Babilońska droga do układów równań, czyli o dopisywaniu brakujących założeń

Michał Pawłowski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

6 listopada 2020

Co wiemy?

- rozwiązania zadań są najczęściej **dokładne** — schematy znajdowania wyniku nie są przypadkowe

Co wiemy?

- rozwiązania zadań są najczęściej **dokładne** — schematy znajdowania wyniku nie są przypadkowe
- schematy te są jednak **indywidualnie przygotowywane** dla poszczególnych danych początkowych

Co wiemy?

- rozwiązania zadań są najczęściej **dokładne** — schematy znajdowania wyniku nie są przypadkowe
- schematy te są jednak **indywidualnie przygotowywane** dla poszczególnych danych początkowych
- powtarzającą się procedurą jest **znalezienie sumy i różnicy** szukanych liczb (lub ich kwadratów)

Od czego zacząć?

- analizowane zadania pochodzą z **tabliczek dydaktycznych**, zatem nauczyciel mógł swobodnie wybierać założenia początkowe

Od czego zacząć?

- analizowane zadania pochodzą z **tabliczek dydaktycznych**, zatem nauczyciel mógł swobodnie wybierać założenia początkowe
- aby zrozumieć, dlaczego wybierał akurat takie a nie inne dane, możemy odczytywać rozwiązania **od końca**

Od czego zacząć?

- analizowane zadania pochodzą z **tabliczek dydaktycznych**, zatem nauczyciel mógł swobodnie wybierać założenia początkowe
- aby zrozumieć, dlaczego wybierał akurat takie a nie inne dane, możemy odczytywać rozwiązania **od końca**
- tym sposobem napotkamy **podobne trudności**, jakie spotykał nauczyciel podczas wymyślania zadań

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x + y)(x - y) + xy = 4400$$

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x + y)(x - y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10$$

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x+y)(x-y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x + y)(x - y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$
$$50 + 10 = 60$$
$$50 - 10 = 40$$

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x + y)(x - y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$
$$50 + 10 = 60$$
$$50 - 10 = 40$$

- dwa ostatnie kroki wyznaczają x i y na podstawie połówek **sumy** oraz **różnicy** tych liczb

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x+y)(x-y) + xy = 4400$$

$$\begin{aligned}
100^2 &= 10000 \\
10000 - 4400 &= 5600 \\
1/2 \cdot 100 &= 50 \\
50^2 &= 2500 \\
5600 + 2500 &= 8100 \\
\sqrt{8100} &= 90 \\
100 - 90 &= 10 = x - y \\
50 + 10 &= 60 \\
50 - 10 &= 40
\end{aligned}$$

- dwa ostatnie kroki wyznaczają x i y na podstawie połówek **sumy** oraz **różnicy** tych liczb
- suma **jest dana** jako pierwszy parametr zadania

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x + y)(x - y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$
$$50 + 10 = 60$$
$$50 - 10 = 40$$

- dwa ostatnie kroki wyznaczają x i y na podstawie połówek **sumy** oraz **różnicy** tych liczb
- suma **jest dana** jako pierwszy parametr zadania — załóżmy, że na razie (jako nauczyciel) decydujemy się przyjąć tylko to założenie

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x+y)(x-y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$
$$50 + 10 = 60$$
$$50 - 10 = 40$$

- dwa ostatnie kroki wyznaczają x i y na podstawie połówek **sumy** oraz **różnicy** tych liczb
- suma **jest dana** jako pierwszy parametr zadania — załóżmy, że na razie (jako nauczyciel) decydujemy się przyjąć tylko to założenie
- teraz chcemy znaleźć taki drugi parametr, aby jego znajomość **pozwoliła** na policzenie połowy różnicy liczb x i y

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x+y)(x-y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$
$$50 + 10 = 60$$
$$50 - 10 = 40$$

- dwa ostatnie kroki wyznaczają x i y na podstawie połówek **sumy** oraz **różnicy** tych liczb
- suma **jest dana** jako pierwszy parametr zadania — załóżmy, że na razie (jako nauczyciel) decydujemy się przyjąć tylko to założenie
- teraz chcemy znaleźć taki drugi parametr, aby jego znajomość **pozwoliła** na policzenie połowy różnicy liczb x i y
- wystarczająca jest znajomość **sumy ułamków** $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$

