

Kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych

9 maja 2024, grupa I

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 7. Obliczyć, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, granice

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t > at), \quad \text{b) } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_t > at).$$

2. Udowodnić, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} |W_{n+5} - W_n| = \infty$ p.n.
3. Rozważmy scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t \geq 0}$ o funkcji kowariancji $\text{Cov}(X_s, X_t) = \ln(4(s \wedge t) + 1)$.
 - a) Czy ten proces ma niezależne przyrosty?
 - b) Czy ten proces ma modyfikację ciągłą? Co można powiedzieć o hölderowskości jego trajektorii?
 - c) Znaleźć wszystkie niemalejące funkcje $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ takie, że proces $Y_t = g(t)X_{f(t)}$ jest procesem Wienera.

4. Rozważmy następujące procesy na $[0, \infty)$:

- a) $X_t = \sin t W_t + \ln(2t + 1)$,
- b) $Y_t = (2W_t - W_{3t})1_{\{W_t \neq W_{3t}\}}$,
- c) $Z_t = (2W_t - W_{3t})1_{\{W_t \leq W_{3t}\}}$.

Wskazać które z powyższych procesów są gaussowskie i dla wskazanych procesów obliczyć funkcje wartości oczekiwanej oraz kowariancji.

5. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest całkowalny z kwadratem, ma niezależne przyrosty, $\mathbb{E}X_t = 5t$ oraz $\text{Var}(X_t) = 3t$. Znaleźć funkcje $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $X_t^2 + f(t)X_t + g(t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X .
6. Niech (N_t) będzie procesem Poissona z parametrem 4 oraz

$$\tau := \inf\{t \geq 0: N_t = 8\}.$$

- a) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji (\mathcal{F}_t^N) generowanej przez N .
- b) Wykazać, że τ jest skończony prawie na pewno.
- c) Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ znaleźć $\gamma \in \mathbb{R}$ takie, że proces $\exp(\alpha N_t + \gamma t)$ jest martyngałem.
- d) Obliczyć $\mathbb{E}e^{-2\tau}$.

Kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych

9 maja 2024, grupa II

Spśród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 5. Obliczyć, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, granice

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t > at), \quad \text{b) } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_t > at).$$

2. Udowodnić, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} |W_{n+9} - W_n| = \infty$ p.n.
3. Rozważmy scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t \geq 0}$ o funkcji kowariancji $\text{Cov}(X_s, X_t) = \ln(3(s \wedge t) + 1)$.
 - a) Czy ten proces ma niezależne przyrosty?
 - b) Czy ten proces ma modyfikację ciągłą? