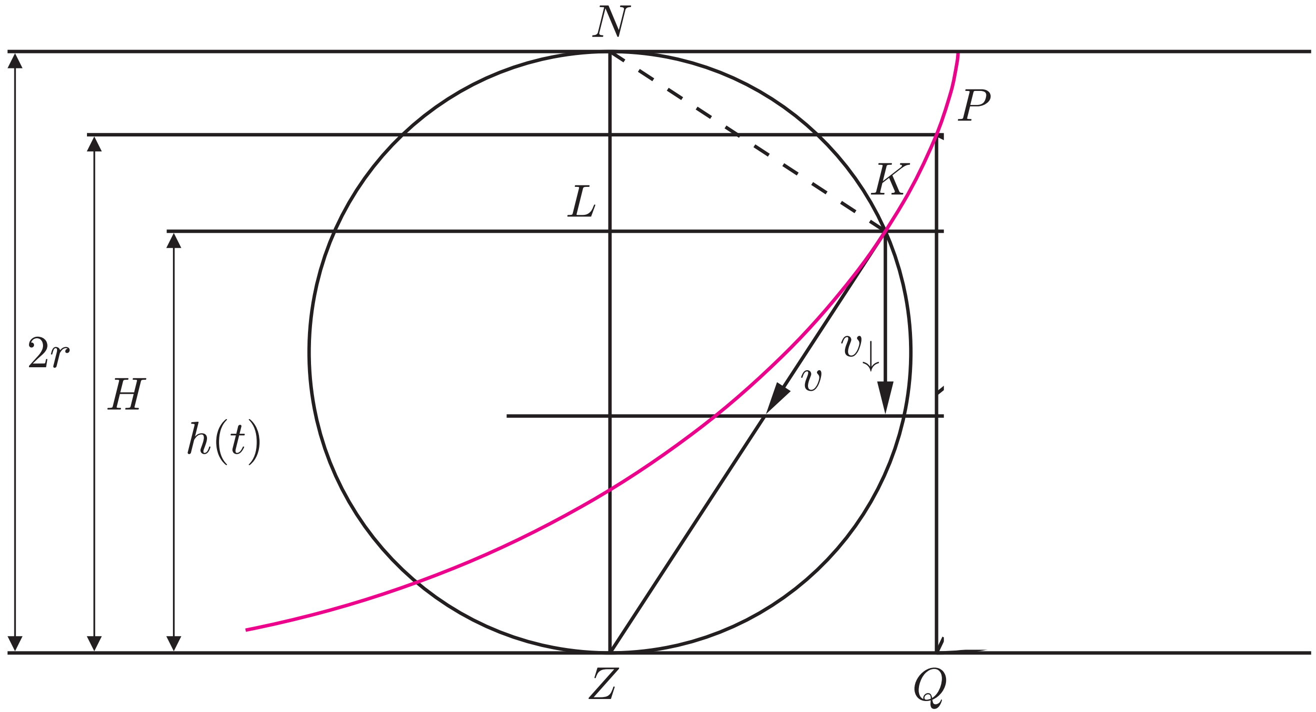
Potrzebne było więc wahadło tautochroniczne
i korzystający z niego zegar.

Mimo ogromnej nagrody za “zegar morski” nikt
(w tej liczbie Galileusz) problemu rozwiązać nie umiał.

Christiaan Huygens (1629–1695) wpadł na pomysł
poszukiwania najpierw krzywej tautochronicznej
i postawił hipotezę, że jest nią cykloida.

Mimo ogromnej nagrody za “zegar morski” nikt (w tej liczbie Galileusz) problemu rozwiązać nie umiał.

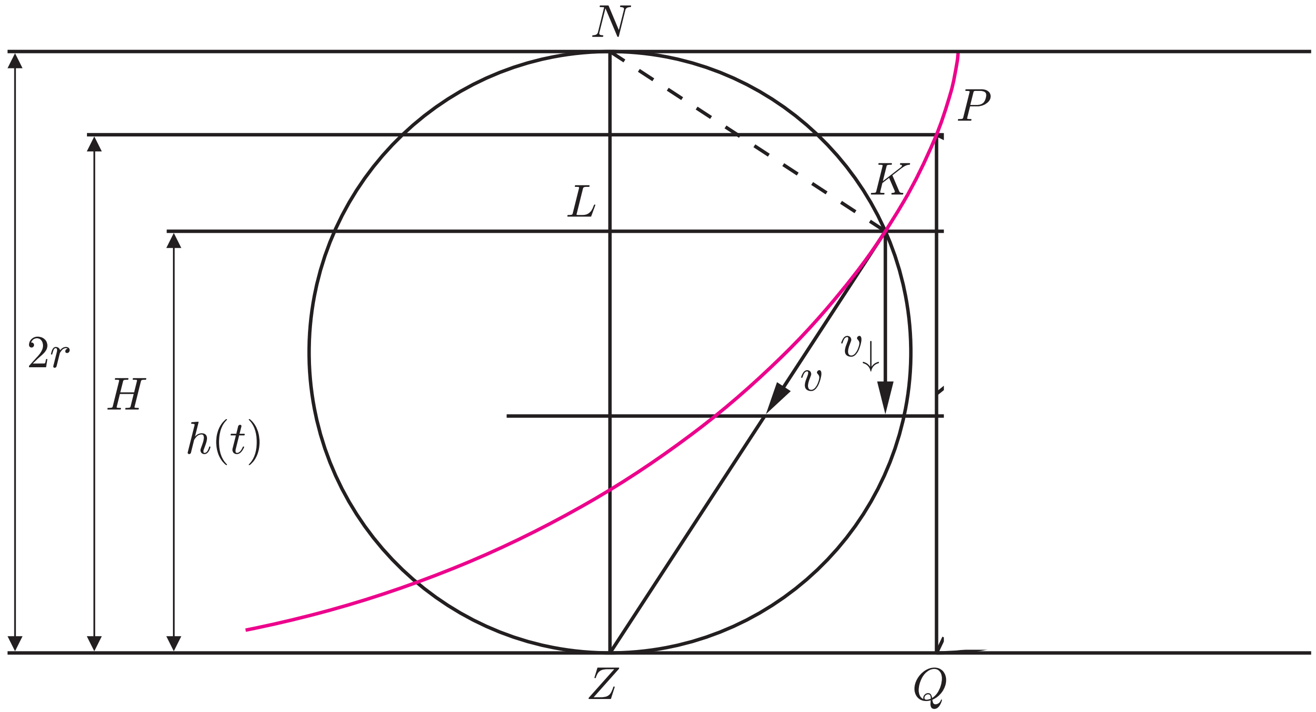
Christiaan Huygens (1629–1695) wpadł na pomysł poszukiwania najpierw krzywej tautochronicznej i postawił hipotezę, że jest nią cykloida.




I zajął się pionową składową staczania się kulki po cykloidalnej miseczce.

Mimo ogromnej nagrody za “zegar morski” nikt
(w tej liczbie Galileusz) problemu rozwiązać nie umiał.

Christiaan Huygens (1629–1695) wpadł na pomysł poszukiwania najpierw krzywej tautochronicznej i postawił hipotezę, że jest nią cykloida.

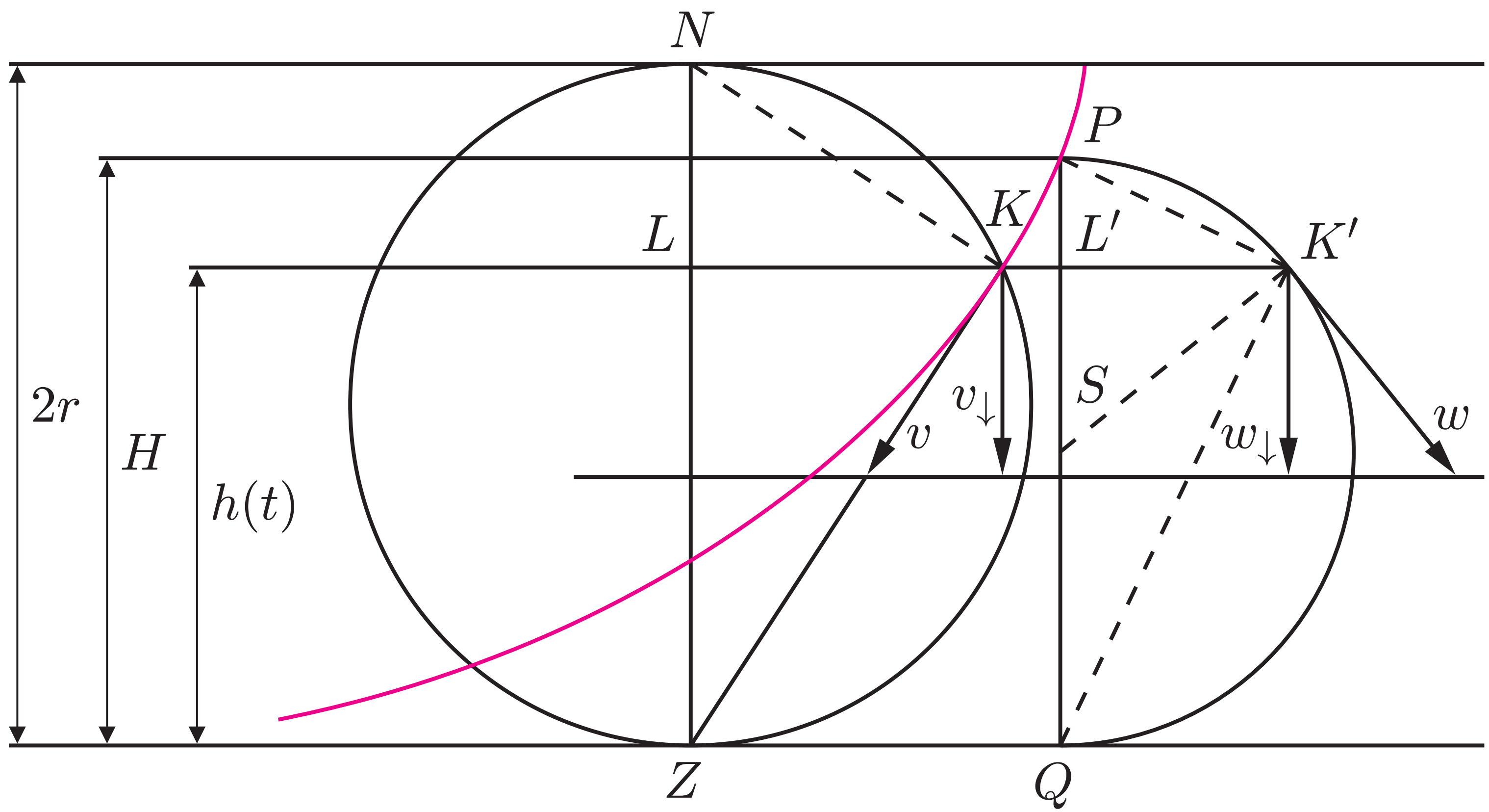



I zajął się pionową składową staczania się kulki po cykloidalnej miseczce.

$$\frac{|\vec{v}_\downarrow|}{|\vec{v}|} = \frac{LZ}{KZ} = \frac{LZ}{\sqrt{LZ \cdot NZ}} = \sqrt{\frac{LZ}{NZ}} = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}.$$

Genialny pomysł to zajęcie się wirtualną kulką staczającą się po półokręgu równo z kulką realną.

Genialny pomysł to zajęcie się wirtualną kulką staczającą się po półokręgu równo z kulką realną.




Dla niej mamy

$$\frac{|\vec{w}_{\downarrow}|}{|\vec{w}|} = \frac{K'L'}{K'S} = \frac{\sqrt{PL' \cdot L'Q}}{PS} = \frac{\sqrt{(H - h(t)) \cdot h(t)}}{\frac{H}{2}} \text{ i } |\vec{w}_{\downarrow}| = |\vec{v}_{\downarrow}|.$$

Skoro więc

$$\frac{|\vec{v}_\downarrow|}{|\vec{v}|} = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}, \qquad \frac{|\vec{w}_\downarrow|}{|\vec{w}|} = \frac{\sqrt{(H-h(t))\cdot h(t)}}{\frac{H}{2}} \quad \text{i} \quad |\vec{w}_\downarrow| = |\vec{v}_\downarrow|,$$

otrzymujemy

$$|\vec{v}|\cdot\sqrt{\frac{h(t)}{2r}} = |\vec{v}_\downarrow| = |\vec{w}_\downarrow| = |\vec{w}|\cdot\frac{2\sqrt{(H-h(t))\cdot h(t)}}{H},$$

czyli

$$|\vec{w}| = |\vec{v}|\cdot\frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H-h(t))}}.$$

Z samej geometrii już więcej wycisnąć się nie da.

Zauważmy, że do tej pory nigdzie nie został wykorzystany fakt,
iż mamy do czynienia ze spadkiem realnej kulki
pod wpływem grawitacji.

Ten aspekt ruchu wyraża się np. w fakcie, że
energia kinetyczna równa jest utracie energii potencjalnej,
a więc $\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2} = mg(H - h(t))$, czyli $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^{\,2}} = \sqrt{2g(H - h(t))}$

$$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}} = \sqrt{2g(H - h(t))} \cdot \frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}}.$$

Jak widać $|\vec{w}| = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$, co nie zawiera $t$
– ruch kulki wirtualnej jest więc jednostajny.