Ostatnie kroki — idziemy od końca

$$x + y = 100$$
$$(x+y)(x-y) + xy = 4400$$

$$100^2 = 10000$$
$$10000 - 4400 = 5600$$
$$1/2 \cdot 100 = 50$$
$$50^2 = 2500$$
$$5600 + 2500 = 8100$$
$$\sqrt{8100} = 90$$
$$100 - 90 = 10 = x - y$$
$$50 + 10 = 60$$
$$50 - 10 = 40$$

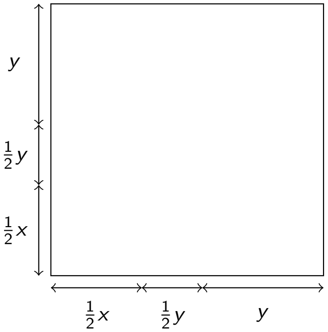
- dwa ostatnie kroki wyznaczają x i y na podstawie połówek **sumy** oraz **różnicy** tych liczb
- suma **jest dana** jako pierwszy parametr zadania — załóżmy, że na razie (jako nauczyciel) decydujemy się przyjąć tylko to założenie
- teraz chcemy znaleźć taki drugi parametr, aby jego znajomość **pozwoliła** na policzenie połowy różnicy liczb x i y
- wystarczająca jest znajomość **sumy ułamków** $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ (którą można odjąć od $x + y$)

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby

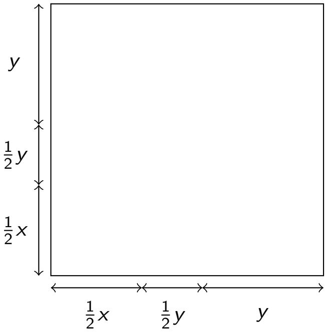
Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby



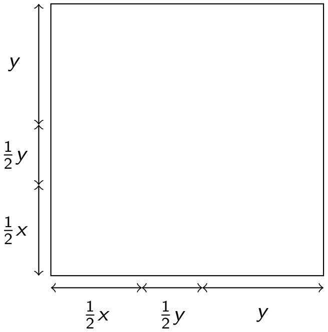
Kwadraty — podnosimy trudność zadania

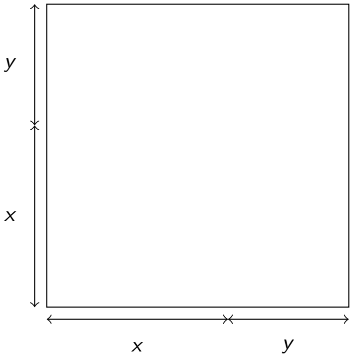
- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$



Kwadraty — podnosimy trudność zadania

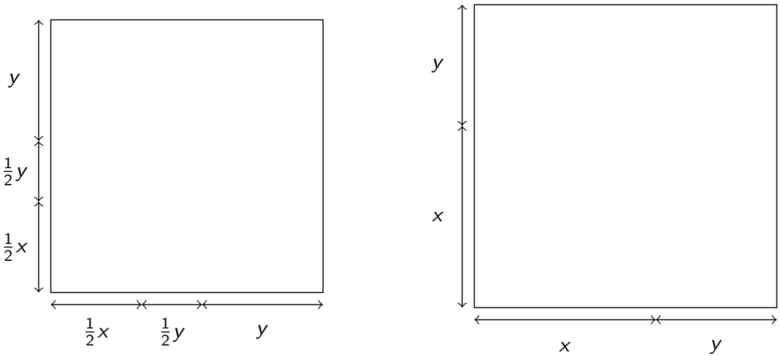
- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$





Kwadraty — podnosimy trudność zadania

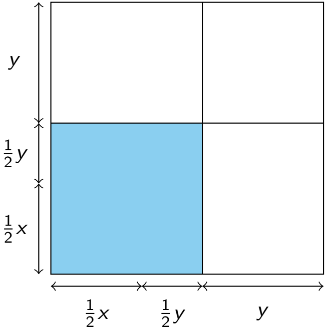
- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

