**WARSZAWSKA SZKOŁA DOKTORSKA MATEMATYKI I INFORMATYKI**

18 czerwca 2025

Egzamin kwalifikacyjny

Na kolejnych stronach znajduje się 16 zadań dotyczących różnych obszarów matematyki i informatyki. Należy wybrać i rozwiązać **dowolne 4 z nich**. Każde zadanie jest warte tyle samo punktów.

Zadania można wybierać dowolnie, tj. kandydaci na studia w dyscyplinie matematyka mogą rozwiązywać także zadania "informatyczne" i na odwrót.

Większość zadań składa się z kilku podzadań, jednak każde zadanie, tj. wszystkie jego podpunkty, punktowane jest jako całość.

Możesz spróbować rozwiązać więcej niż 4 zadania. Wszystkie te rozwiązania będą ocenione, jednak **tylko 4 najlepiej ocenione zadania wejdą w skład Twojej ogólnej oceny**.

Wszystkie odpowiedzi należy odpowiednio uzasadnić. **Rozwiązania oddzielnych zadań powinny się znaleźć na osobnych kartkach**; oczywiście rozwiązanie jednego zadania może być zapisane na więcej niż jednej kartce.

Każda oddana kartka powinna być **podpisana imieniem i nazwiskiem**, a także opatrzona **numerem odpowiedniego zadania**.

Czas trwania egzaminu: 3 godziny

Powodzenia!

## Analiza matematyczna

Zadanie 1. Niech $\gamma$ będzie elipsą o równaniu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, gdzie $a, b > 0$.

(a) Rozstrzygnąć dla jakich $p > 0$ funkcja $d\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ określona wzorem $d(\mathbf{x}) = (\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \gamma))^p$ jest jednostajnie ciągła, gdzie $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \gamma)$ oznacza odległość punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ od krzywej $\gamma$.

(b) Wyznaczyć na elipsie $\gamma$ punkt położony najbliżej prostej o równaniu $bx + ay - 2b = 0$.

(c) Dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ niech

$$f(x,y) = \frac{xy}{r^2} - \theta, \tag{$*$}$$

gdzie $x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, tzn. $\theta$ jest (niejednoznacznie wyznaczonym) argumentem liczby zespolonej $x + \mathrm{i}y$. Pokazać, że każdy punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ ma otoczenie $U$ takie, że dla odpowiedniego wyboru argumentu funkcja $f$ dana wzorem $(*)$ jest klasy $C^1$ na $U$. Obliczyć gradient $\nabla f(x, y)$.

(d) Obliczyć całkę z 1-formy różniczkowej

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{y^3\,\mathrm{d}x - xy^2\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

gdzie elipsa $\gamma$ jest dodatnio zorientowana.

## Funkcje analityczne

Zadanie 2. Niech $\Omega$ będzie płaszczyzną zespoloną rozciętą wzdłuż półprostych $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ i $[\frac{1}{2}, \infty)$, tj. $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty))$. W punktach (a) i (b) wystarczy podać choć jeden przykład odwzorowania spełniającego żądane warunki; odpowiedź należy jednak uzasadnić.

(a) Wyznaczyć przekształcenie Möbiusa (homografię) przeprowadzające obszar $\Omega$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(b) Wyznaczyć różnowartościowe odwzorowanie holomorficzne przeprowadzające obszar $\Omega$ na koło $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

(c) Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Określmy funkcję holomorficzną $f\colon \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ wzorem

$$f(z) = \operatorname{Log} \frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

gdzie Log oznacza główną gałąź logarytmu. Wyznaczyć obraz $f(\mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta])$ odzworowania $f$.

(d) Przyjmijmy w powyższym wzorze $\alpha = -1$, $\beta = 1$, tzn. funkcja $f$ określona jest wzorem

$$f(z) = \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1}.$$

Niech $\Gamma$ będzie dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie $z_0 = \frac{e+1}{e-1}$ i promieniu $r = 1$. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - 1}.$$

## Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadanie 3. Rozważmy rodzinę prostych poziomych

$$\mathcal{L} = \big\{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = k\} \colon k \in \mathbb{Z}\big\}$$

leżących na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Losowo rzucamy igłą o długości 1 na płaszczyznę z następującym rozkładem. Środek igły spada wewnątrz kwadratu $[0,10] \times [0,10]$ z rozkładem jednostajnym. Kierunek igły ma również rozkład jednostajny i jest niezależny od pozycji środka igły.

(a) Niech $A$ będzie zdarzeniem polegającym na tym, że igła przecina pewną prostą z rodziny $\mathcal{L}$, i niech $X = \mathbb{1}_A$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $A$. Obliczyć prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}X$.

(b) Niech $X_n$ będzie liczbą razy kiedy igła przecięła prostą z rodziny $\mathcal{L}$ w $n$ niezależnych próbach. Oszacować jak duże należy wziąć $n$, aby wiedzieć, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0.95 zachodzi

$$\left|\frac{1}{n}X_n - \mathbb{E}X\right| \leqslant \frac{1}{10}\mathbb{E}X.$$

(c) Co można powiedzieć o asymptotycznym zachowaniu

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}X_n - \mathbb{E}X\right) > 0.1$$

przy $n \to \infty$?

(d) Tym razem postępujemy podobnie, jak wyżej, ale rzuty nie są niezależne. Pierwszy rzut wykonujemy jak wcześniej; w każdym kolejnym kierunek igły musi różnić się od kierunku uzyskanego w poprzednim rzucie o co najmniej $30°$ (w dopuszczonym zakresie kierunek ma wciąż rozkład jednostajny i jest niezależny od innych rzutów, jak i od położenia środka igły). Przyjmujemy także, że pozycje środka igły w każdym rzucie są parami niezależne i mają, jak wcześniej, rozkład jednostajny na $[0,10] \times [0,10]$. Niech $Y_n$ będzie liczbą razy kiedy igła przecięła prostą z rodziny $\mathcal{L}$ w $n$ próbach. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}Y_n}{n}.$$

## Geometria i algebra liniowa

Zadanie 4. Niech $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ będzie macierzą wymiaru $n \times m$ (niekoniecznie kwadratową) o współczynnikach rzeczywistych.

(a) Określić dla jakich macierzy $A$ macierz $B_A = A^T \cdot A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ jest macierzą iloczynu skalarnego. Czy istnieją pary liczb $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnej niezerowej macierzy $A$ macierz $B_A$ jest macierzą iloczynu skalarnego?

(b) Niech $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią. Jakie liczby zespolone mogą być wartościami własnymi $f$?

(c) Niech $f_\sigma \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie izometrią zadaną macierzą permutacji dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_4$ czterech elementów. Wyznaczyć wartości własne $f_\sigma$ oraz postać Jordana endomorfizmu $f_\sigma \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, czyli endomorfizmu o powyższej macierzy rozpatrywanej po rozszerzeniu ciała do ciała liczb zespolonych.

(d) Niech $V$ będzie $n$-wymiarową przestrzenią euklidesową (czyli przestrzenią liniową z wybranym iloczynem skalarnym). Udowodnić, że dla dowolnego $k \in \{1,\ldots,n\}$ rzut prostopadły nie zwiększa $k$-wymiarowej objętości. Zacząć od $k = 1$. Udowodnić, że moduł wyznacznika macierzy kwadratowej o kolumnach długości co najwyżej 1 wynosi co najwyżej 1.

## Algebra

Zadanie 5. Niech $D_5$ będzie grupą izomorfizmów pięciokąta foremnego, zaś $A_5$ grupą parzystych permutacji pięciu elementów.

(a) Znaleźć wszystkie homomorfizmy $h\colon D_5 \times \mathbb{Z}_2 \to A_5$ oraz $g\colon A_5 \to D_5$.

(b) Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie pierścieniem liczb Gaussa, czyli $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy\colon x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ z działaniami odziedziczonymi z ciała liczb zespolonych. Udowodnić, że $\mathbb{Z}[i]/(3 + i)$ jest izomorficzny z $\mathbb{Z}_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz znaleźć liczbę $m$.

(c) Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni z jedynką $\mathbb{Z}[x]/(x^2) \to \mathbb{Z}_{24}$ oraz $\mathbb{Z}[x, x^{-1}] \to \mathbb{Z}_{24}$.

