Wykład z Algebry Liniowej dla studentów WNE UW.
Rok akademicki 2019/2020. Przykłady zadań na ćwiczenia.

1. Które z ciągów: $(-1,1,1,-1),(2,3,1,4),(4,-3,2,1),(4,0,-3,\frac{1}{2})$ są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Znaleźć rozwiązania ogólne układów równań

$$U_1: \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 8 \end{cases}$$

$$U_2: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$

$$U_3: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$U_4: \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

3. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ ciąg $(1,t,3,2t)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$$

4. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = s \end{cases}$$

jest niesprzeczny?

5. Niech $f(x))$ będzie wielomianem stopnia 3 spełniającym $f(0)=-1,\ f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(-1)=-5$. Znaleźć współczynniki wielomianu $f(x)$.

6. Dla każdego z poniższych podzbiorów w $\mathbb{R}^2$ sprawdzić czy spełnia on warunek (i) oraz czy spełnia on warunek (ii) z definicji podprzestrzeni.
a) $\{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2$ są liczbami całkowitymi$\}$,
b) $\{(x_1,x_2) \mid x_1=0$ lub $x_2=0\}$,
c) $\{(x_1,x_2) \mid |x_1|-|x_2|=1\}$,
d) $\{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2=2x_1x_2\}$.

7. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ następujący podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest podprzestrzenią liniową:
$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = s^2 - 1 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + sx_4^2 = x_4^2\}$?

8. Czy wektor $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów $(1,2,4,3)$, $(0,1,3,3)$, $(1,2,1,5)$?

9. Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ wektor $(1,1,c)$ jest kombinacją liniową wektorów $(2,1,3)$, $(1,2,4)$, $(3,0,2)$, $(2,-2,-2)$?

10. Czy istnieje wektor $\alpha \in \mathbb{R}^4$, który jest kombinacją liniową wektorów $(1,2,1,1)$, $(0,1,2,1)$ i jest też kombinacją liniową wektorów $(1,1,-1,-2), (1,0,-3,1)$? Jeśli tak, to podać przykład takiego wektora α.

11. Czy układ $(1,2,-1,2)$, $(1,4,2,8)$, $(-1,0,4,4)$ jest liniowo niezależny ?

12. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ $(0,1,2,a)$, $(1,1,3,1)$, $(2,1,4,1)$ jest liniowo niezależny ?

13. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $\operatorname{lin}((1,2,0,1),(2,1,3,3),(0,-3,3,1),(3,4,3,4))$.

14. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

15. Opisać przestrzeń $V = \operatorname{lin}((1,2,1,3),(2,5,2,7),(1,3,1,4)) \subset \mathbb{R}^4$ układem równań liniowych.

16. Dla jakich wartości parametru $t \in R$ podprzestrzeń $W = \operatorname{lin}((1,2,1),(2,5,3),(1,3,t))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ daje się opisać jednym niezerowym równaniem. Znaleźć to równanie.

17. Niech $W \subset \mathbb{R}^5$ będzie przestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} .$$

a) Znaleźć bazę przestrzeni W. Otrzymaną bazę uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

b) Układ $(1,0,0,1,0),(0,1,0,2,1),(1,0,0,1,1)$ uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami leżącymi w przestrzeni W.

18. Podać przykład takiego wektora $\alpha \in \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, że układ $(2,1,3),(1,4,5),\alpha$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Czy istnieje wektor $\beta \in \operatorname{lin}((3,5,8),(-1,3,2))$ taki, że układ $(2,1,3),(1,4,5),\beta$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeśli tak, to podać przykład takiego β.

19. Znaleźć współrzędne wektora $(1,8,10,10)$ w bazie $(1,2,3,1)$, $(2,1,3,3)$, $(-1,1,0,-1)$, $(0,0,1,2)$.

20. Podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że wektor $(1,2,3)$ ma w tej bazie współrzędne 3, 1, 2.

21. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor $\gamma \in \mathbb{R}^3$, że układ $(1,0,1),(2,1,0),\gamma$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i wektor $(7,3,5)$ ma w tej bazie współrzędne 3, 1, 2.

22. Które z poniższych odwzorowań $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ są przekształceniami liniowymi:
a) $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + 3x_2 - 1,\ 4x_1 + 2x_2 + 6)$,
b) $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3,\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3)$,
c) $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3,\ 4|x_1| + 2|x_2| + 6|x_3|)$,
d) $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = ((x_1+2)^2 - x_1^2 - x_3 - 4,\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3)$.

23. Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + 2x_2 + (\lambda^2-4)x_1x_3,\ 2x_1 + (\lambda+2)x_2 + 5\lambda - 10)$ jest liniowe?

24. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ zadane warunkiem: $\varphi((5,1)) = (2,5,1,1)$, $\varphi((1,0)) = (3,4,2,2)$.

25. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będą przekształceniami liniowymi spełniającymi $\varphi((1,1,1)) = (3,7)$, $\varphi((1,1,0)) = (2,5)$, $\varphi((1,0,0)) = (1,6)$ oraz $\psi((2,2,1)) = (3,3)$, $\psi((2,1,0)) = (5,0)$, $\psi((2,1,1)) = (4,2)$. Znaleźć wzór na przekształcenie $\varphi + \psi$.

26. Niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 8x_3)$. Niech $\mathcal{A} = \{(3,4,1),(2,3,1),(5,1,1)\}, \mathcal{B} = \{(3,1),(2,1)\}$. Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$.

27. Niech $\mathcal{A} = \{(2,1),(1,1)\}, \mathcal{B} = \{(1,3),(0,1)\}, \mathcal{C} = \{(0,1),(1,4)\}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

28. Niech $\mathcal{A} = \{(0,1,0),(1,2,3),(5,7,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(2,1),(1,0)\}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem $\psi((y_1,y_2)) = (y_1 - y_2, y_1 + y_2)$. Znaleźć $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$. Znaleźć wzór na $\psi \circ \varphi$.

29. Niech $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi i niech $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ w pewnych bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ przestrzeni V, W, Z, odpowiednio. Niech $\alpha \in V$ ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $1,-1,3,-2$. Znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$ oraz współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C}$.

30. Niech $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(2,1,0),(4,5,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(2,1,2),(3,1,2),(2,1,3)\}$. Znaleźć macierz $C \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, spełniającą następujący warunek. Dla każdego wektora $\alpha \in \mathbb{R}^3$: jeśli współrzędne α w bazie $\mathcal{A}$ są x_1, x_2, x_3 i współrzędne α w bazie $\mathcal{B}$ są y_1, y_2, y_3, to

$$C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

31. Niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (3x_1 + 7x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Znaleźć takie bazy $\mathcal{A}$ w $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathcal{B}$ w $\mathbb{R}^2$, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

32. Obliczyć wyznaczniki macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix}.$$

33. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & r & 1 & 0 \\ 0 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $\det A = 1$?

34. Obliczyć $\det(A \cdot B)$, $\det(A + B)$, $\det(A^7)$, $\det(A^3 \cdot B^9)$ dla poniższych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

35. Dla każdej z poniższych macierzy znaleźć macierz odwrotną:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ poniższa macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & r & 2 \end{bmatrix}$$

jest odwracalna? Dla każdego takiego r znaleźć A^{-1}.

37. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\det(A \cdot B^{-7})$.

38. Rozpatrzmy układ równań $\begin{cases} 3x_1 & + & sx_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & t \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 6 \end{cases}$.
Dla jakich wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ układ ten jest niesprzeczny? Dla jakich wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie?

39. Dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 + 4x_2, 5x_1 - 2x_2)$ oraz baz $\mathcal{A}_1 = \{(4,1),(3,1)\}, \mathcal{A}_2 = \{(2,3),(5,8)\}, \mathcal{A}_3 = \{(4,2),(1,1)\}$ znaleźć macierze $A_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ dla $i = 1,2,3$ oraz macierze C_{ij} spełniające $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, 3$.

40. Dla każdego z poniższych endomorfizmów φ znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$,

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_3)$,

c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (-6x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_4,$
$-14x_1 - 2x_2 + 5x_3, -x_4)$.

41. Dla każdego z poniższych endomorfizmów $\varphi : V \to V$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ. Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy $\mathcal{A}$ i znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2)$,

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$,

c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 4x_2, 5x_1 + 3x_2, x_3 + x_4, 3x_3 - x_4)$

42. Niech $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Dla każdej z macierzy A_i zbadać czy jest ona diagonalizowalna. Jeśli tak to znaleźć taką macierz C_i, że macierz $(C_i)^{-1} A_i \, C_i$ jest diagonalna.

43. Niech

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej z powyższych macierzy A_i, $\quad i = 1, \ldots, 4$ zbadać, czy A_i jest diagonalizowalna. Jeśli A_i jest diagonalizowalna, to znaleźć taką macierz $C_i \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, że macierz $C_i^{-1} A_i C_i$ jest diagonalna.

44. Niech

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $(A_1)^{1923}$, $(A_2)^{1924}$, $(A_3)^{1925}$.

45. Niech $V = \operatorname{lin}((1,0,1,0),(0,1,0,2),(2,-2,2,-4)) \subset \mathbb{R}^4$ oraz $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni V i bazę ortonormalną przestrzeni W.

46. W $\mathbb{R}^4$ znaleźć taki wektor α, że układ $\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(-1,-1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,-1,1), \alpha$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz wektor $\beta = (2,4,6,2)$ ma w tej bazie czwartą współrzędną równą 3.

47. Rozpatrzmy następujące podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ oraz $W = \operatorname{lin}((1,0,-1,2),\ (1,1,1,1))$. Znaleźć bazy ortonormalne przestrzeni $V^{\perp}$ oraz $W^{\perp}$.

48. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć rzut prostopadły wektora $\alpha = (1,1,1)$ na płaszczyznę $V = (x_1,x_2,x_2) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ i rzut prostopadły α na prostą $L = \operatorname{lin}((1,2,3))$. Znaleźć obrazy wektora α w symetriach prostopadłych względem V i względem L.

49. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będące rzutem prostopadłym na podprzestrzeń $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ oraz wzór na przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będące symetrią prostopadłą względem W.

50. Znaleźć układ równań liniowych opisujący

a) płaszczyznę $M \subset \mathbb{R}^3$ przechodzącą przez $(6,1,-3),(1,5,1),(1,8,2)$,

b) prostą $L \subset \mathbb{R}^3$ przechodzącą przez $(1,2,-1),(3,4,2)$,

c) hiperpłaszczyznę $H \subset \mathbb{R}^4$ zadaną równością
$H = (1,4,-3,2) + \operatorname{lin}((1,2,0,-3),(1,4,-2,-3),(0,3,-1,-2))$.

51. Znaleźć parametryzację

a) prostej $L \subset \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez $(1,1,5),(3,2,4)$,

b) płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ opisanej równaniem $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$,

c) hiperpłaszczyzny $H \subset \mathbb{R}^4$ opisanej równaniem $x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5$.

52. Znaleźć układ równań opisujący oraz parametryzację

a) prostej $L \subset \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez (2,1,1) i prostopadłej do płaszczyzny opisanej równaniem $3x_1 - x_2 + 2x_2 = 6$,

b) płaszczyzny $M \subset \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez (3,0,5) i prostopadłej do prostej $L = (1,1,1) + \operatorname{lin}((2,-1,1))$.

53. Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$

a) na płaszczyznę M opisaną równaniem $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$,

b) na prostą $L = (3,2,-1) + \operatorname{lin}((1,-1,1))$.

54. Dla danego zadania programowania liniowego znaleźć jego postać standardową.

a) $2x_1 + 3x_2 \to max,$ przy warunkach:

$x_1 + 7x_2 \leqslant 14$

$x_1 + 2x_2 \geqslant 1$

$-x_1 + x_2 \leqslant 5.$

b) $5x_1 + 6x_2 - 3x_3 \to min,$ przy warunkach:

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 10$

$x_1 + x_3 \geqslant 0$

$x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$

c) $7x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \to max,$ przy warunkach:

$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 15$

$x_1 + x_3 \leqslant 6$

$2x_2 + 3x_4 \leqslant 8$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\ x_4 \geqslant 0.$

55. Dla danego układu równań liniowych znaleźć wszystkie rozwiązania bazowe.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

56. Następujące zadania programowania liniowego rozwiązać metodą sympleks.

a) $-x_1 - 2x_2 \to min,$ przy warunkach:

$4x_1 + 4x_2 \leqslant 12$

$x_1 \leqslant 2, x_2 \leqslant 2$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$

b) $2x_1 + x_2 \to max$, przy warunkach:

$4x_1 + 4x_2 \leqslant 12$

$x_1 \leqslant 2, x_2 \leqslant 2$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$

c) $3x_1 - 2x_2 \to max$, przy warunkach:

$x_1 + x_2 \geqslant 4$

$-3x_1 + 2x_2 \geqslant 8$

$x_1 - x_2 \leqslant 0$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$

d) $8x_2 + x_5 \to max$ przy warunkach:

$2x_1 + 4x_2 + 8x_5 = 10$

$3x_2 + x_3 - x_5 = 3$

$x_4 + 6x_5 = 12$

$x_j \geqslant 0$ dla $j = 1, \ldots, 5.$

e) $4x_1 - 3x_2 + x_5 \to min$ przy warunkach:

$3x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 - 3x_5 = 3$

$-4x_1 - 2x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 2x_4 = 7$

$x_j \geqslant 0$ dla $j = 1, \ldots, 5.$

f) $4x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to max$ przy warunkach:

$2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 18$

$x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 13$

$x_1 - 2x_3 \leqslant 13$

$x_j \geqslant 0$ dla $j = 1, 2, 3.$

57. Zbadać czy forma kwadratowa jest dodatnio (ujemnie) określona.

a) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$,

b) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,

c) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,

d) $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + 4x_3x_4$.

58. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + rx_2^2 + rx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ jest ujemnie określona?

59. Stosując wartości własne zbadać czy forma kwadratowa jest dodatnio (ujemnie) określona (półokreślona)

a) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2)) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2$,

b) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$,

c) $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_3x_4$.

60. Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2rx_1x_2 + 4x_2^2 + sx_3^3$ jest

a) dodatnio określona,

b) dodatnio półokreślona,

c) ujemnie określona,

d) ujemnie półokreślona,

e) nieokreślona?

Lectures on Linear Algebra for WNE UW students.
2019/2020. Examples of problems for classes

1. Consider sequences: $(-1,1,1,-1),(2,3,1,4),(4,-3,2,1),(4,0,-3,\frac{1}{2})$. Which one of them are solutions of the following system :
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \end{array}\right. ?$$

2. Find general solutions of the following systems of equations:
$$U_1: \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 13x_2 & + & 11x_3 & + & 12x_4 & = & 8 \end{array}\right.$$
$$U_2: \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 9 \end{array}\right.$$
$$U_3: \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$
$$U_4: \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & -7 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

3. For which real numbers t is the sequence $(1,t,3,2t)$ a solution of the following system of equations:
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 16 \end{array}\right.$$

4. For which numbers $s \in \mathbb{R}$ is consistent the following system of equations
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & s \end{array}\right.$$
?

5. Let $f(x))$ denote a polynomial of degree 3, fulfilling $f(0)=-1,\ f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(-1)=-5$. Find coefficients of $f(x)$.

6. For every of the following subsets of $\mathbb{R}^2$ check whether it fulfils the condition (i) (closedness under addition of vectors) and check whether it fulfils the condition (ii) (closedness under multiplication by scalars) of the definition of subspace.

a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \text{ are integer }\}$,
b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0 \text{ or } x_2 = 0\}$,
c) $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| - |x_2| = 1\}$,
d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\}$.

7. For which values of the parameter $s \in \mathbb{R}$ is the following subset of $\mathbb{R}^4$ a linear subspace:
$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = s^2 - 1 \quad \text{and} \quad x_1 + x_2 + sx_4^2 = x_4^2\}$?

8. Is the vector $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ a linear combination of vectors $(1, 2, 4, 3)$, $(0, 1, 3, 3)$, $(1, 2, 1, 5)$?

9. For which values of the parameter $c \in \mathbb{R}$ is the vector $(1, 1, c)$ a linear combination of the vectors $(2, 1, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(3, 0, 2)$, $(2, -2, -2)$?

10. Does there exist a vector $\alpha \in \mathbb{R}^4$, being at once a linear combination of the vectors $(1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 1)$ and a linear combination of the vectors $(1, 1, -1, -2)$, $(1, 0, -3, 1)$? If yes, give an example.

11. Is the system of vectors $(1, 2, -1, 2)$, $(1, 4, 2, 8)$, $(-1, 0, 4, 4)$ linearly independent ?

12. For which values of the parameter $a \in \mathbb{R}$ is the system of vectors $(0, 1, 2, a)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(2, 1, 4, 1)$ linearly independent ?

13. Find a basis and the dimension of the subspace $\operatorname{lin}((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 3), (0, -3, 3, 1), (3, 4, 3, 4))$.