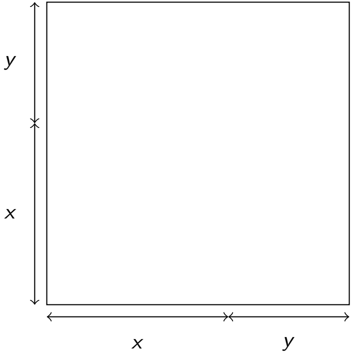


Krok 1. Pole kwadratu o boku $\frac{1}{2}(x + y)$ możemy obliczyć na podstawie pierwszego parametru.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

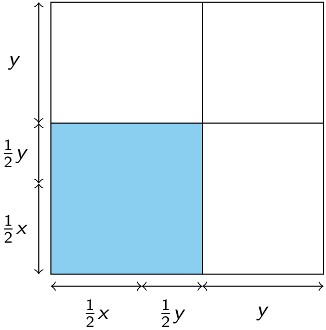


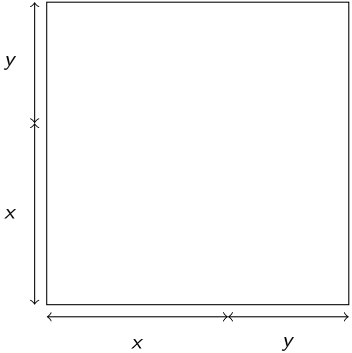


Krok 1. Pole kwadratu o boku $\frac{1}{2}(x+y)$ możemy obliczyć na podstawie pierwszego parametru.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

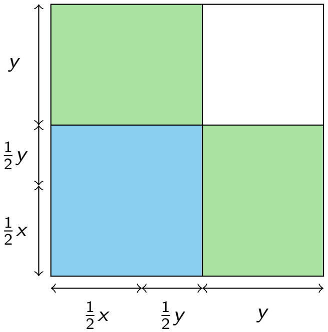


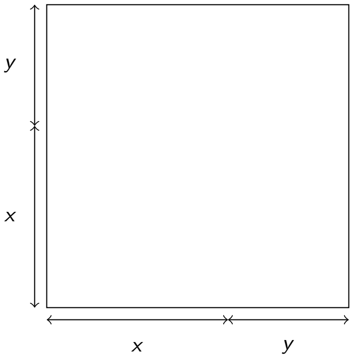


Krok 2. Prostokąty o wymiarach $\frac{1}{2}(x + y)$ na y odkładamy w kwadracie o boku $x + y$.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

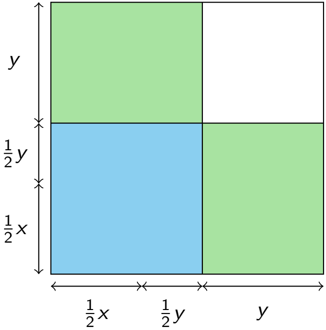


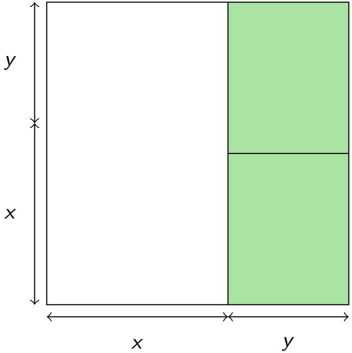


Krok 2. Prostokąty o wymiarach $\frac{1}{2}(x + y)$ na y odkładamy w kwadracie o boku $x + y$.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