Zauważmy, że do tej pory nigdzie nie został wykorzystany fakt, iż mamy do czynienia ze spadkiem realnej kulki pod wpływem grawitacji.

Ten aspekt ruchu wyraża się np. w fakcie, że energia kinetyczna równa jest utracie energii potencjalnej, a więc $\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2} = mg(H - h(t))$, czyli $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^{\,2}} = \sqrt{2g(H - h(t))}$

$$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \frac{H}{2} \sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}} = \sqrt{2g(H - h(t))} \cdot \frac{H}{2} \sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}}.$$

Jak widać $|\vec{w}| = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$, co nie zawiera $t$ – ruch kulki wirtualnej jest więc jednostajny.

Skoro tak, to można łatwo obliczyć, ile trwa: $T = \frac{\pi \frac{H}{2}}{|\vec{w}|} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

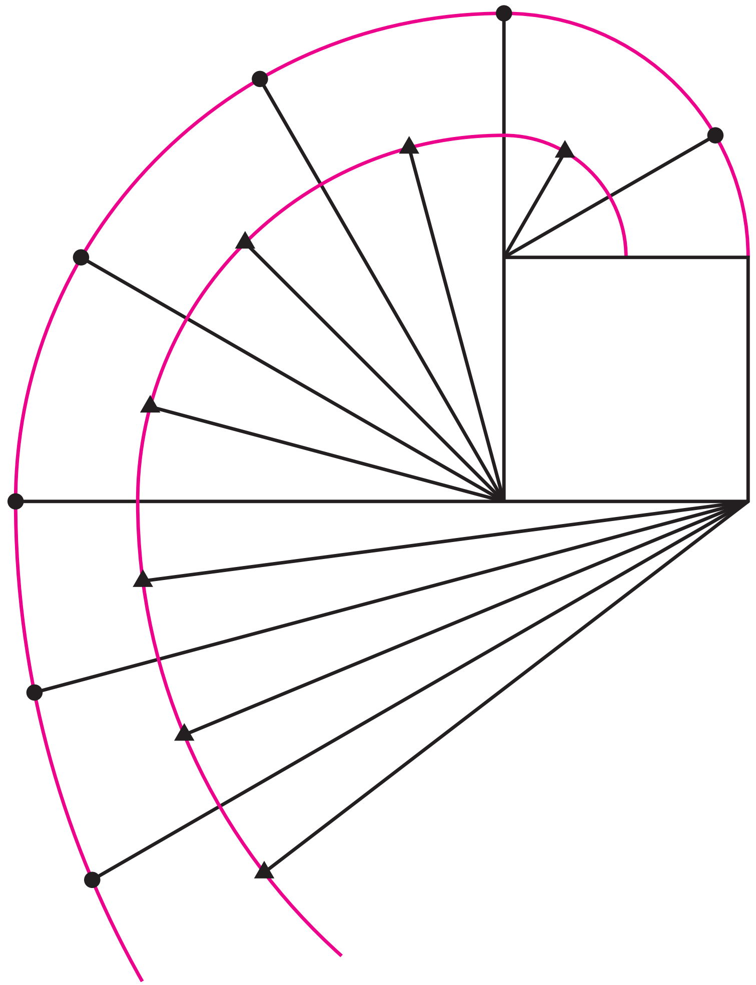
Czas jest więc stały – nie zależy od $H$, a więc od wysokości, na jakiej położyliśmy kulkę.

Wiemy już, jak wygląda tautochrona,
ale jak zmusić zawieszony ciężarek,
aby wahał się nie po okręgu, lecz po cykloidzie?

I tu jest drugi genialny pomysł Huygensa,
rozwijanie nici
zwane dziś w matematyce
ewolwentą.

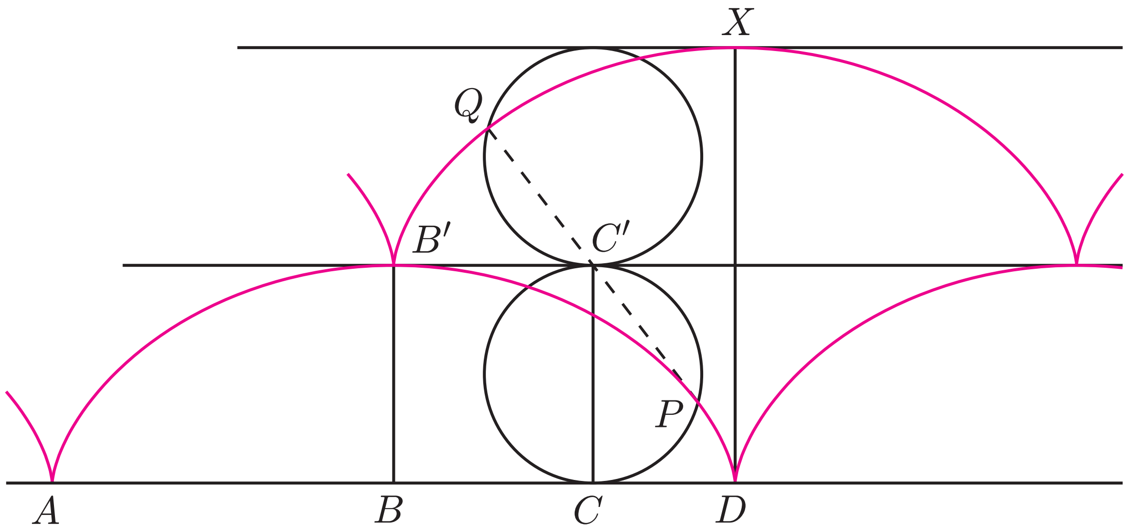
Obok dwie
spośród ewolwent
kwadratu;

żaden kawałek jednej
nie pasuje do drugiej.



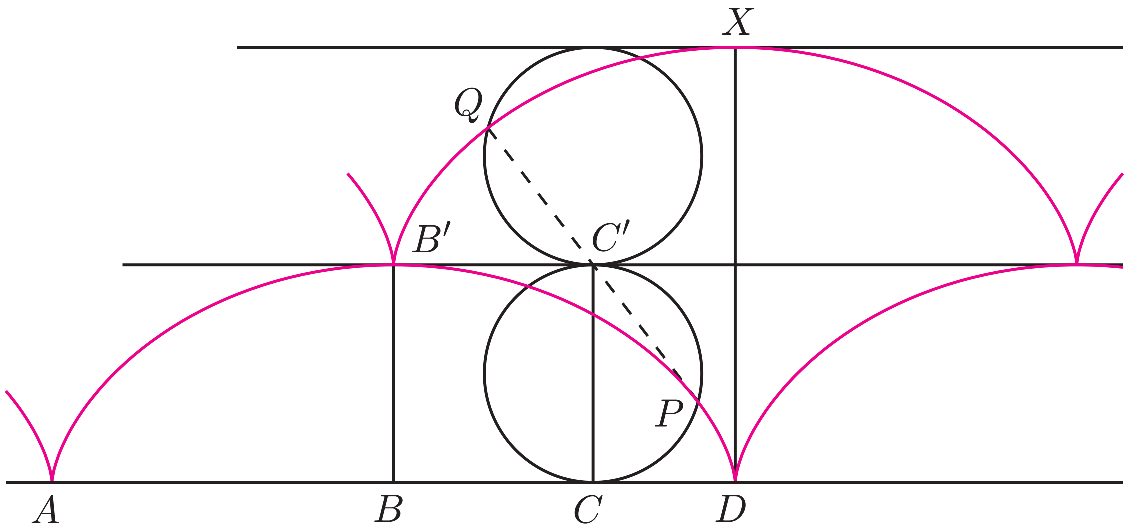
Huygens stwierdził, że

jedna z ewolwent cykloidy jest taka jak ona.




Wystarczy zauważyć, że punkty $Q$, $P$, $C'$ leżą na jednej prostej przy dowolnym położeniu okręgów.

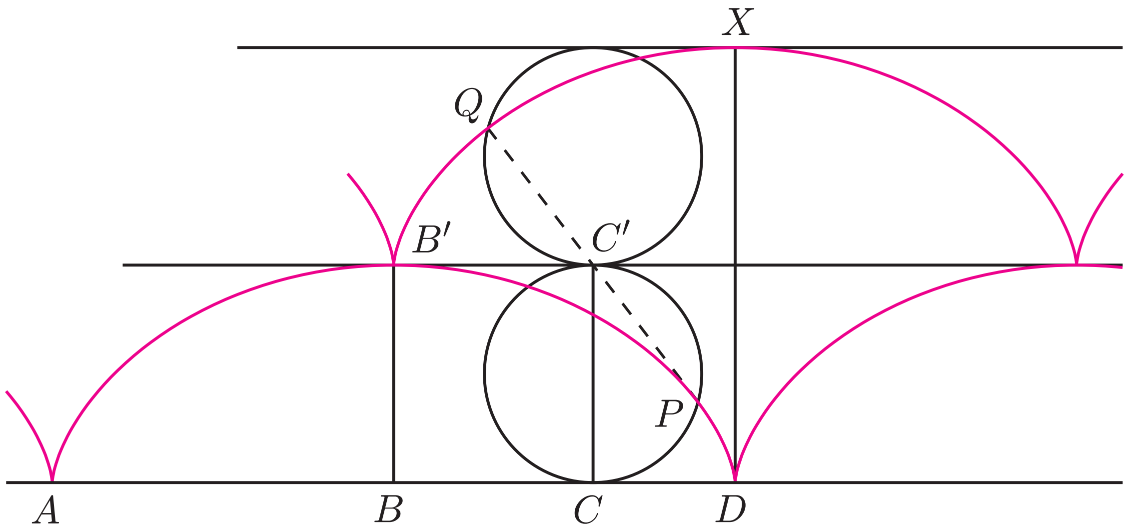
Huygens stwierdził, że
jedna z ewolwent cykloidy jest taka jak ona.




Wystarczy zauważyć, że punkty $Q$, $P$, $C'$ leżą na jednej prostej przy dowolnym położeniu okręgów.

Przy okazji dowiedzieliśmy się, jaka jest długość łuku cykloidy

Huygens stwierdził, że
jedna z ewolwent cykloidy jest taka jak ona.

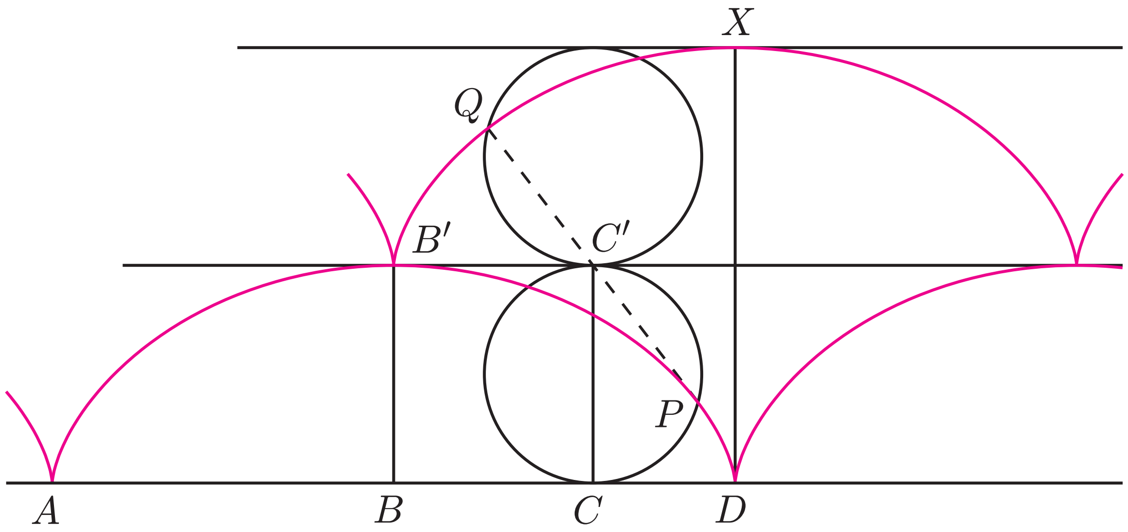



Wystarczy zauważyć, że punkty $Q$, $P$, $C'$ leżą na jednej prostej przy dowolnym położeniu okręgów.

Przy okazji dowiedzieliśmy się, jaka jest długość łuku cykloidy – oczywiście, dwukrotnie większa od długości odcinka $DX$, czyli $8r$.