14. Find a basis and the dimension of the subspace described by the following system of equations:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

15. Describe the space $V = \operatorname{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 2, 7), (1, 3, 1, 4)) \subset \mathbb{R}^4$ by a system of linear equations

16. For which values of the parameter $t \in R$ is the subspace $W = \operatorname{lin}((1, 2, 1), (2, 5, 3), (1, 3, t)) \subset \mathbb{R}^3$ described by a one non-zero linear equation. For every such value find a describing equation.

17. Consider a subspace $W \subset \mathbb{R}^5$ described by the following system of equations:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} .$$

a) Find a basis of W. Complete the basis to a basis of the space $\mathbb{R}^5$.

b) Complete the system $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 2, 1), (1, 0, 0, 1, 1)$ to a basis of the space $\mathbb{R}^5$, using some vectors from W.

18. Give an example of a vector $\alpha \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, such that the system $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \alpha$ constitutes a basis of the space $\mathbb{R}^3$. Does there exist a vector $\beta \in \operatorname{lin}((3, 5, 8), (-1, 3, 2))$ such that the system $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \beta$ is a basis of $\mathbb{R}^3$? If yes, give an example.

19. Find the coordinates of the vector $(1, 8, 10, 10)$ in the basis $(1, 2, 3, 1)$, $(2, 1, 3, 3)$, $(-1, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, 2)$.

20. Give an example of a basis of $\mathbb{R}^3$, such that the vector $(1, 2, 3)$ has in the basis coordinates 3, 1, 2.

21. Find (if there exists) a $\gamma \in \mathbb{R}^3$, such that the system $(1, 0, 1), (2, 1, 0), \gamma$ constitutes a basis of the space $\mathbb{R}^3$ and the coordinates of the vector $(7, 3, 5)$ are 3, 1, 2 in the basis.

22. Which one of the following mappings $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is linear:
a) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - 1,\ 4x_1 + 2x_2 + 6)$,
b) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3,\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3)$,
c) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3,\ 4|x_1| + 2|x_2| + 6|x_3|)$,
d) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = ((x_1 + 2)^2 - x_1^2 - x_3 - 4,\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3)$.

23. For which values of the parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ is linear a mapping $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ given by the formula $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + (\lambda^2 - 4)x_1x_3,\ 2x_1 + (\lambda + 2)x_2 + 5\lambda - 10)$?

24. Find a formula of a mapping $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ given by the condition : $\varphi((5, 1)) = (2, 5, 1, 1)$, $\varphi((1, 0)) = (3, 4, 2, 2)$.

25. Let $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be linear mapping fulfilling $\varphi((1, 1, 1)) = (3, 7)$, $\varphi((1, 1, 0)) = (2, 5)$, $\varphi((1, 0, 0)) = (1, 6)$ and $\psi((2, 2, 1)) = (3, 3)$, $\psi((2, 1, 0)) = (5, 0)$, $\psi((2, 1, 1)) = (4, 2)$. Find a formula for $\varphi + \psi$.

26. Consider a linear mapping $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ given by the formula $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 8x_3)$. Let $\mathcal{A} = \{(3, 4, 1), (2, 3, 1), (5, 1, 1)\}, \mathcal{B} = \{(3, 1), (2, 1)\}$. Find $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ and $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$ (matrices of φ in the bases $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ and in the standard bases respectively).

27. Let $\mathcal{A} = \{(2, 1), (1, 1)\}, \mathcal{B} = \{(1, 3), (0, 1)\}, \mathcal{C} = \{(0, 1), (1, 4)\}$ and let $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear mapping such that $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Find $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

28. Let $\mathcal{A} = \{(0, 1, 0), (1, 2, 3), (5, 7, 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 1)\}$, $\mathcal{C} = \{(2, 1), (1, 0)\}$ and let $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ denote the linear mapping given by the following condition: $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$,. Let $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear mapping given by the formula $\psi((y_1, y_2)) = (y_1 - y_2, y_1 + y_2)$. Find $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$. Find a formula expressing $\psi \circ \varphi$.

29. Let $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ be linear mappings and let $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

and $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in some bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ of spaces V, W, Z, respectively. Let $\alpha \in V$ has in the basis $\mathcal{A}$ coordinates $1, -1, 3, -2$. Find the coordinates of the vector $\varphi(\alpha)$ in the basis $\mathcal{B}$ and the coordinates of the vector $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$in the basis $\mathcal{C}$.