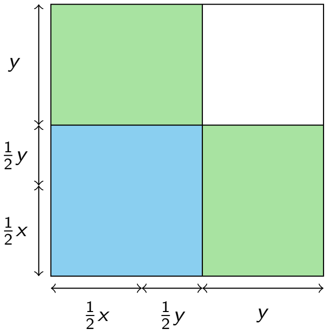


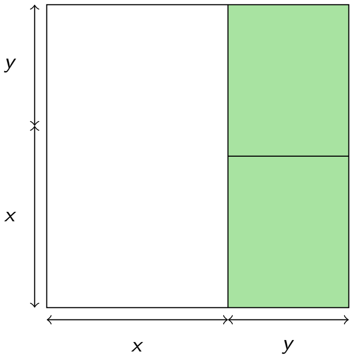


Krok 2. Prostokąty o wymiarach $\frac{1}{2}(x + y)$ na y odkładamy w kwadracie o boku $x + y$.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

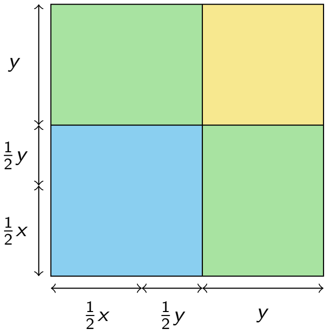


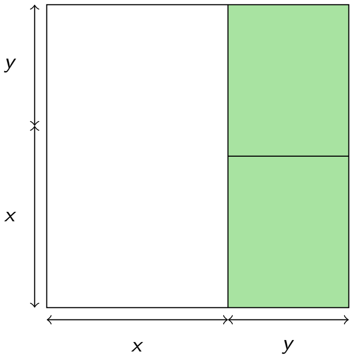


Krok 3. Podobnie odkładamy kwadrat o boku y.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

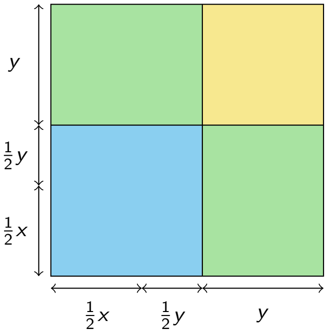


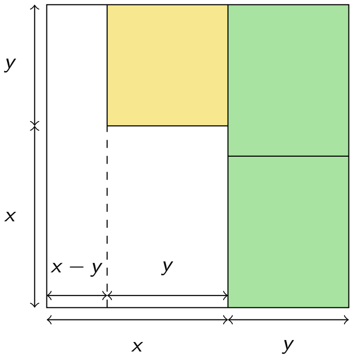


Krok 3. Podobnie odkładamy kwadrat o boku y.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$

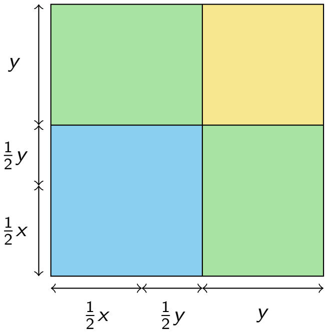


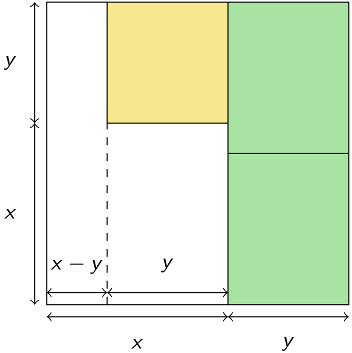


Krok 3. Podobnie odkładamy kwadrat o boku y.

Kwadraty — podnosimy trudność zadania

- zamiast wartości $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$ możemy badać **kwadrat** tej liczby
- w naszych rachunkach możemy także użyć kwadratu $x + y$





Krok 4. W kwadracie o boku $x + y$ pozostało $(x + y)(x - y) + xy$ wolnego miejsca, zatem to jest drugi parametr.