Huygens stwierdził, że

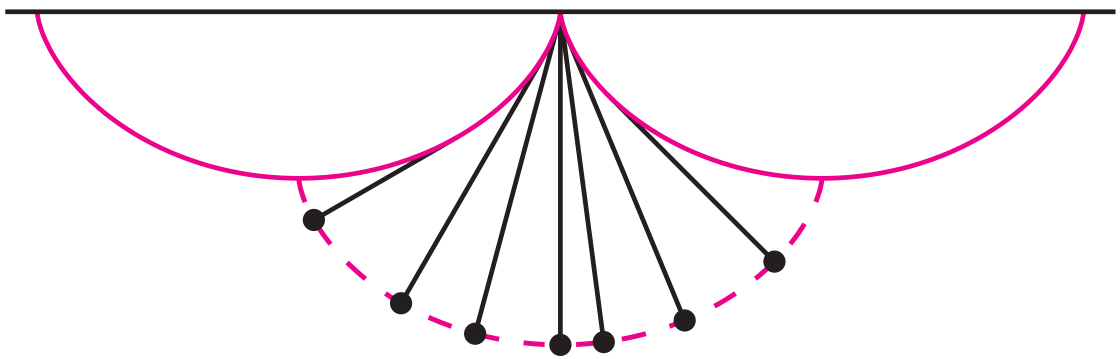
jedna z ewolwent cykloidy jest taka jak ona.




Wystarczy zauważyć, że punkty $Q$, $P$, $C'$ leżą na jednej prostej przy dowolnym położeniu okręgów.

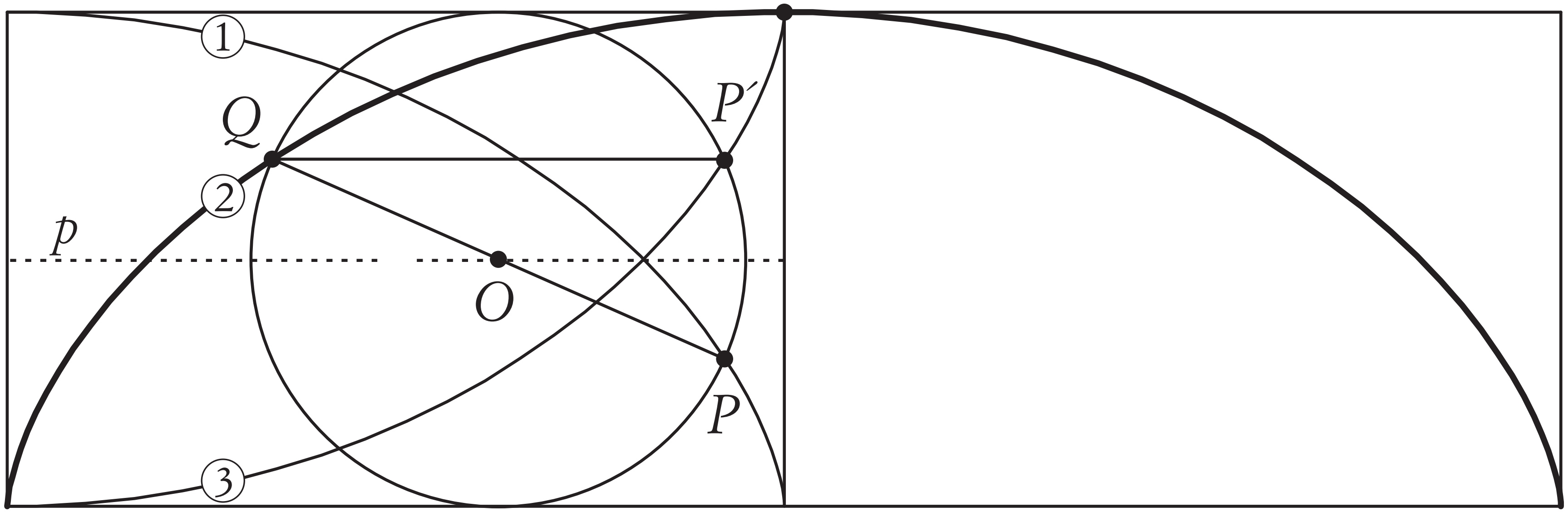
Przy okazji dowiedzieliśmy się, jaka jest długość łuku cykloidy

i mamy wahadło tautochroniczne!

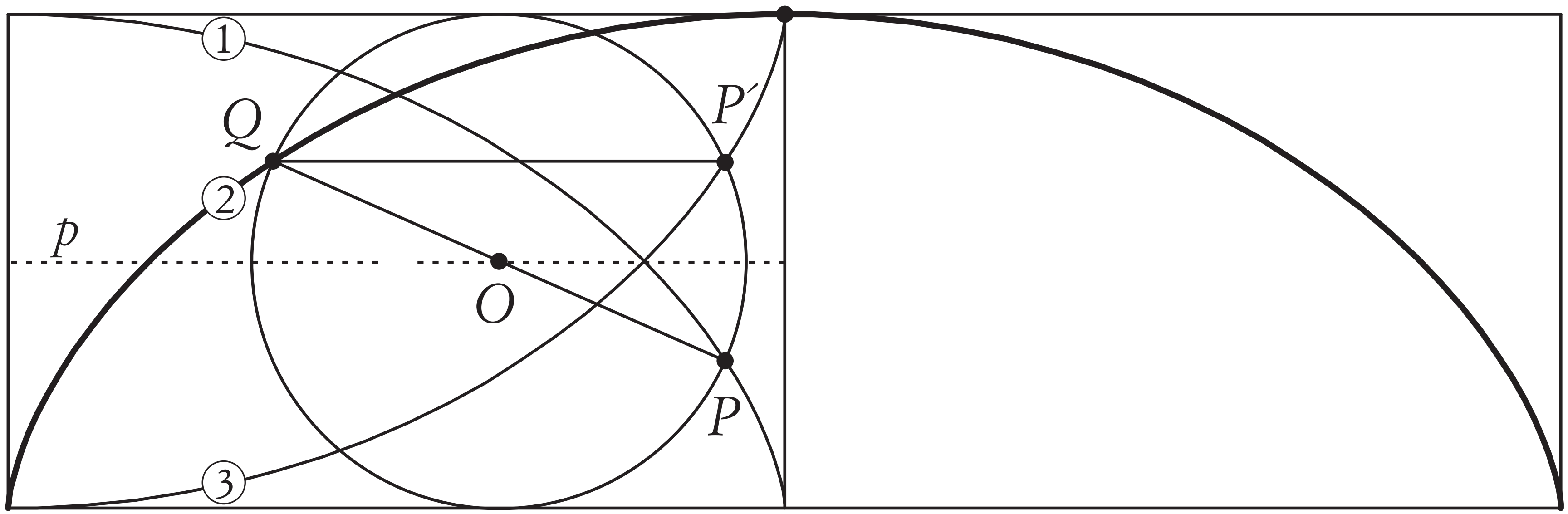


Porzućmy zegary, bo choć ewolwenty nadal występują w ich historii, to cykloidy już nie,

i zobaczmy, jak Giles Roberval obliczył pole pod cykloidą.




Pomógł mu w tym taki właśnie rysunek.

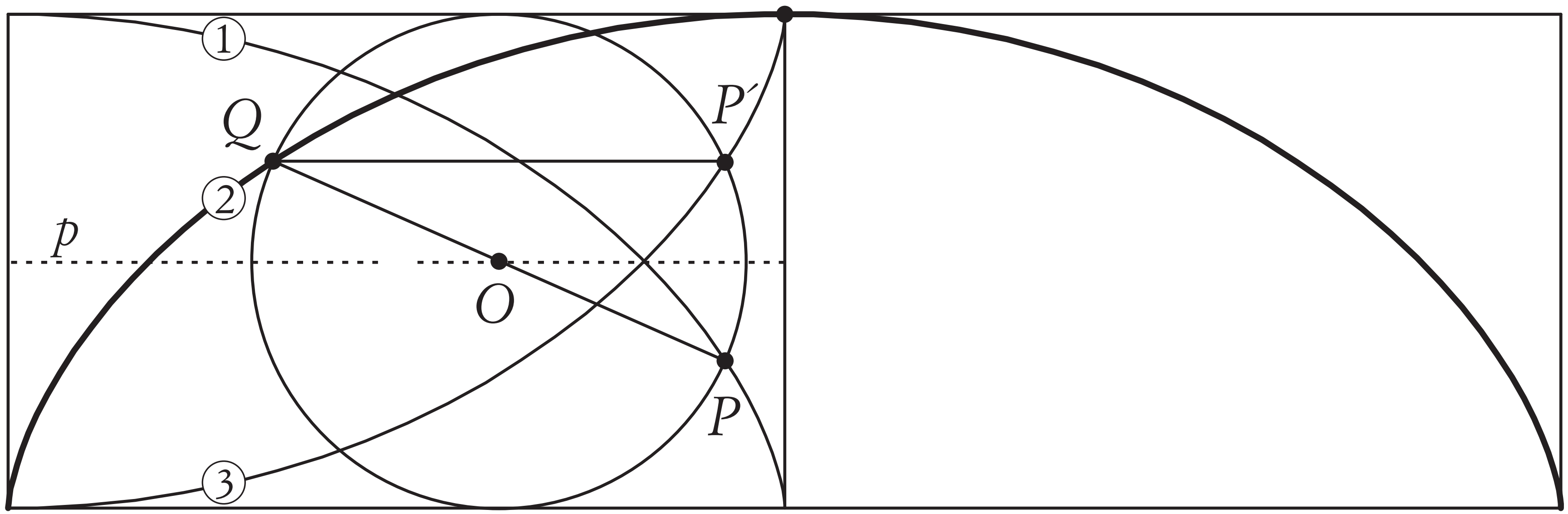



Umieśćmy cykloidę 2 wyznaczoną przez okrąg o promieniu $r$ w prostokącie $2r$ na $2\pi r$. W jego lewej połówce narysujmy w połowie wysokości poziomą prostą $p$.

Dorysujmy łuk 1, który jest drogą najwyższego punkty okręgu, gdy cykloida startowała (taką samą drogę przebędzie w prawej połówce punkt poruszający się po łuku 2).

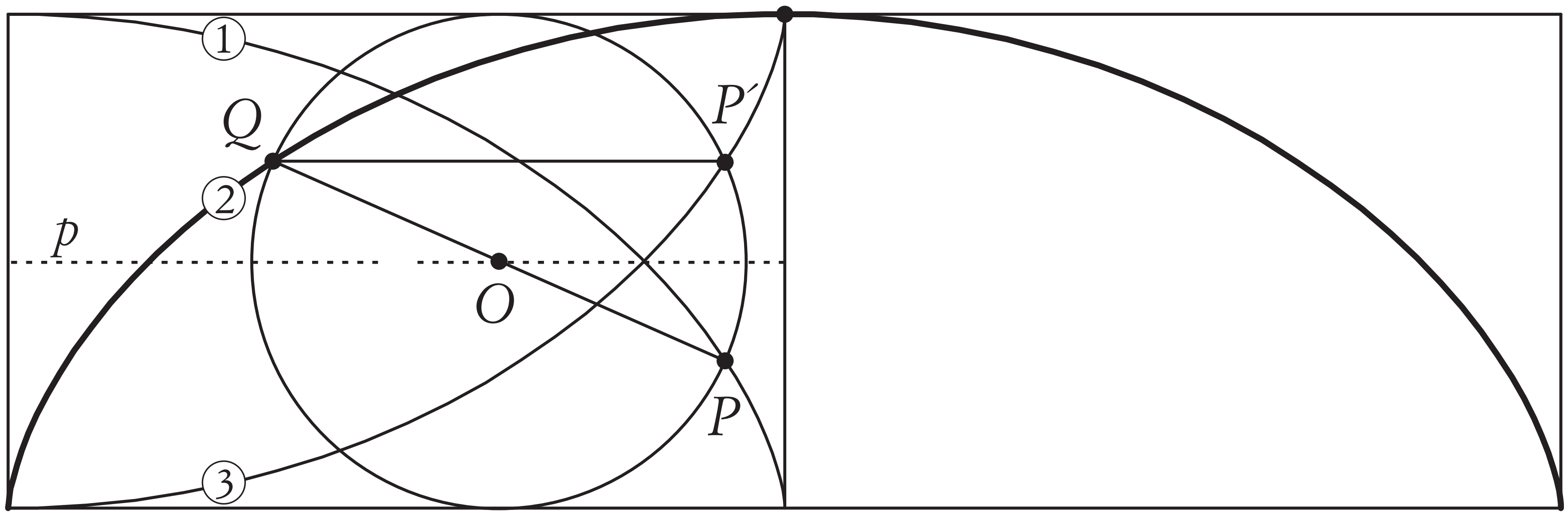
Łuk 3 to obraz symetryczny łuku 1 względem prostej $p$.

Wykażemy, że pole soczewki ograniczonej łukami 2 i 3 jest równe polu koła ograniczonego okręgiem.




Gdy punkt biegnący po łuku 2 znajdzie się w $Q$, drugi koniec średnicy okręgu (biegnący po łuku 1) znajdzie się w punkcie $P$. Jego obraz symetryczny względem $p$ znajdzie się w $P'$, leżącym zarówno na okręgu, jak i na łuku 3. Ponieważ $QP$ jest średnicą, więc trójkąt $QP'P$ jest prostokątny i tym samym odcinek $QP'$ jest poziomy i jest zarówno przekrojem koła, jak soczewki.

Wobec dowolnego położenia okręgu, wykazaliśmy, że odcinki wzdłuż których pozioma prosta przecina koło i soczewkę są tej samej długości.




Ponieważ figury, których przekroje rodziną prostych równoległych są równymi odcinkami, mają równe pola (zasada Cavaleriego, znana już Archimedesowi), więc pola koła i soczewki są równe.