30. Let $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(2,1,0),(4,5,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(2,1,2),(3,1,2),(2,1,3)\}$. Find a matrix $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, fulfilling the following condition. For a given vector $\alpha \in \mathbb{R}^3$: if the coordinates of α in the basis $\mathcal{A}$ are x_1, x_2, x_3 and the coordinates of α in the basis $\mathcal{B}$ are y_1, y_2, y_3,then

$$C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

31. Consider a linear mapping $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ given by the formula $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + 7x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Find bases $\mathcal{A}$ of $\mathbb{R}^3$ and $\mathcal{B}$ of $\mathbb{R}^2$, such that $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

32. Compute determinants of the following matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix}.$$

33. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & r & 1 & 0 \\ 0 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. For which values of the parameter $r \in \mathbb{R}$ there holds $\det A = 1$?

34. Compute $\det(A \cdot B)$, $\det(A + B)$, $\det(A^7)$, $\det(A^3 \cdot B^9)$ for the following matrices

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

35. For every of the following matrices find the inverse:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. For which values $r \in \mathbb{R}$ is invertible the following matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & r & 2 \end{bmatrix}$$

? For every such a value r find A^{-1}.

37. Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Compute $\det(A \cdot B^{-7})$.

38. Consider the following system of equations $\begin{cases} 3x_1 & + & sx_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & t \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 6 \end{cases}$.

For which values of the parameters $s, t \in \mathbb{R}$ is the system consistent? For which values of the parameters $s, t \in \mathbb{R}$ has the system a unique solution?

39. For the endomorphism $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 + 4x_2, 5x_1 - 2x_2)$ and for bases $\mathcal{A}_1 = \{(4,1),(3,1)\}, \mathcal{A}_2 = \{(2,3),(5,8)\}, \mathcal{A}_3 = \{(4,2),(1,1)\}$ find matrices $A_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ for $i = 1,2,3$ and matrices C_{ij} fulfilling $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ for $i, j = 1,2,3$.

40. For every of the following endomorphisms φ find eigenvalues and bases of the corresponding eigenspaces.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$,

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_3)$,

c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (-6x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_4,$
$-14x_1 - 2x_2 + 5x_3, -x_4)$.

41. For every of the following endomorphisms $\varphi : V \to V$ investigate whether there exists a basis $\mathcal{A}$ of the space V consisting of eigenvectors of φ. In the affirmative case find $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2)$,

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$,

c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 4x_2, 5x_1 + 3x_2, x_3 + x_4, 3x_3 - x_4)$

42. Let $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. For every matrix A_i investigate whether is it diagonalizable. In the affirmative case find a matrix C_i, such that the matrix $(C_i)^{-1} A_i \, C_i$ is diagonal.

43. Let

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Investigate diagonalizability of A_i for every $i = 1, \ldots, 4$. If A_i is diagonalizable, then find a matrix $C_i \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, such that $C_i^{-1}A_iC_i$ is diagonal.

44. Let

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Compute $(A_1)^{1923}$, $(A_2)^{1924}$, $(A_3)^{1925}$.

45. Let $V = \operatorname{lin}((1,0,1,0),(0,1,0,2),(2,-2,2,-4)) \subset \mathbb{R}^4$ oraz $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$. Find orthonormal bases of the spaces$V$ and W.

46. Find in the space $\mathbb{R}^4$a vector α, such that the system $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\frac{1}{2}(-1,-1,1,1)$, $\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$, α constitutes an orthnormal basis of $\mathbb{R}^4$ in which the fourth coordinate of the vector $\beta = (2,4,6,2)$ is 3.

47. Consider the following subspaces of $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ and $W = \operatorname{lin}((1,0,-1,2),\ (1,1,1,1))$. Find orthonormal bases of $V^\perp$ and $W^\perp$.

48. In the space $\mathbb{R}^3$ find the orthogonal projection of the vector $\alpha = (1,1,1)$ onto the plane $V = (x_1,x_2,x_2) \in \mathbb{R}^3\ |x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ and the orthogonal projection of α onto the line $L = \operatorname{lin}((1,2,3))$. Find images of α in orthogonal symmetries relatively V and relatively L.