(d) Udowodnić, że skończona dziedzina (czyli pierścień o skończonej liczbie elementów bez dzielników zera) jest ciałem. Znaleźć wszystkie ideały pierwsze w pierścieniu $\mathbb{Z}_{2025}[x]/(x^{45})$.

## Topologia

Zadanie 6. Dla dowolnej liczby kardynalnej $\kappa$ symbolem $D(\kappa)$ oznaczamy przestrzeń dyskretną mocy $\kappa$. Zdefiniujmy przestrzeń $\mathfrak{X} = D(\aleph_0)^{\mathfrak{c}}$, tj. $\mathfrak{X}$ jest produktem $\mathfrak{c}$ wielu kopii nieskończonej, przeliczalnej przestrzeni dyskretnej.

(a) W przestrzeni $\mathfrak{X}$ skonstruować $\mathfrak{c}$ wiele parami rozłącznych zbiorów domkniętych, z których każdy jest homeomorficzną kopią zbioru Cantora.

(b) Dla każdego $t \in [0, 1]$ określmy funkcję $f_t\colon [0, 1] \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ wzorami:

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x = t \\ n & \text{jeżeli } n \in \mathbb{N}, \text{ oraz } \frac{1}{n+1} < |x - t| \leqslant \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Określmy także funkcję $F\colon [0, 1] \to \{0, 1, 2, \ldots\}^{[0,1]}$ wzorem $F(x)(t) = f_t(x)$ dla $x, t \in [0, 1]$. Rozpatrując odcinek $[0, 1]$ z topologią dyskretną, funkcję $F$ możemy traktować jako odwzorowanie z przestrzeni dyskrentej $D(\mathfrak{c})$ do przestrzeni $\mathfrak{X}$, którą to utożsamiamy z przestrzenią funkcji $\{0, 1, 2, \ldots\}^{[0,1]}$. Udowodnić, że $F$ jest zanurzeniem homeomorficznym $D(\mathfrak{c})$ w $\mathfrak{X}$.

(c) Wykazać, że obraz $F(D(\mathfrak{c}))$ jest domkniętym podzbiorem $\mathfrak{X}$.

(d) Załóżmy, że $M$ jest podzbiorem przestrzeni $\mathfrak{X}$, który z topologią dziedziczoną z $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią metryzowalną. Pokazać, że $M$ jest zbiorem nigdziegęstym, tj. $\operatorname{int} \operatorname{cl} M = \varnothing$.

## Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 7. Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{|x|}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

(a) Sprawdzić czy $f$ spełnia lokalny warunek Lipschitza w otoczeniu $x = 0$.

(b) Znaleźć wszystkie rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(c) Wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie w przód $x_\varepsilon\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ zagadnienia

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \varepsilon, \end{cases}$$

określone na całej półprostej $[0, +\infty)$. Wykazać ponadto, że $\lim_{t\to+\infty} x_\varepsilon(t) = +\infty$.

(d) Zbadać stabilność położenia równowagi $(x_0, y_0) = (0, 0)$ układu

$$\begin{cases} x'(t) = f(y(t)) \\ y'(t) = f(x(t)). \end{cases}$$

## Analiza funkcjonalna

Zadanie 8. Dla dowolnej zwartej przestrzeni $K$ niech $C(K)$ oznacza przestrzeń Banacha ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na $K$, wyposażoną w normę supremum. Rozważmy podprzestrzeń domkniętą $\mathcal{Y}$ przestrzeni $C([0,1] \times [0,1])$ daną jako

$$\mathcal{Y} = \big\{ f \in C([0,1]\times[0,1])\colon f(x,y) = f(y,x) \text{ dla wszystkich } 0 \leqslant x, y \leqslant 1 \big\}.$$

Symbolem $C([0,1] \times [0,1])/\mathcal{Y}$ oznaczamy przestrzeń ilorazową. Dla dowolnych przestrzeni Banacha $X$ i $Y$ piszemy $X \sim Y$, jeżeli istnieje liniowy homeomorfizm (izomorfizm przestrzeni Banacha) $X$ na $Y$. Symbolem $X \oplus_1 Y$ oznaczamy sumę prostą $X \oplus Y$ wyposażoną w normę $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

(a) Wykazać, że istnieje taka domknięta podprzestrzeń $Z$ przestrzeni $C([0,1] \times [0,1])$, że
$$C([0,1] \times [0,1]) \sim C([0,1]) \oplus_1 Z.$$

(b) Rozstrzygnąć czy przestrzeń sprzężona $(C([0,1] \times [0,1])/\mathcal{Y})^*$ zawiera izometrycznie izomorficzną kopię przestrzeni $\ell_1$.