Zatem (jak widać) pole pod cykloidą jest dwukrotnie większe od tego, co się dzieje w lewej połowce, a tam mamy pół małego prostokąta plus pół soczewki, zatem jest to połowa pola (dużego) prostokąta plus (całe) pole soczewki, czyli $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot 2r + \pi r^2 = 3\pi r^2$.

Do znalezienia tautochrony wystarczyły nam wiadomości jeszcze ze szkoły podstawowej, bo – jak widać – jeśli do nich dodać genialne pomysły : wirtualna kulka, ewolwenta, to też można uzyskać rewelacyjne rezultaty.

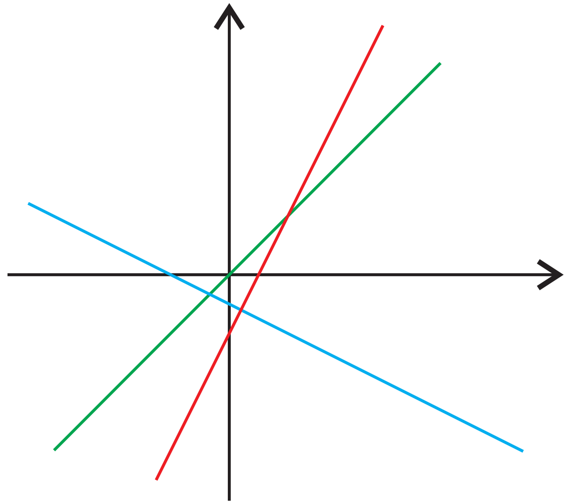
Do znalezienia optymalnego toru saneczkowego czy bobslejowego potrzebna jest znajomość mocniejszego narzędzia – pochodnej.

Ale nie lękajcie się! Nie chodzi o wszystkie związane z nią mądrości i formalizmy – wystarczy wiedzieć, co to jest.

A pochodna to tempo, w jakim jakaś wielkość się zmienia.

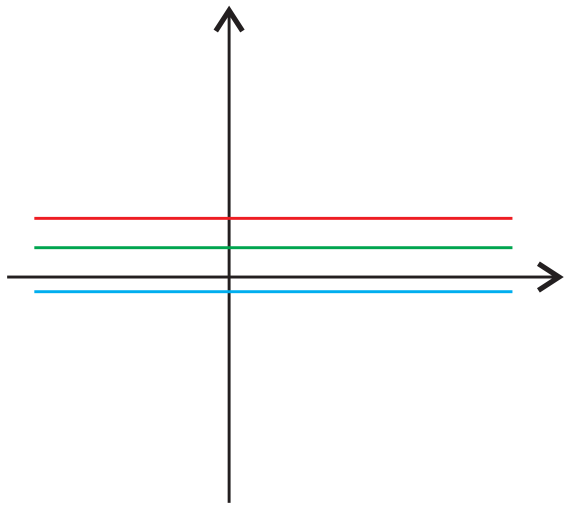
Na przykład pochodną drogi jest prędkość,
a prędkości – przyspieszenie.
A pochodną lokaty bankowej jest przyznany nam procent.

Pojęcie pochodnej jest matematycznie klarowne
i w prostszych sytuacjach doskonale wiadomo, o co chodzi.



Na przykład
zmienność funkcji $f(x) = ax + b$
to funkcja $f'(x) = a$

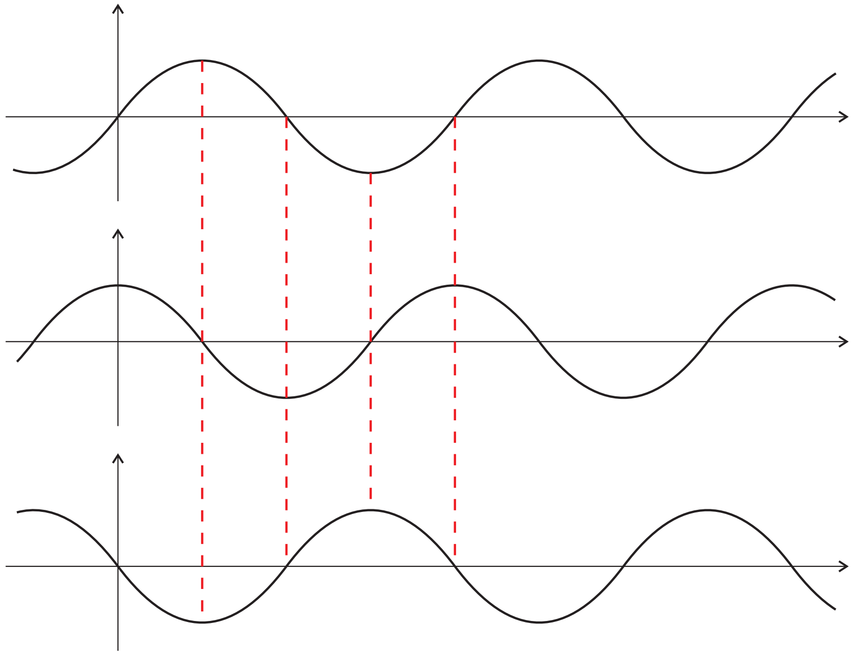
– wszędzie zmienia się tak samo.



Warto jeszcze wspomnieć,
że powszechnie obok symbolu $f'(x)$
na oznaczenie zmienności,
czyli pochodnej,
używa się wprowadzonego przez Leibniza
symbolu $\dfrac{df(x)}{dx}$

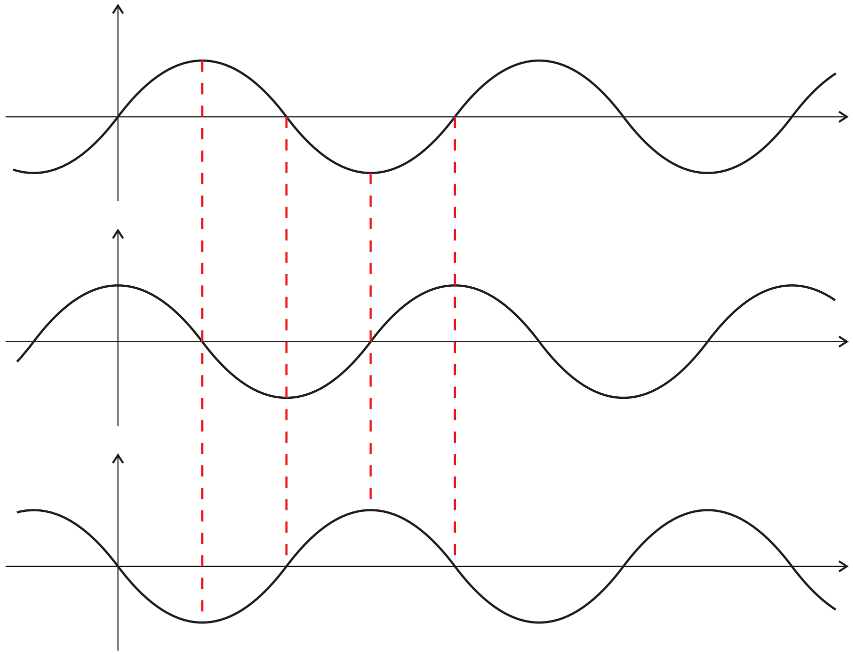
A zmienność funkcji $f(x) = \sin x$
to $f'(x) = \cos x$.

Z kolei zmienność $f(x) = \cos x$
to nie $\sin x$ lecz $-\sin x$.



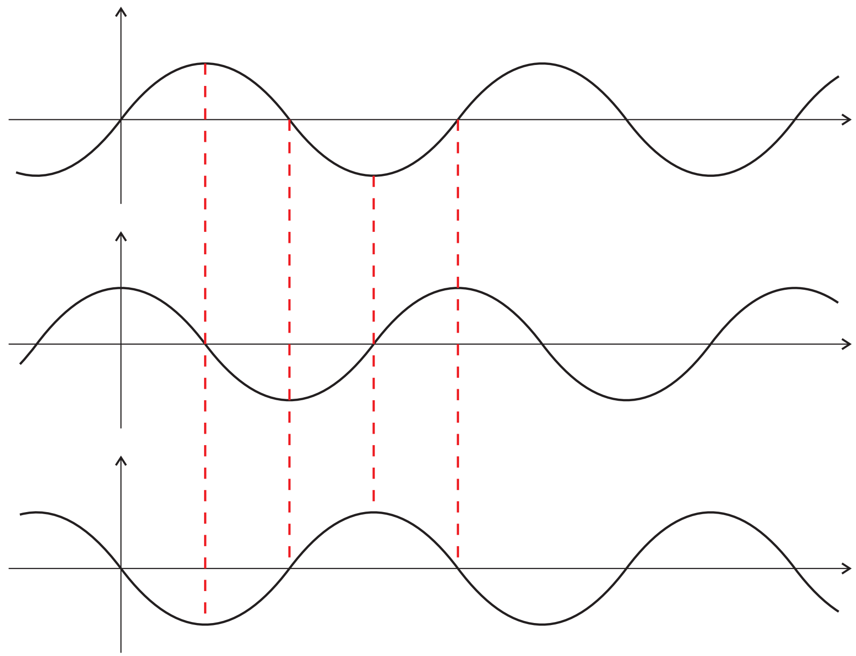
A zmienność funkcji $f(x) = \sin x$
to $f'(x) = \cos x$.

Z kolei zmienność $f(x) = \cos x$
to nie $\sin x$ lecz $-\sin x$.



Podobne,
choć trochę bardziej
skomplikowane obserwacje
pozwalają stwierdzić,
że zmienność $\dfrac{1}{\cos x}$ to $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$,
a zmienność $\operatorname{tg} x$ to $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Patrząc jeszcze raz
na te rysunki
stwierdzamy, że
wykres zmienności
pokazuje nam,
pod jakim kątem do poziomu
biegnie styczna stanu,
którego zmienność
obserwujemy.



W szczególności, okazuje się, że
że dla ekstremów chwilowa zmienność to 0
– i w maksimum i w minimum stan nie rośnie, ani nie maleje –
i styczna w tym punkcie jest pozioma.

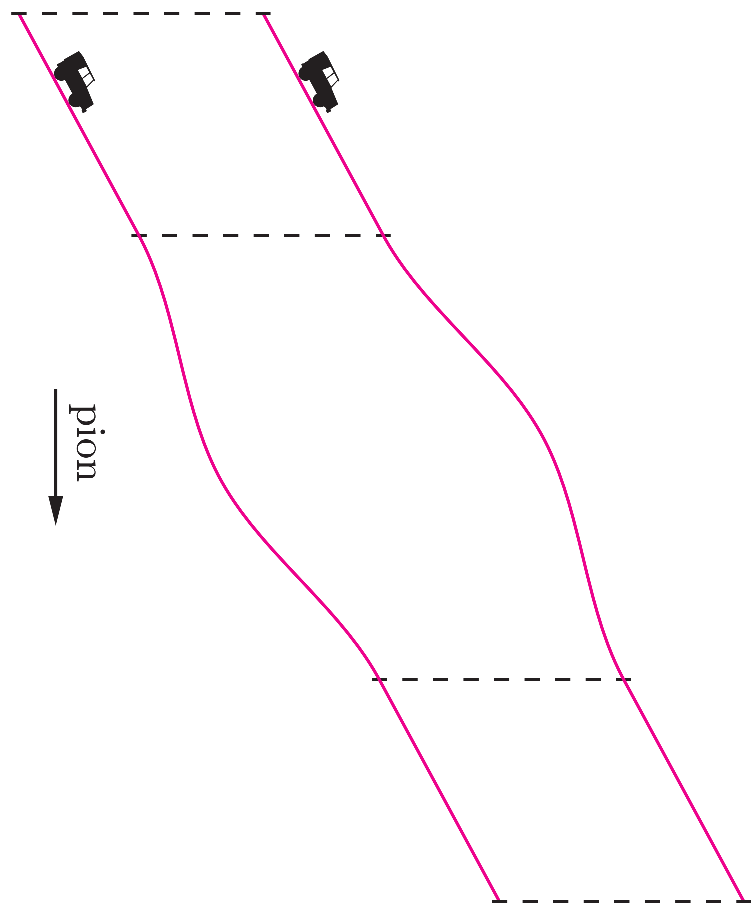
I to nam wystarczy,
podobnie, jak wystarczyło Johannowi Bernoulliemu,
by rozwiązać zadanie postawione
przez Jacoba Bernoulliego o najszybszym torze bobslejowym,
zwane problemem brachistochrony.

Mamy dwa punkty – wyżej $A$ i niżej $B$ –
i chcemy znaleźć krzywą (brachistochronę), po której
poruszający się bez tarcia punkt materialny (np. bobsleje)
pod wpływem grawitacji najszybciej
przemieści się z $A$ do $B$.

Posłużymy się w tym celu, jak przystoi matematykom,
dwiema analogiami.