49. Let $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\ |x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$. Find a formula expressing the orthogonal projection of $\mathbb{R}^3$ onto W and a formula expressing the orthogonal symmetry of $\mathbb{R}^3$ relatively W.

50. Find a system of linear equations describing

a) the plane $M \subset \mathbb{R}^3$ going through points $(6,1,-3),(1,5,1),(1,8,2)$,

b) the line $L \subset \mathbb{R}^3$ going through the points $(1,2,-1),(3,4,2)$,

c) the hyperplane $H \subset \mathbb{R}^4$ defined by
$H = (1,4,-3,2) + \operatorname{lin}((1,2,0,-3),(1,4,-2,-3),(0,3,-1,-2))$.

51. Find parametrization

a) of the line $L \subset \mathbb{R}^3$ going through $(1,1,5),(3,2,4)$,

b)of the plane $P \subset \mathbb{R}^3$ described by the equation $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$,

c) of the hyperplane $H \subset \mathbb{R}^4$ described by the equation $x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5$.

52. Find the describing system of linear equations and a parametrization

a) of the line $L \subset \mathbb{R}^3$ going through (2,1,1) and perpendicular to the plane described by the equation $3x_1 - x_2 + 2x_2 = 6$,

b) of the plane $M \subset \mathbb{R}^3$ going through (3,0,5) and perpendicular to the line $L = (1,1,1) + \operatorname{lin}((2,-1,1))$.

53. Find the orthogonal projection of the point $p = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$

a) onto the plane M described by $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$,

b) onto the line $L = (3, 2, -1) + \operatorname{lin}((1, -1, 1))$.

54. For a given problem of linear programming find its standard form.

a) $2x_1 + 3x_2 \to max$, under conditions:

$x_1 + 7x_2 \leqslant 14$

$x_1 + 2x_2 \geqslant 1$

$-x_1 + x_2 \leqslant 5$.

b) $5x_1 + 6x_2 - 3x_3 \to min$, under conditions:

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 10$

$x_1 + x_3 \geqslant 0$

$x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$.

c) $7x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \to max$, under conditions:

$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 15$

$x_1 + x_3 \leqslant 6$

$2x_2 + 3x_4 \leqslant 8$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\ x_4 \geqslant 0$.

55. For a given system of linear equations find all basic solutions

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

56. Solve the following problems of linear programming using the simplex method

a) $-x_1 - 2x_2 \to min$, under conditions:

$4x_1 + 4x_2 \leqslant 12$

$x_1 \leqslant 2, x_2 \leqslant 2$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$

b) $2x_1 + x_2 \to max$, under conditions:

$4x_1 + 4x_2 \leqslant 12$

$x_1 \leqslant 2, x_2 \leqslant 2$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$

c) $3x_1 - 2x_2 \to max$, under conditions:

$x_1 + x_2 \geqslant 4$

$-3x_1 + 2x_2 \geqslant 8$

$x_1 - x_2 \leqslant 0$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$

d) $8x_2 + x_5 \to max$ under conditions:

$2x_1 + 4x_2 + 8x_5 = 10$

$3x_2 + x_3 - x_5 = 3$

$x_4 + 6x_5 = 12$

$x_j \geqslant 0$ dla $j = 1, \ldots, 5.$

e) $4x_1 - 3x_2 + x_5 \to min$ under conditions:

$3x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 - 3x_5 = 3$

$-4x_1 - 2x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 2x_4 = 7$

$x_j \geqslant 0$ dla $j = 1, \ldots, 5.$

f) $4x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to max$ under conditions:

$2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 18$

$x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 13$

$x_1 - 2x_3 \leqslant 13$

$x_j \geqslant 0$ dla $j = 1, 2, 3.$

57. Investigate whether the quadratic form is positively or negatively definite

a) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2,$

b) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3,$

c) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3,$

d) $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + 4x_3x_4.$

58. For which values of the parameter $r \in \mathbb{R}$ is the quadratic form $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + rx_2^2 + rx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ negatively definite?

59. Investigate whether a quadratic form is definite or semidefinite using eigenvalues.

a) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2)) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2,$

b) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3,$

c) $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_3x_4.$

60. For which values of the parameters $r, s \in \mathbb{R}$ is the quadratic form $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2rx_1x_2 + 4x_2^2 + sx_3^3$

a) positively definite,

b) positively semidefinite,

c) negatively definite,

d) negatively semidefinite,

e) indefinite?