(c) Określmy operator liniowy $T\colon C([0,1] \times [0,1])/\mathcal{Y} \to C([0,1] \times [0,1])$ wzorem

$$T(f + \mathcal{Y})(x, y) = \int_0^1\int_0^1 e^{tx+uy}\big(f(t,u) - f(u,t)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

Rozstrzygnąć czy $T$ jest operatorem zwartym.

(d) Niech $(a_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem liczb nieujemnych. Określmy ciąg funkcjonałów liniowych $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset (C([0,1] \times [0,1])/\mathcal{Y})^*$ wzorem

$$\varphi_n(f + \mathcal{Y}) = \sum_{k=1}^n a_k \int_0^1\int_0^1 x^k y^k\big(f(x,y) - f(y,x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokazać, że $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ jest punktowo ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2} < \infty.$$

## Języki programowania

ZADANIE 9. Zadanie składa się z czterech niezależnych podpunktów:

(1) Rozważmy następujący kod w C:

```
int f(int *a, int *b){
    int c = *a;
    *a += 6 - *(b + *a) / 2;
    return c;
}

int main(){
    int x = 0;
    int t[5] = {7, 7, 8, 14, 19};
    for (int i = 0; i < 5; ++i)
        t[f(&x, t)] = i + 1;
}
```

Jaka jest zawartość tablicy `t` po wykonaniu pętli `for`?

(2) Rozważmy następujący kod w Javie:

```
class A {
    int foo(int x){ return x % 2 == 0 ? x / 2 : 3 * x + 1; }
    int bar(int x){ return foo(x / 4); }

    static class B extends A {
        int foo(int x){ return x + 37; }
    }

    static class C extends B {
        int bar(int x){ return super.bar(5);}
    }

    public static void main(String args[]){
        A a = new B();
        B b = new C();
        System.out.println(a.bar(20) + "-" + b.bar(38));
    }
}
```

Co zostanie wypisane na standardowe wyjście w wyniku wykonania metody `main`?

(3) Rozważmy następujący kod w Haskellu:

```
f [] = 0
f (x:xs) = 1 + f xs

g xs = h xs 0
    where
        h [] a = a
        h (_:xs) a = h xs (a+1)
```

Jaki jest typ funkcji `h`? Co robią funkcje `f` oraz `g`? Która z nich zakończy się szybciej gdy obie zostaną wywołane z argumentem `[1..10^6]`? Odpowiedź uzasadnij.

(4) Rozważmy następującą funkcję w języku używającym naturalnego kodu dwójkowego:

```
int f(int n) {
    int x = 0;
    while (n > 0) {
        n = n & (n-1);
        x = x + 1;
    }
    return x;
}
```

Zaproponuj funkcję potencjału pozwalającą udowodnić, że wykonanie funkcji `f` zawsze się zakończy. Co zwraca funkcja `f` wywołana dla dodatniego `n`?

## Matematyka dyskretna

Zadanie 10. Rozważmy dziedzinę grafów prostych (tj. bez pętli oraz krawędzi wielokrotnych) nieskierowanych. Niech $n$ oznacza liczbę wierzchołków grafu. Każda odpowiedź powinna przedstawiać dowód lub przykład konstrukcji grafu.

(a) Czy istnieje graf dwudzielny dla którego $n = 2025$ i który posiada cykl Eulera?

(b) Niech wierzchołki grafu ponumerowane będą liczbami naturalnymi od 0 do $n-1$ i niech dwa wierzchołki $i, j$ będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy $|i-j| \leqslant 2$. Ile jest różnych ścieżek z wierzchołka 0 do wierzchołka $n-1$ takich że zawsze poruszamy się do węzła o większym numerze?