Pierwsza podpowiedź
– tor samochodzikowy,

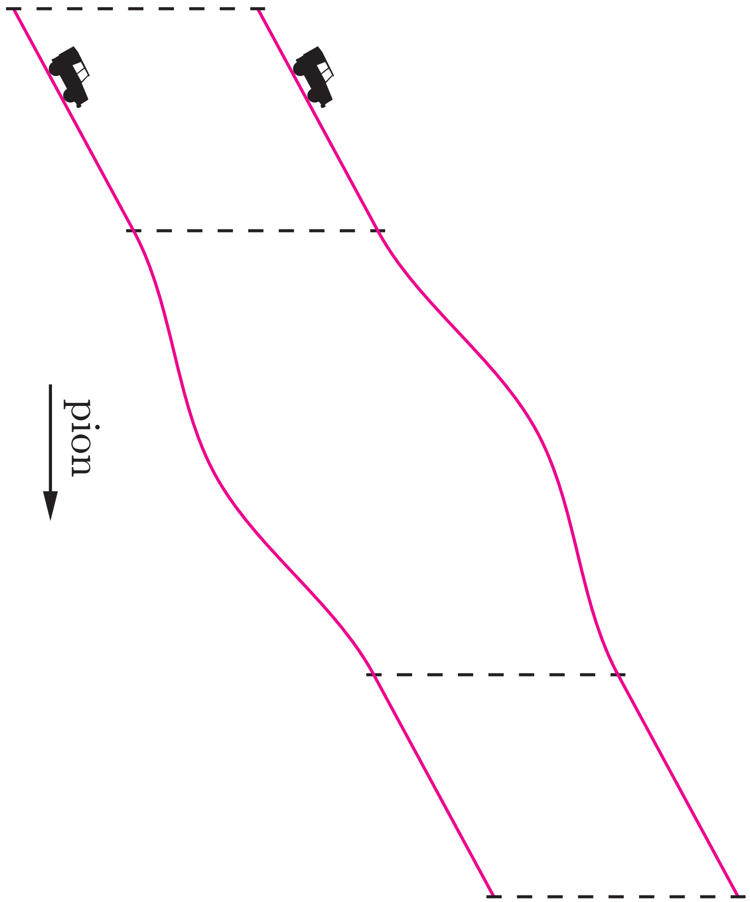
zagadka: który wygra?



Pierwsza podpowiedź
– tor samochodzikowy,

zagadka: który wygra?

Lewy, bo jego
średnia prędkość jest większa.

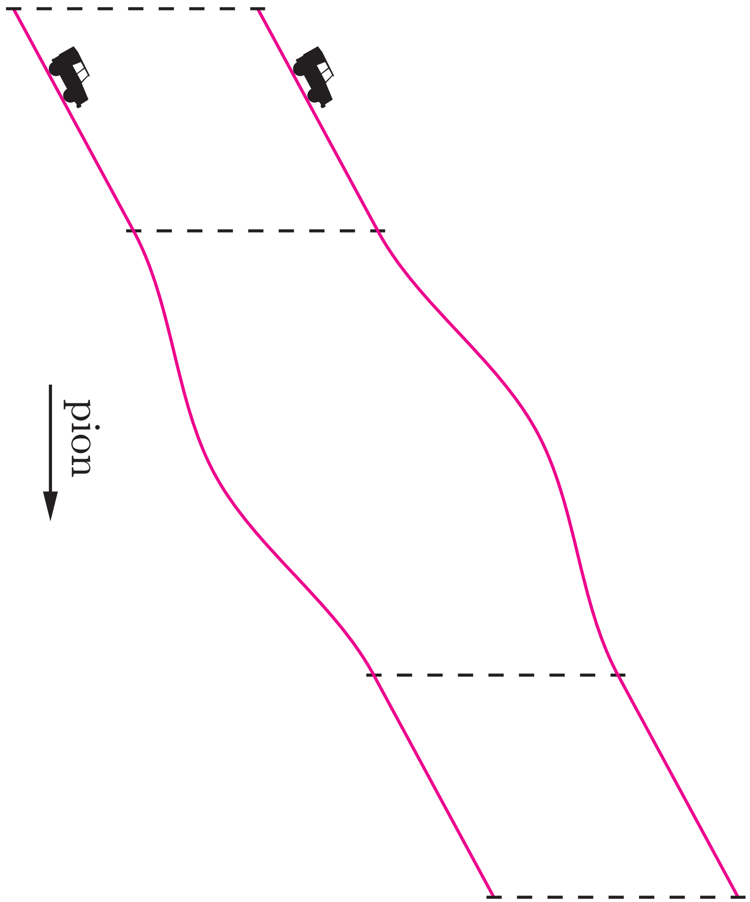


Pierwsza podpowiedź
– tor samochodzikowy,

zagadka: który wygra?

Lewy, bo jego
średnia prędkość jest większa.

Morał:
brachistochrona musi być
– mówiąc po ludzku –
wklęsła.



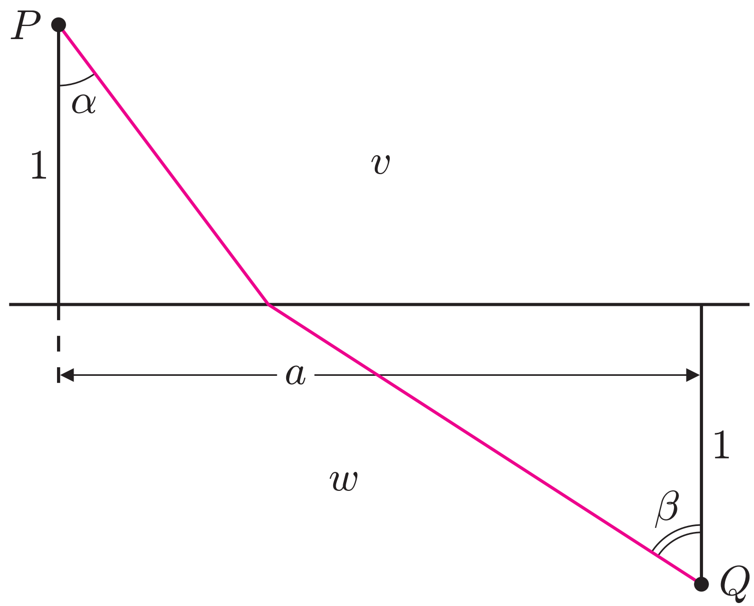

Ale wklęsłości bywają różne, stąd potrzebna druga podpowiedź.

Druga podpowiedź, też analogia – zasada Fermata:
światło biegnie zawsze najszybszą drogą, więc naśladujmy je.

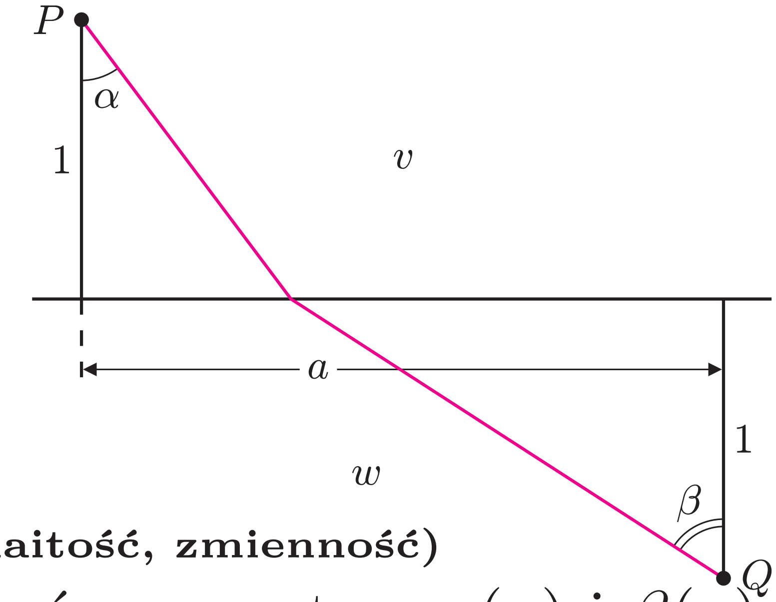
Najprostszy przypadek: załamanie

Czas przejścia impulsu to

$$t = \frac{1}{|v|\cos\alpha} + \frac{1}{|w|\cos\beta}.$$



Druga podpowiedź, też analogia – zasada Fermata:
światło biegnie zawsze najszybszą drogą, więc naśladujmy je.




Najprostszy przypadek: załamanie

Czas przejścia impulsu to

$$t = \frac{1}{|v| \cos\alpha} + \frac{1}{|w| \cos\beta}.$$

Aby znaleźć minimum posłużymy się rachunkiem wariacyjnym:

**(łacińskie** *vario* **– zmieniać,** *variatio* **– rozmaitość, zmienność)**

niech kąty $\alpha$ i $\beta$ będą funkcjami jakiegoś parametru: $\alpha(u)$ i $\beta(u)$.
Nie są one niezależne: z rysunku mamy $\operatorname{tg}\alpha(u) = a - \operatorname{tg}\beta(u)$.

Zatem $\dfrac{\alpha'}{\cos^2\alpha} = \dfrac{-\beta'}{\cos^2\beta}$, co pozwala na obliczenie pochodnej $t(u)$ :

$$t' = \frac{\alpha' \sin\alpha}{|v| \cos^2\alpha} + \frac{\beta' \sin\beta}{|w| \cos^2\beta} = \frac{\alpha'}{\cos^2\alpha} \cdot \left( \frac{\sin\alpha}{|v|} - \frac{\sin\beta}{|w|} \right).$$

Skoro $t' = \dfrac{\alpha'}{\cos^2\alpha} \cdot \left( \dfrac{\sin\alpha}{|v|} - \dfrac{\sin\beta}{|w|} \right)$,

więc mimimalny czas będzie uzyskany, gdy $t' = 0$,

czyli $\dfrac{\sin\alpha}{|v|} = \dfrac{\sin\beta}{|w|}$ – otrzymaliśmy prawo Snelliusa.

Skoro $t' = \dfrac{\alpha'}{\cos^2\alpha} \cdot \left(\dfrac{\sin\alpha}{|v|} - \dfrac{\sin\beta}{|w|}\right)$,

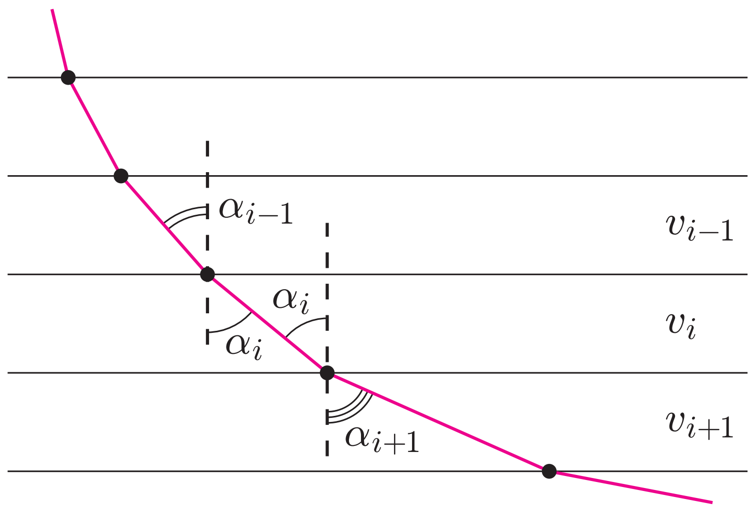
więc mimimalny czas będzie uzyskany, gdy $t' = 0$,

czyli $\dfrac{\sin\alpha}{|v|} = \dfrac{\sin\beta}{|w|}$ – otrzymaliśmy prawo Snelliusa.

Johann Bernoulli stworzył z tego model brachistochrony,

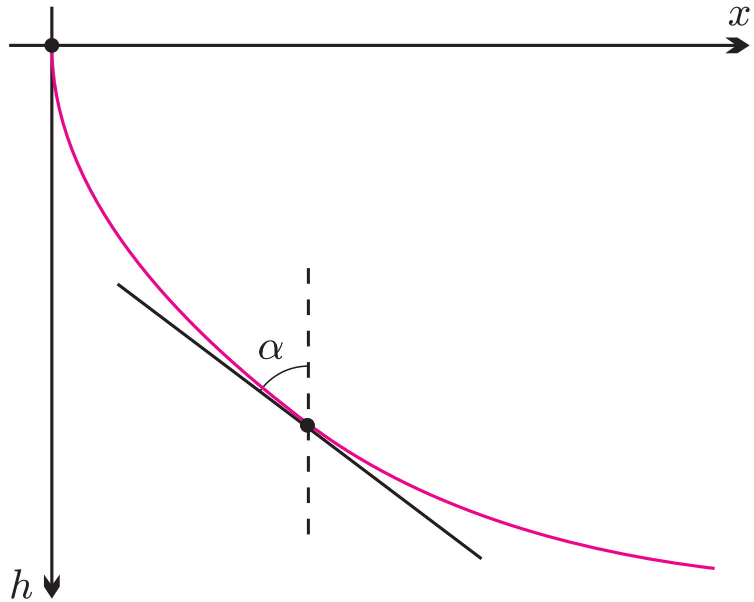
w którym jest $\dfrac{\sin\alpha_i}{|v_i|} = \text{const.}$,

czyli po uciągleniu $\dfrac{\sin\alpha}{|v|} = \text{const.}$



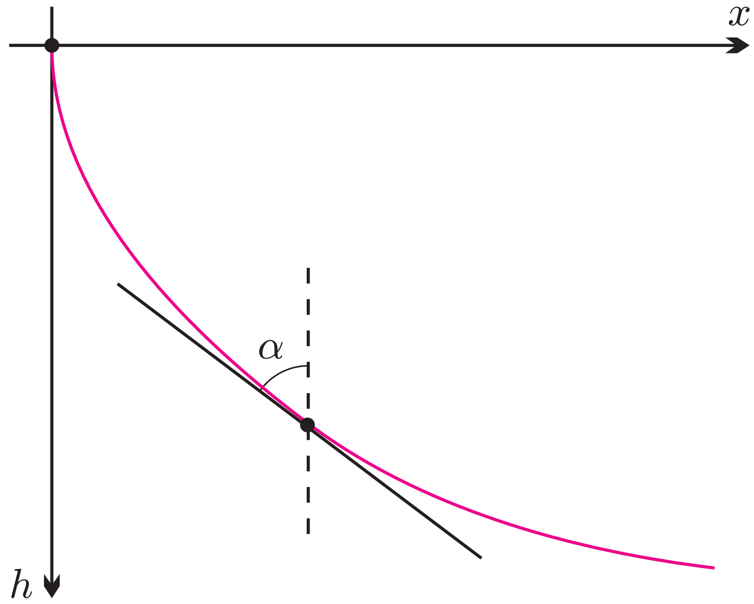
Szukamy zatem krzywej

spełniającej warunek $\dfrac{\sin\alpha}{|v|} = \text{const.}$



Szukamy zatem krzywej

spełniającej warunek $\dfrac{\sin\alpha}{|v|} = \text{const.}$




Gdy przywołamy fizykę,

a konkretnie $\dfrac{mv^2}{2} = mgh$,

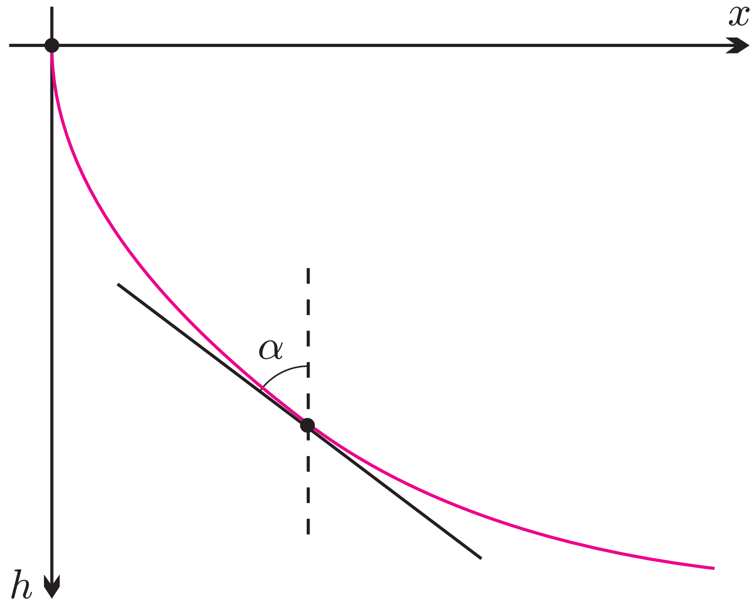
czyli $|v| = \sqrt{2gh}$,

otrzymamy $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2gh(\alpha)}} = \text{const}$, czyli $\dfrac{\sin^2\alpha}{h(\alpha)} = \text{const.}$

Tę ostatnią stałą wygodnie będzie oznaczać $1/(2r)$.

Zatem $h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha$.

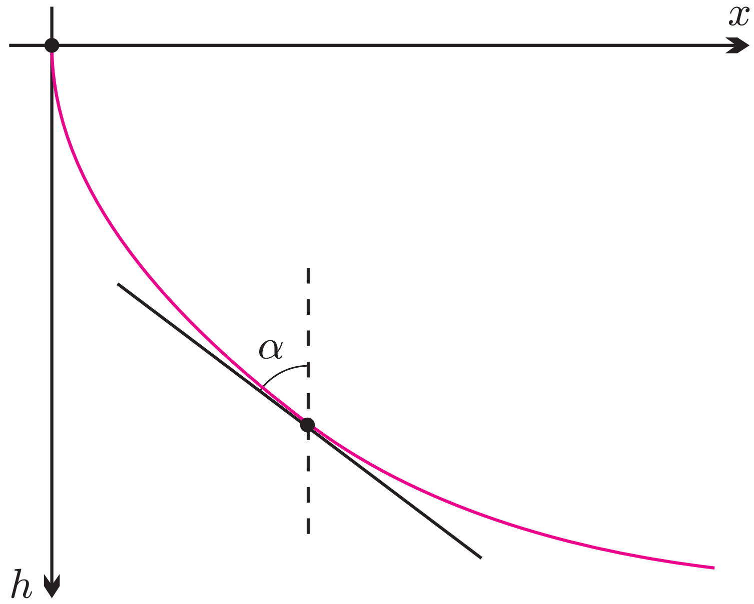
Poszukujemy więc krzywej, dla której $h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha = r(1 - \cos 2\alpha)$.



Poszukujemy więc krzywej, dla której

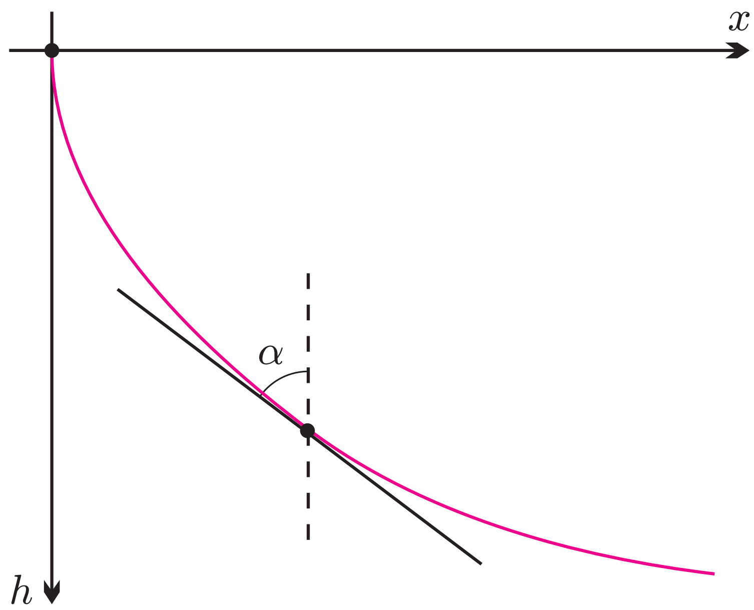
$$h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha = r(1-\cos 2\alpha).$$

Aby znaleźć $x(\alpha)$ wykorzystamy geometryczny sens pochodnej, czyli to, że zmienność to kąt nachylenia stycznej, dokładniej: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}h = \operatorname{tg}\alpha$.



Poszukujemy więc krzywej, dla której

$h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha = r(1 - \cos 2\alpha)$.



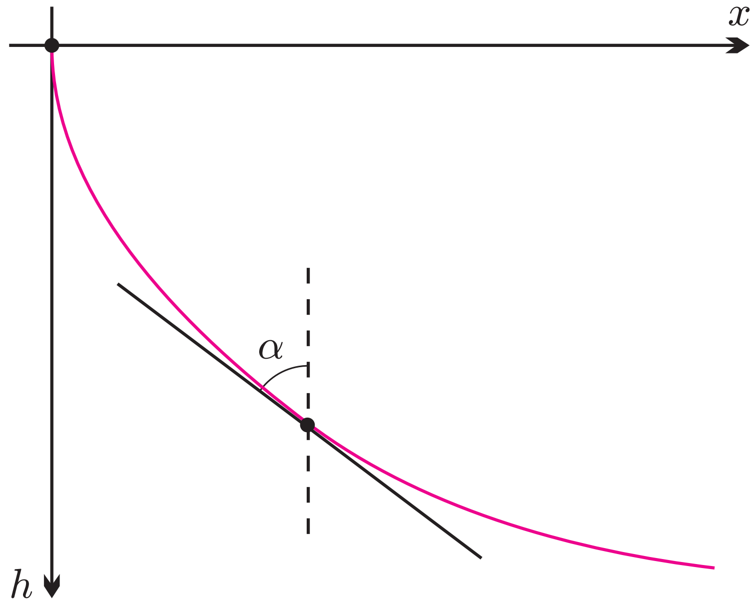

Aby znaleźć $x(\alpha)$ wykorzystamy geometryczny sens pochodnej, czyli to, że zmienność to kąt nachylenia stycznej,

dokładniej: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}h = \operatorname{tg}\alpha$.

Daje to następujący rezultat:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot 2r \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 4r\sin^2\alpha = 2r(1-\cos 2\alpha).$$

Poszukujemy więc krzywej, dla której
$h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha = r(1 - \cos 2\alpha)$.




Aby znaleźć $x(\alpha)$ wykorzystamy
geometryczny sens pochodnej,
czyli to, że zmienność
to kąt nachylenia stycznej,

dokładniej: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}h = \operatorname{tg}\alpha$.

Daje to następujący rezultat:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot 2r \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 4r\sin^2\alpha = 2r(1-\cos 2\alpha).$$

Funkcją, która ma taką pochodną (stanem, który tak się zmienia),
jest $x(\alpha) = r(2\alpha - \sin 2\alpha)$.

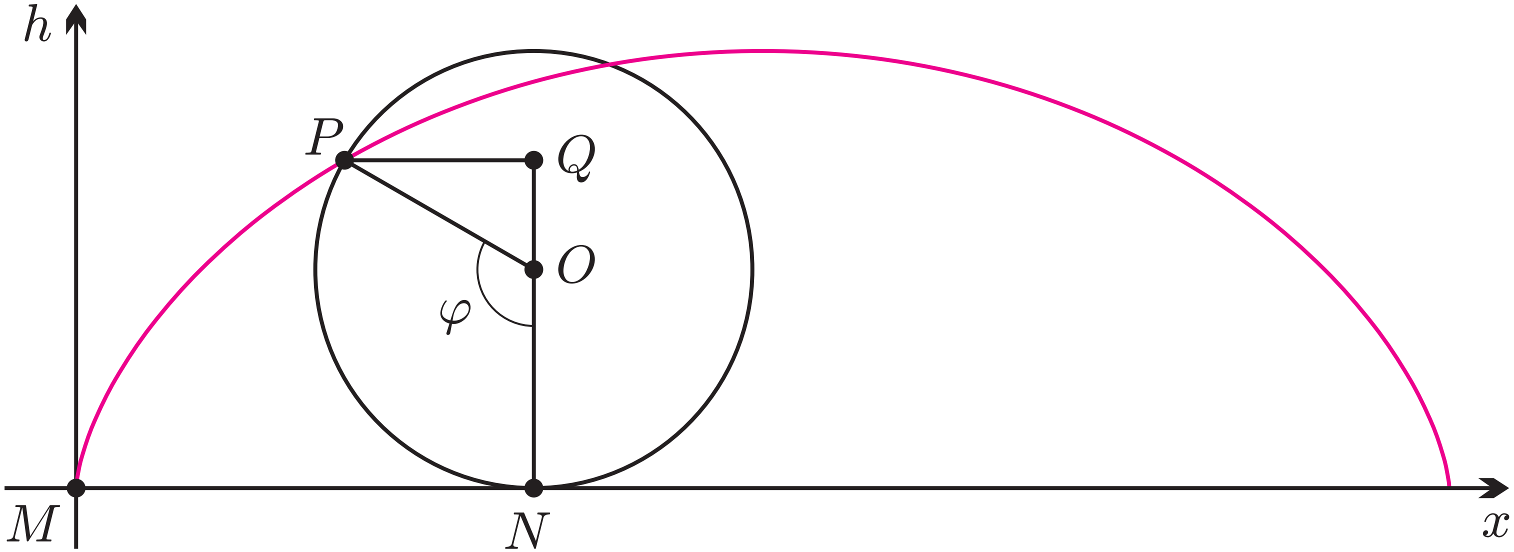
Mamy już zatem przedstawienie parametryczne krzywej, a raczej całej rodziny ($r$ jest dowolną dodatnią stałą).

Zauważmy, że w obu wzorach na współrzędne występuje $2\alpha$
– dla wygody oznaczmy to przez $\varphi$;
mamy więc $(x(\varphi),\, h(\varphi)) = r(\varphi - \sin\varphi,\ 1 - \cos\varphi)$.
Co to za krzywe?