Uzasadnienie

- przedstawione obserwacje można też **uzasadnić rachunkowo** (ale „obraz wyraża więcej niż tysiąc słów")

Uzasadnienie

- przedstawione obserwacje można też **uzasadnić rachunkowo** (ale „obraz wyraża więcej niż tysiąc słów")
- **kolejność parametrów** może nie być przypadkowa — pokazuje od czego zaczynał nauczyciel

Uzasadnienie

- przedstawione obserwacje można też **uzasadnić rachunkowo** (ale „obraz wyraża więcej niż tysiąc słów”)
- **kolejność parametrów** może nie być przypadkowa — pokazuje od czego zaczynał nauczyciel
- zapisane na tabliczce równości **w całości** odpowiadają przedstawionej analizie

Uzasadnienie

- przedstawione obserwacje można też **uzasadnić rachunkowo** (ale „obraz wyraża więcej niż tysiąc słów")
- **kolejność parametrów** może nie być przypadkowa — pokazuje od czego zaczynał nauczyciel
- zapisane na tabliczce równości **w całości** odpowiadają przedstawionej analizie
- inne zadania pokazują, że Babilończycy często **uzupełniali prostokąty do kwadratów**

Jedno założenie, dwa sposoby

- tabliczka BM 13901 zawiera **dwa zadania** zaczynające się od **tego samego założenia** ($x^2 + y^2 = 1300$)

Jedno założenie, dwa sposoby

- tabliczka BM 13901 zawiera **dwa zadania** zaczynające się od **tego samego założenia** $(x^2 + y^2 = 1300)$
- wybór **drugiego założenia** można jednak wiązać ze sposobem, którym nauczyciel chce rozwiązać tworzone zadanie

Poszukiwanie sumy liczb

Zadanie nr 9

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$x - y = 10$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$1/2 \cdot 10 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$650 - 25 = 625$$
$$\sqrt{625} = 25$$
$$25 + 5 = 30$$
$$25 - 5 = 20$$

Poszukiwanie sumy liczb

Zadanie nr 9

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$x - y = 10$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$1/2 \cdot 10 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$650 - 25 = 625$$
$$\sqrt{625} = 25$$
$$25 + 5 = 30$$
$$25 - 5 = 20$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**

Poszukiwanie sumy liczb

Zadanie nr 9

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$x - y = 10$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$1/2 \cdot 10 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$650 - 25 = 625$$
$$\sqrt{625} = 25$$
$$25 + 5 = 30$$
$$25 - 5 = 20$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę $x + y$

Poszukiwanie sumy liczb

Zadanie nr 9

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$x - y = 10$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$1/2 \cdot 10 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$650 - 25 = 625$$
$$\sqrt{625} = 25$$
$$25 + 5 = 30$$
$$25 - 5 = 20$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę $x + y$
- podobna analiza jak wcześniej pokazuje, że połowa $x^2 + y^2$ „**wystaje**" z kwadratu o boku długości $\frac{1}{2}(x + y)$ o kwadrat o boku długości $\frac{1}{2}(x - y)$

Poszukiwanie sumy liczb

Zadanie nr 9

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$x - y = 10$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$1/2 \cdot 10 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$650 - 25 = 625$$
$$\sqrt{625} = 25$$
$$25 + 5 = 30$$
$$25 - 5 = 20$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę $x + y$
- podobna analiza jak wcześniej pokazuje, że połowa $x^2 + y^2$ „**wystaje**” z kwadratu o boku długości $\frac{1}{2}(x + y)$ o kwadrat o boku długości $\frac{1}{2}(x - y)$
- stąd jako drugi parametr zadania nauczyciel wybiera różnicę $x - y$

Poszukiwanie różnicy kwadratów

Zadanie nr 12

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$xy = 600$$

$$\begin{aligned}
1/2 \cdot 1300 &= 650 \\
650^2 &= 422500 \\
600^2 &= 360000 \\
422500 - 360000 &= 62500 \\
\sqrt{62500} &= 250 \\
650 + 250 &= 900 \\
\sqrt{900} &= 30 \\
650 - 250 &= 400 \\
\sqrt{400} &= 20
\end{aligned}$$

Poszukiwanie różnicy kwadratów

Zadanie nr 12

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$xy = 600$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$650^2 = 422500$$
$$600^2 = 360000$$
$$422500 - 360000 = 62500$$
$$\sqrt{62500} = 250$$
$$650 + 250 = 900$$
$$\sqrt{900} = 30$$
$$650 - 250 = 400$$
$$\sqrt{400} = 20$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**