(c) Niech zbiór wierzchołków składa się z wszystkich ciągów długości $k$ nad alfabetem $\{A, B, C\}$ i niech dwa wierzchołki połączone będą krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy ich ciągi różnią się od siebie na dokładnie jednej pozycji. Jaka jest (wierzchołkowa) liczba chromatyczna tego grafu dla danego $k$?

(d) Niech $d$ będzie maksymalnym stopniem wierzchołka w grafie. Udowodnij, że spójny graf ma skojarzenie o rozmiarze co najmniej $\lfloor n/(2d) \rfloor$.

## Algorytmy i struktury danych

Zadanie 11. Niech $s$ będzie niepustym napisem nad alfabetem $\Sigma = \{\texttt{0,1,...9}\} \cup \{\texttt{|}\}$, składającym się z cyfr i pionowej kreski. Powiemy, że $s$ jest *poprawny*, jeśli zaczyna się i kończy cyfrą oraz nie zawiera pionowych kresek na sąsiednich pozycjach. Poprawny napis $s$ można interpretować jako ciąg liczb oddzielonych pionowymi kreskami, np. $s =$ `18|06|2025` odpowiada ciągowi $18, 6, 2025$. *Sumą* $s$, ozn. $\mathbf{sum}(s)$, nazywamy sumę liczb w tym ciągu. Dla napisu $s$ zdefiniowanego powyżej mamy $\mathbf{sum}(s) = 18 + 6 + 2025 = 2049$. W tym problemie interesuje nas obliczanie sumy dynamicznie zmieniającego się poprawnego napisu $s$, modulo ustalona liczba pierwsza $p$. Rozważamy struktury danych implementujące następujące operacje:

**init(v,p):** Nadaje napisowi $s$ wartość $v$. Zakładamy, że $v$ jest poprawnym napisem. Ponadto, struktura nie musi zwracać sum napisu $s$ (które mogą być duże), a jedynie ich reszty z dzielenia przez liczbę pierwszą $p > 5$. Mamy gwarancję, że ta operacja będzie wykonana dokładnie raz, jako pierwsza operacja.

**add(i):** Dodaj pionową kreskę przed $i$-tą cyfrą w $s$. Można założyć, że przed wykonaniem tej operacji nie ma tam kreski.

**remove(i):** Usuń pionową kreskę przed $i$-tą cyfrą w $s$. Można założyć, że ta kreska istnieje.

**sum():** Zwróć resztę z dzielenia sumy $s$ przez $p$.

Wykonaj następujące polecenia:

(a) Zaprojektuj efektywną strukturę danych implementującą powyższe operacje.

(b) Zaprojektuj efektywną strukturę danych dla przypadku, gdy nie są wykonywane operacje **add**.

(c) Rozważmy przypadek, gdy wartość początkowa $s$ nie zawiera żadnych pionowych kresek, a łączna liczba operacji $k$ spełnia $k = o(n)$. Zaprojektuj strukturę danych dla tego przypadku o łącznej złożoności wszystkich $k$ operacji postaci $O(n + f(k))$.

(d) Podobnie do poprzedniego podpunktu, rozważmy przypadek, w którym $k = o(n)$ i szukamy rozwiązań o złożoności postaci $O(n + f(k))$. Tym razem, jednak, początkowa wartość $s$ jest poprawnym prefiksem nieskończonego napisu `1|2|3|1|2|3|`....

*Uwaga.* Uzasadnij poprawność zaproponowanych algorytmów oraz oszacuj ich złożoność czasową. Wynik uzyskany za to zadanie znacząco zależy od złożoności czasowej rozwiązania.

## Logika i bazy danych

Zadanie 12. W tym zadaniu rozważamy grafy nieskierowane bez pętli – inaczej mówiąc, relacja $E \subseteq V^2$ jest zawsze przeciwzwrotna i symetryczna.

(1) Pokaż, ze nie istnieje formuła $\phi$ logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą złożoną z jednego symbolu relacji binarnej $E$, taka, że skończony graf $(V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy struktura $(V, E)$ spełnia formułę $\phi$.