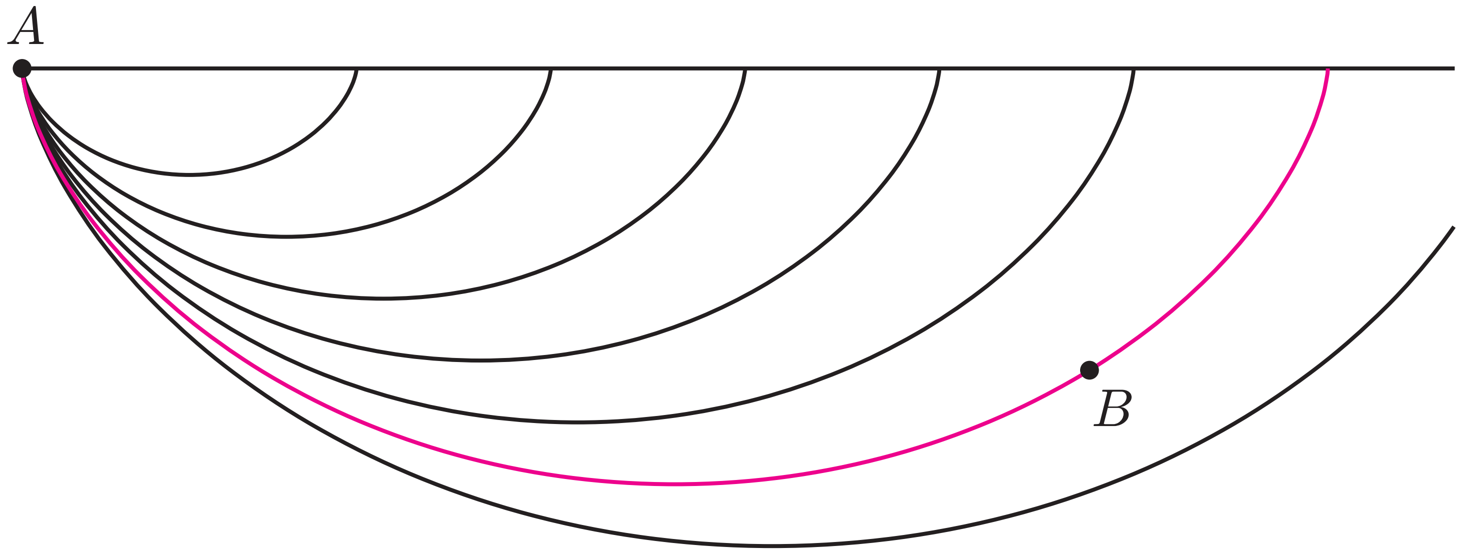
Mamy już zatem przedstawienie parametryczne krzywej, a raczej całej rodziny ($r$ jest dowolną dodatnią stałą).

Zauważmy, że w obu wzorach na współrzędne występuje $2\alpha$ – dla wygody oznaczmy to przez $\varphi$;
mamy więc $(x(\varphi), h(\varphi)) = r(\varphi - \sin\varphi,\ 1 - \cos\varphi)$.
Co to za krzywe?

Nietrudno stwierdzić, że to cykloidy:



Pozostaje pytanie, jak wybrać cykloidę dla konkretnych $A$ i $B$, Pozostaje pytanie, jak wybrać cykloidę dla konkretnych $A$ i $B$, ale to łatwe pytanie:



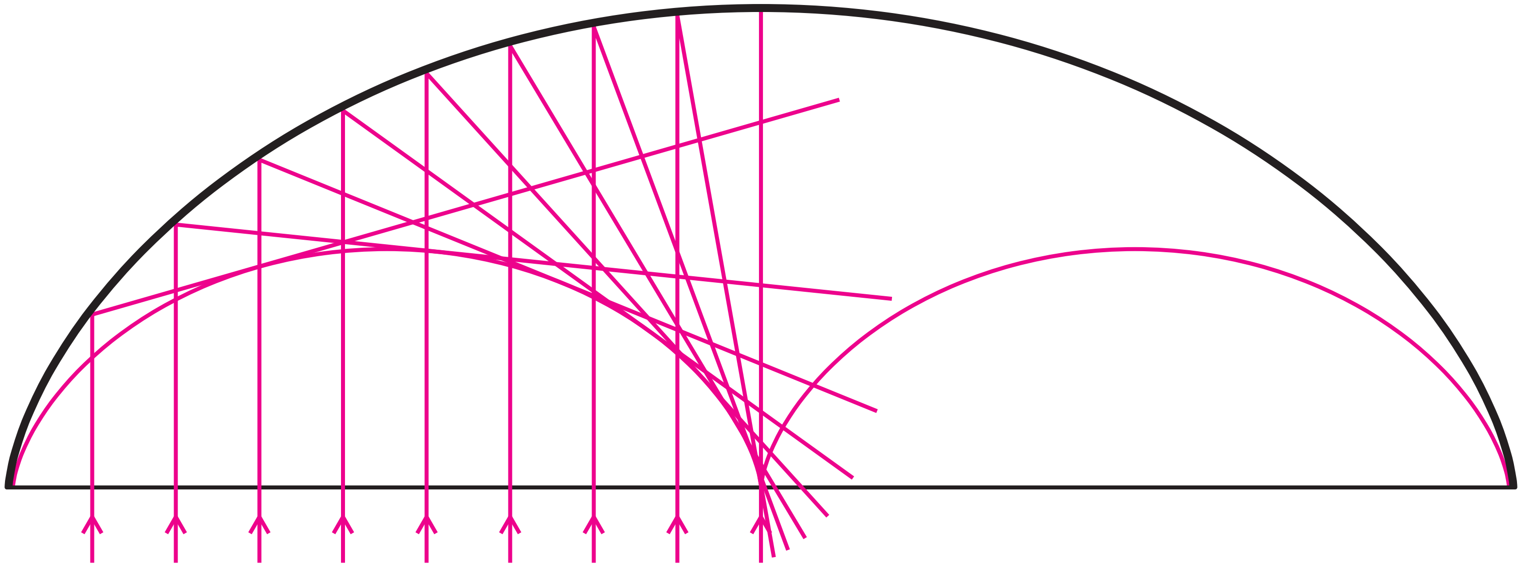
Po Huygensie i Bernoullim kolej na Hamiltona,

po tautochronie i brachistochronie pora na katakaustykę.

Kaustyka to wzmocnienie światła w pewnych obszarach po wysłaniu wiązki promieni równoległych na jakiś układ optyczny. Katakaustyka to kaustyka powstała jedynie w wyniku odbicia.

William Hamilton
– wykorzystując przedstawienie parametryczne cykloidy – odkrył, że jedna z katakaustyk cykloidy to dwie mniejsze cykloidy.

Powstają one, gdy cykloidę oświetlić

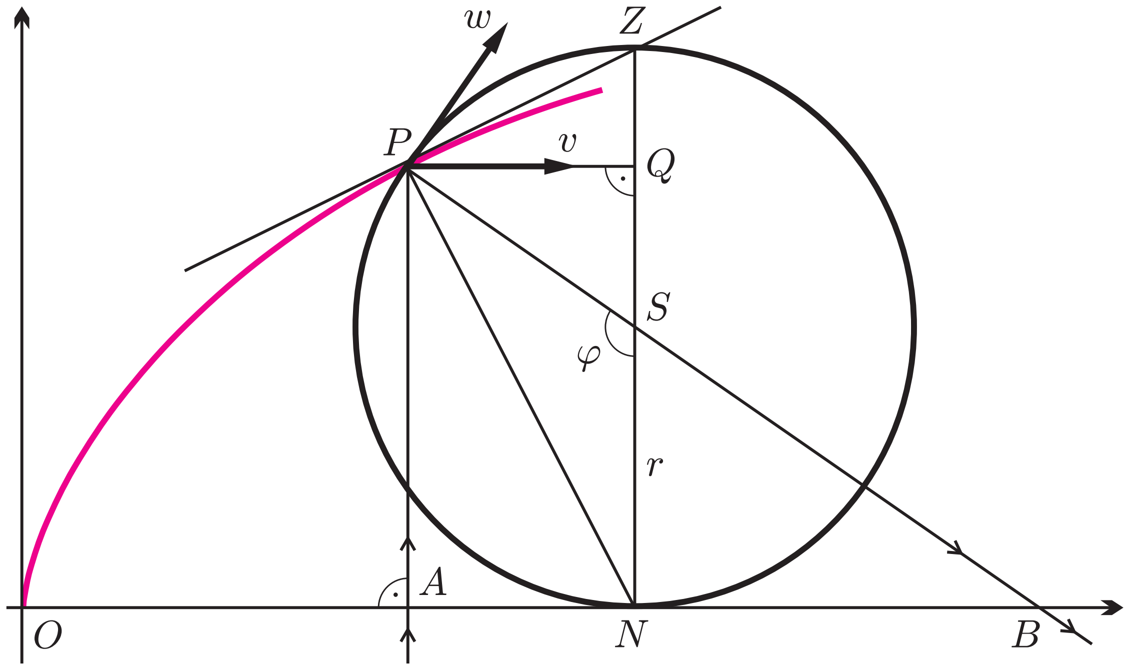


równoległą wiązką światła od dołu.

Oto sytuacja, gdy okrąg przetoczył się o kąt $\varphi$.

Ponieważ $AP \parallel NZ$ oraz $PS = NS = ZS$,

więc $\measuredangle SPZ = \measuredangle SZP = \dfrac{\varphi}{2}$ oraz $\measuredangle APN = \measuredangle PNS = \measuredangle NPS$,



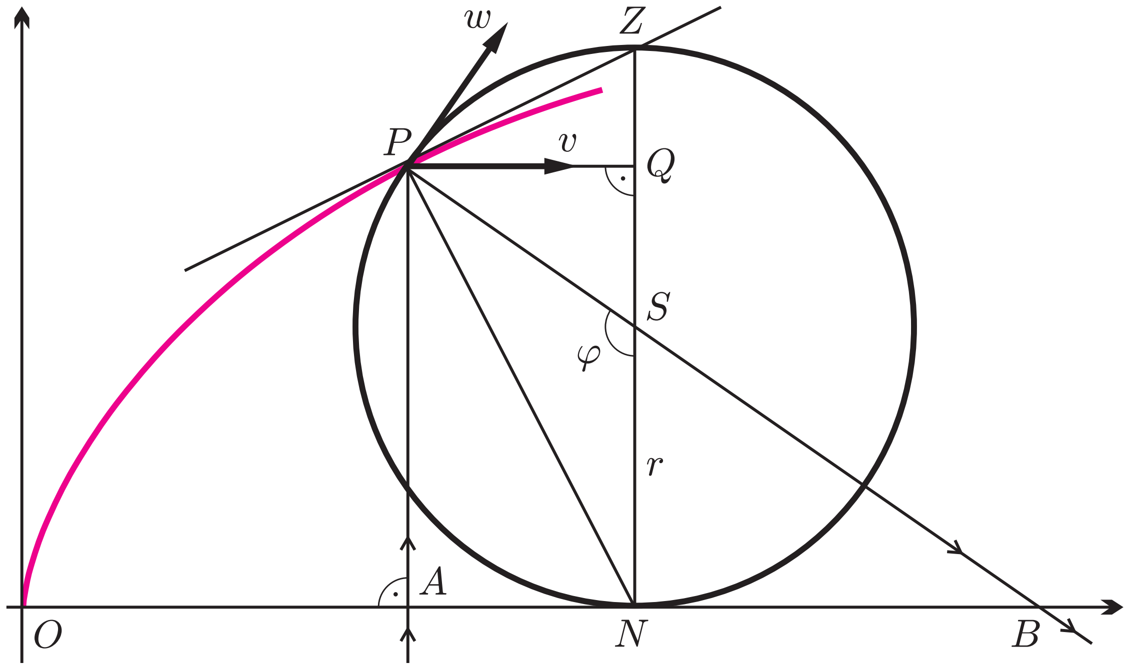
Oto sytuacja, gdy okrąg przetoczył się o kąt $\varphi$.

Ponieważ $AP \parallel NZ$ oraz $PS = NS = ZS$,

więc $\measuredangle SPZ = \measuredangle SZP = \dfrac{\varphi}{2}$ oraz $\measuredangle APN = \measuredangle PNS = \measuredangle NPS$,

a skoro $PN \perp PZ$, to

pionowy promień
po odbiciu
przechodzi zawsze
przez środek
toczącego się okręgu.

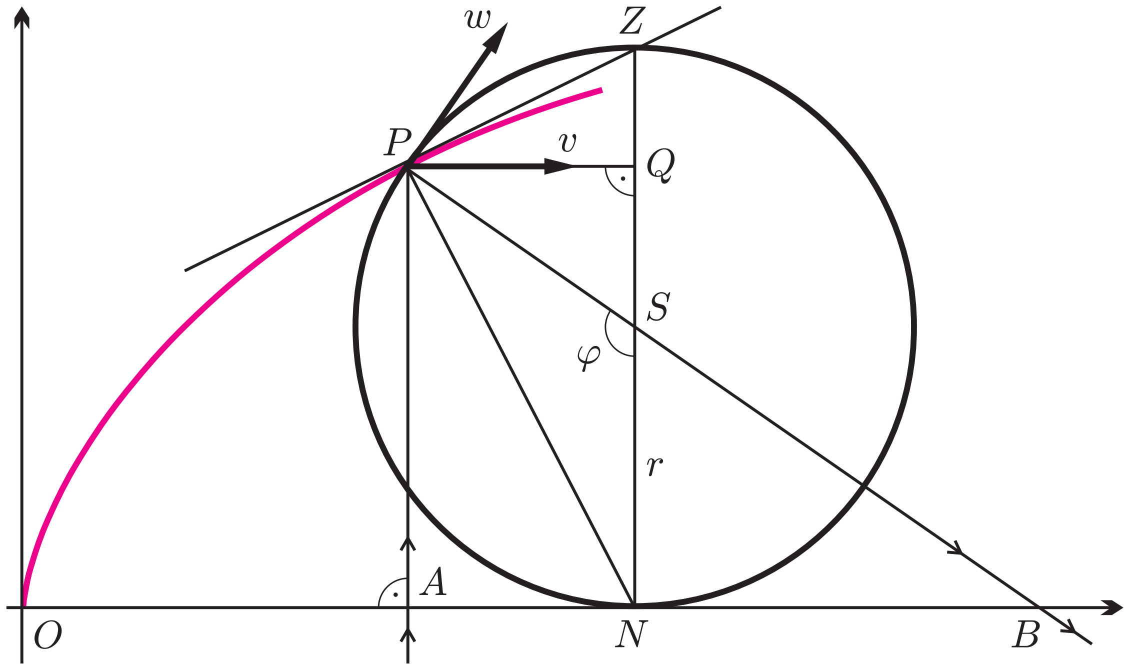


Oto sytuacja, gdy okrąg przetoczył się o kąt $\varphi$.