Poszukiwanie różnicy kwadratów

Zadanie nr 12

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$xy = 600$$

$$\begin{aligned} 1/2 \cdot 1300 &= 650 \\ 650^2 &= 422500 \\ 600^2 &= 360000 \\ 422500 - 360000 &= 62500 \\ \sqrt{62500} &= 250 \\ 650 + 250 &= 900 \\ \sqrt{900} &= 30 \\ 650 - 250 &= 400 \\ \sqrt{400} &= 20 \end{aligned}$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę różnicy $x^2 - y^2$

Poszukiwanie różnicy kwadratów

Zadanie nr 12

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$xy = 600$$

$$\begin{aligned}
1/2 \cdot 1300 &= 650 \\
650^2 &= 422500 \\
600^2 &= 360000 \\
422500 - 360000 &= 62500 \\
\sqrt{62500} &= 250 \\
650 + 250 &= 900 \\
\sqrt{900} &= 30 \\
650 - 250 &= 400 \\
\sqrt{400} &= 20
\end{aligned}$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę różnicy $x^2 - y^2$
- wiemy, że kwadrat połowy $x^2 + y^2$ jest równy kwadratowi połowy $x^2 - y^2$ powiększonemu o kwadrat iloczynu xy

Poszukiwanie różnicy kwadratów

Zadanie nr 12

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$xy = 600$$

$$\begin{aligned} 1/2 \cdot 1300 &= 650 \\ 650^2 &= 422500 \\ 600^2 &= 360000 \\ 422500 - 360000 &= 62500 \\ \sqrt{62500} &= 250 \\ 650 + 250 &= 900 \\ \sqrt{900} &= 30 \\ 650 - 250 &= 400 \\ \sqrt{400} &= 20 \end{aligned}$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę różnicy $x^2 - y^2$
- wiemy, że kwadrat połowy $x^2 + y^2$ jest równy kwadratowi połowy $x^2 - y^2$ powiększonemu o kwadrat iloczynu xy
- co więcej, są dowody na to, że **Babilończycy także dysponowali taką wiedzą**

Poszukiwanie różnicy kwadratów

Zadanie nr 12

$$x^2 + y^2 = 1300$$
$$xy = 600$$

$$1/2 \cdot 1300 = 650$$
$$650^2 = 422500$$
$$600^2 = 360000$$
$$422500 - 360000 = 62500$$
$$\sqrt{62500} = 250$$
$$650 + 250 = 900$$
$$\sqrt{900} = 30$$
$$650 - 250 = 400$$
$$\sqrt{400} = 20$$

- pierwszy parametr **jest ustalony**
- chcemy wyznaczyć połowę różnicy $x^2 - y^2$
- wiemy, że kwadrat połowy $x^2 + y^2$ jest równy kwadratowi połowy $x^2 - y^2$ powiększonemu o kwadrat iloczynu xy
- co więcej, są dowody na to, że **Babilończycy także dysponowali taką wiedzą**
- stąd jako drugi parametr zadania nauczyciel wybiera iloczyn xy

Uwagi końcowe

- zapisane na tabliczkach **obliczenia są wynikiem realizacji** odpowiadających im **algorytmów**, a nie ogólnym sposobem rozwiązywania równań kwadratowych

Uwagi końcowe

- zapisane na tabliczkach **obliczenia są wynikiem realizacji** odpowiadających im **algorytmów**, a nie ogólnym sposobem rozwiązywania równań kwadratowych
- sposób powstawania zadań można analizować, czytając ich rozwiązania **od końca** — wtedy „początek” rozważań zawsze **będzie taki sam**

Uwagi końcowe

- zapisane na tabliczkach **obliczenia są wynikiem realizacji** odpowiadających im **algorytmów**, a nie ogólnym sposobem rozwiązywania równań kwadratowych
- sposób powstawania zadań można analizować, czytając ich rozwiązania **od końca** — wtedy „początek” rozważań zawsze **będzie taki sam**
- babilońscy nauczyciele mogli tworzyć zadania, zaczynając od jednego założenia, a następnie sprawdzać, **jakich danych brakuje**, aby wybrana przez nich metoda (algorytm) zadziałała