(2) Czy istnieje formuła $\phi$ logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą złożoną z symbolu relacji binarnej $E$ i dodatkowych symboli relacyjnych, taka, że skończony graf $(V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje interpretacja pozostałych symboli relacyjnych, dla której otrzymana struktura $(V, E, \ldots)$ spełnia formułę $\phi$?

(3) Czy istnieje formuła $\phi$ logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą złożoną z jednego symbolu relacji binarnej $E$, która jest spełniona dla nieskończenie wielu grafów skończonych, ale dla żadnego grafu nieskończonego?

(4) Czy istnieje formuła $\phi$ logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą złożoną z jednego symbolu relacji binarnej $E$, która jest spełniona dla pewnego grafu nieskończonego, ale dla żadnego grafu skończonego?

## Automaty i języki formalne

Zadanie 13. Rozważmy zbiór $X$ z działaniem $\ominus : X \times X \to X$, skończony podzbiór $A \subseteq X$, oraz element $z \in X$. Rozważmy język $L \subseteq A^*$ takich słów $x_1 \ldots x_n$, że $n \geqslant 1$ oraz w wyrażeniu

$$x_1 \ominus x_2 \ominus x_3 \ominus \ldots \ominus x_n$$

można wstawić nawiasy tak, aby wartością otrzymanego wyrażenia było $z$. Przykładowo, dla $X = \mathbb{Z}$, $x \ominus y = x - y$, $z = 0$, $A = \{2, 4, 6\}$, słowo 462 jest w języku $L$, bo $4 \ominus (6 \ominus 2) = 0$. W następujących przypadkach określ, czy język $L$ musi być regularny, oraz, czy musi być bezkontekstowy. Odpowiedź uzasadnij.

(1) $(X, \ominus, z)$ jest grupą skończoną

(2) $(X, \ominus, z)$ jest grupą abelową

(3) $X$ jest zbiorem skończonym

(4) $X = \mathbb{Z}$, $x \ominus y = x - y$ ($A$ jest dowolnym skończonym podzbiorem $X$ i $z$ jest dowolnym elementem $X$)

## Teoria obliczeń i złożoność obliczeniowa

ZADANIE 14. Czy poniższe problemy są **NP**-zupełne (zakładając **P**≠**NP**)? Odpowiedzi uzasadnij.

(1) Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ składająca się z dwuelementowych podzbiorów uniwersum $\mathcal{U}$, oraz liczba naturalna $k > 0$. Stwierdzić, czy istnieje podrodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ rozmiaru $k$ taka, że zbiory z $\mathcal{F}'$ pokrywają $\mathcal{U}$.

(2) Dany jest $n$-elementowy multizbiór $\mathcal{X}$ liczb naturalnych. Stwierdzić, czy istnieje podział $\mathcal{X}$ na $\frac{n}{2}$ części o równych sumach.

(3) Dany jest nieskierowany graf dwudzielny $G$ oraz liczba naturalna $k$. Stwierdzić, czy w $G$ istnieje zbiór $k$ wierzchołków $I$ taki, że żadne dwa wierzchołki w $I$ nie są połączone krawędzią w $G$.

(4) Dana jest liczba $k$ oraz graf nieskierowany $G$, w którym wszystkie wierzchołki mają stopień co najmniej $k$. Stwierdzić, czy w $G$ istnieje klika rozmiaru $k$.

## Programowanie współbieżne i rozproszone, systemy komputerowe

ZADANIE 15. *Współbieżne struktury danych* mogą być czytane i modyfikowane przez wiele wątków bez potrzeby dodatkowej synchronizacji. Implementacja współbieżnej struktury danych udostępnia metody, które mogą być wywoływane współbieżnie przez wiele wątków: implementacja gwarantuje poprawność poprzez staranną synchronizację. Rozważ *współbieżny kopiec maksimum*, który przechowuje do `N` elementów typu `T`. Kopiec udostępnia dwie metody: `void insert(T item)`, która wstawia element; oraz `T extract()`, która usuwa i zwraca maksymalny element spośród wcześniej wstawionych elementów (załóż, że `T` implementuje operatory porównania `<` i `>`). Obie metody blokują wątek wywołujący do momentu pomyślnego zakończenia. Napisz pseudokod, używając podstawowych typów danych (np. skalarów, tablic) i *semaforów* (użyj standardowej, słabo-sprawiedliwej semantyki). Skomentuj efektywność i semantykę twoich implementacji.