Ponieważ $AP \parallel NZ$ oraz $PS = NS = ZS$,

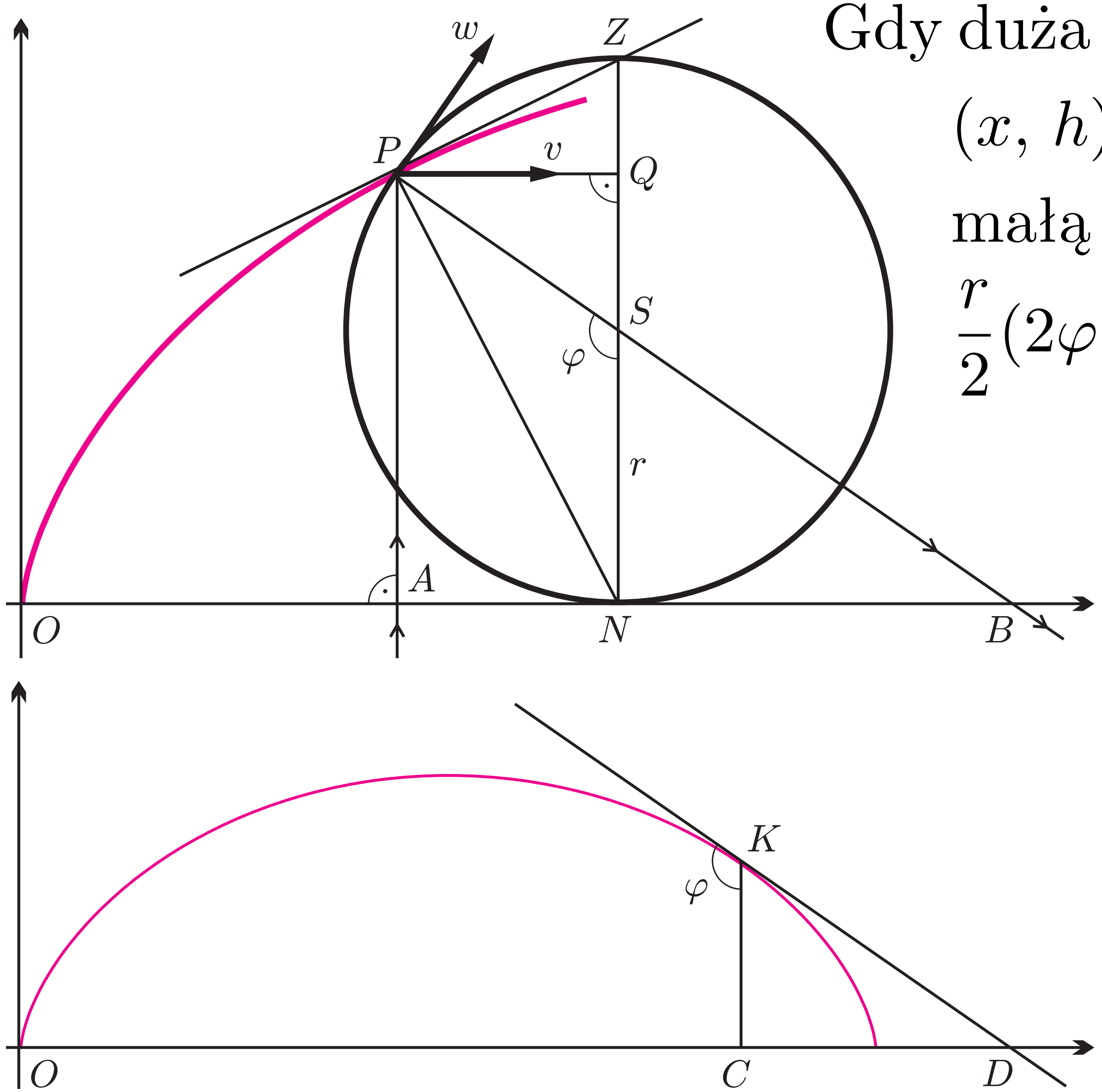
więc $\measuredangle SPZ = \measuredangle SZP = \dfrac{\varphi}{2}$ oraz $\measuredangle APN = \measuredangle PNS = \measuredangle NPS$,

a skoro $PN \perp PZ$, to pionowy promień po odbiciu przechodzi zawsze przez środek toczącego się okręgu.




Pozwala to obliczyć, gdzie trafia w prostą, po której okrąg się toczy:

$OB = ON + NB = r\varphi + r\,\mathrm{tg}\,(\pi - \varphi) = r\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi.$

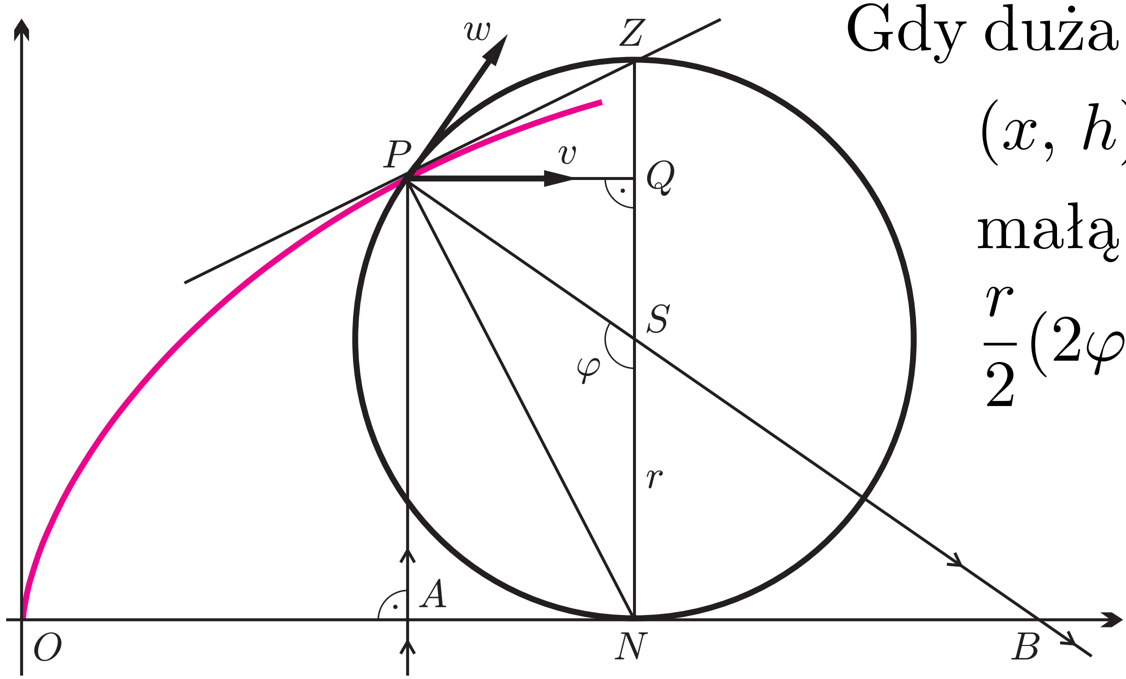



Gdy duża cykloida opisana jest przez

$$(x,\, h) = r(\varphi - \sin\varphi,\ \ 1 - \cos\varphi),$$

małą opisuje

$$\frac{r}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi,\ \ 1 - \cos 2\varphi).$$

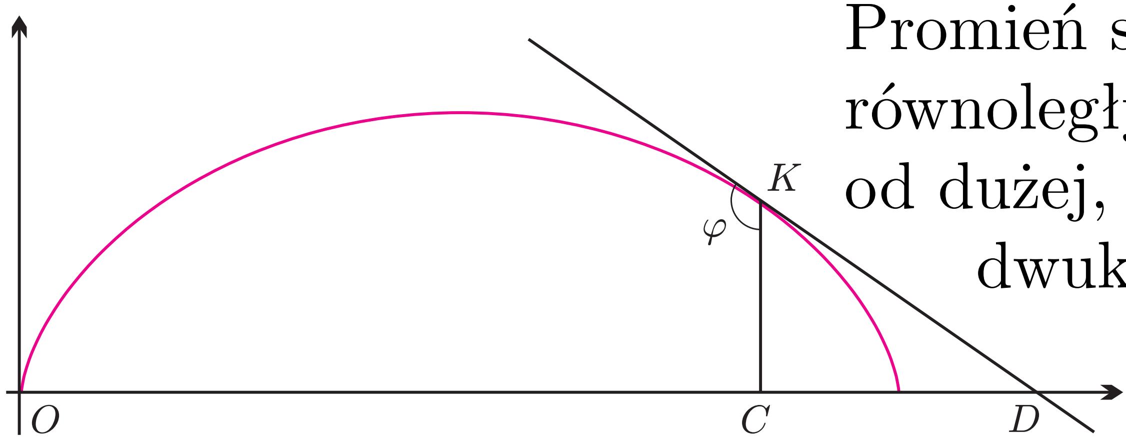



Gdy duża cykloida opisana jest przez

$$(x,\, h) = r(\varphi - \sin\varphi,\ 1 - \cos\varphi),$$

małą opisuje

$$\frac{r}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi,\ 1 - \cos 2\varphi).$$




Promień styczny do małej cykloidy, równoległy do promienia odbitego od dużej, będzie zatem odpowiadał dwukrotnie większemu kątowi, czyli $2\varphi$, a więc będzie tworzył z pionem kąt $\varphi$.

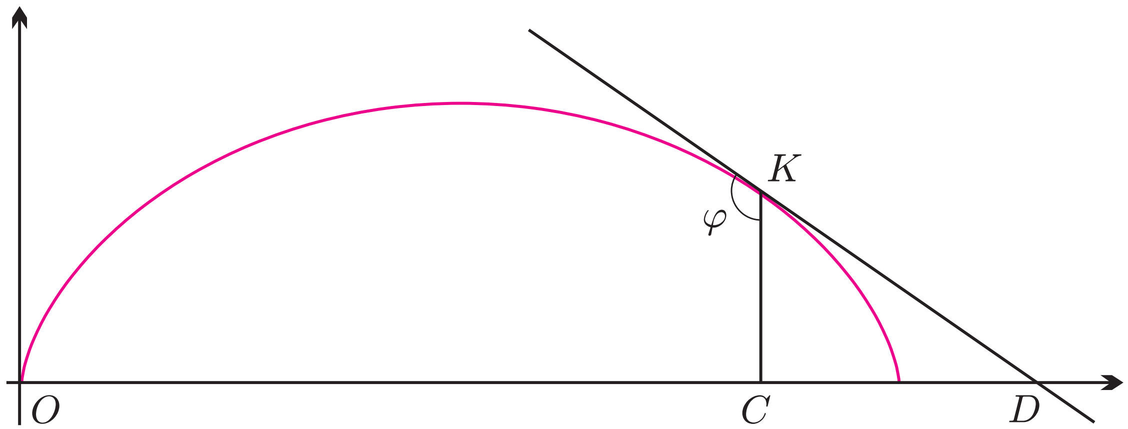
Wystarczy teraz wykazać, że oba przetną podstawę w tym samym punkcie, czyli, że $OD = OB$.

Mamy zatem wykazać, że $OD = r\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Jak widać

$OC = \frac{r}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$,

i $CK = \frac{r}{2}(1 - \cos 2\varphi)$.




Stąd

$$\begin{aligned}
OD &= OC + CD = OC + CK\,\mathrm{tg}\,\measuredangle CKD = \\
&= \frac{r}{2}\cdot 2\varphi - \frac{r}{2}\sin 2\varphi + \frac{r}{2}(1-\cos 2\varphi)\,\mathrm{tg}\,(\pi - \varphi) = \\
&= r\varphi - \frac{r}{2}\sin 2\varphi - \frac{r}{2}(1-\cos 2\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi = \\
&= r\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi - \frac{r}{2}(2 - 2\cos^2\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi = \\
&= r\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi + r\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi = r\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi.
\end{aligned}$$

Tak więc katakaustyką cykloidy są dwie mniejsze cykloidy.