(1) Zaimplementuj podstawowe warianty, `basicInsert` i `basicExtract`, które są poprawne, ale niekoniecznie wydajne.

(2) Zaimplementuj wydajną (i poprawną) wersję `insert`, `concInsert`. Załóż, że `extract` nie jest wywoływana współbieżnie z żadnym wywołaniem `concInsert` i że jest zaimplementowana poprawnie.

(3) Teraz załóż, że masz dane implementacje `concInsert` i `concExtract`. Każda z nich poprawnie obsługuje wiele współbieżnych wywołań. Jednakże, wywołanie przez wątek `concExtract`, podczas gdy jakikolwiek inny wątek wykonuje `concInsert`, powoduje uszkodzenie struktury danych (i vice versa). Używając wywołań `concInsert` i `concExtract`, zaimplementuj wydajne i poprawne `insert` i `extract`.

## Bioinformatyka

ZADANIE 16. W genomie człowieka relatywnie rzadko występuje dinukleotyd `CpG` (cytozyna przed guaniną). Dzieje się tak dlatego, że C w kontekście `CpG` często ulega metylacji (zamienia się w 5-metylocytozynę), a 5-metylocytozyna łatwo ulega deaminacji do tyminy, co prowadzi do mutacji $C \to T$. W pobliżu początków genów (w obszarach promotorowych) metylacja zachodzi rzadziej, co sprzyja zachowaniu dinukleotydów `CpG` i powstawaniu tak zwanych „wysp `CpG`". Genom człowieka można w związku z tym podzielić na:

- obszary bogate w `CpG` (wyspy `CpG`),
- obszary tła (ubogie w `CpG`).

Modelujemy ten podział za pomocą ukrytego modelu Markova (HMM) z ośmioma stanami ukrytymi:

- A$^+$, C$^+$, G$^+$, T$^+$ — stany odpowiadające nukleotydom wewnątrz wyspy `CpG`,
- A$^-$, C$^-$, G$^-$, T$^-$ — stany odpowiadające nukleotydom poza wyspą `CpG`.

Emisje są deterministyczne, tzn. np. stan $G^+$ emituje zawsze nukleotyd $G$, a stan $C^-$ emituje zawsze nukleotyd $C$, itd.

Prawdopodobieństwa przejść w modelu są następujące:

$P(C^+ \to G^+) = 0.4$,
$P(C^- \to G^-) = 0.05$,
wszystkie inne przejścia wewnątrz tej samej grupy (np. $A^+ \to T^+, G^- \to C^-,$ itd.) $= 0.25$,
przejścia między regionami (np. $A^+ \to C^-, G^- \to T^+$) $= 0.01$.

Macierz przejść jest znormalizowana w każdym wierszu (sumuje się do 1 dla każdego stanu).

Prawdopodobieństwa początkowe:

$$P(\text{start w stanie } +) = P(\text{start w stanie } -) = 0.5.$$

(1) Dla sekwencji $ACGCG$ zaproponuj dwie różne ścieżki stanów: jedną zakładając, że cała sekwencja pochodzi z regionu `CpG`, a drugą, że pochodzi z tła, i policz ich łączne prawdopodobieństwa w modelu. Na podstawie obliczonych prawdopodobieństw wskaż, która hipoteza (`CpG` vs nie-`CpG`) jest bardziej prawdopodobna dla tej sekwencji.
(2) Występowanie wysp `CpG` i sekwencji tła można byłoby modelować za pomocą dwóch stanów zamiast ośmiu. Czy według Ciebie zastosowanie ośmiu stanów przynosi jakąś korzyść? Uzasadnij odpowiedź.
(3) Oszacuj najbardziej prawdopodobną ścieżkę stanów ukrytych dla sekwencji $ACGCG$ przy pomocy algorytmu Viterbiego. Ścieżka nie musi w całości pochodzić z jednego typu regionu.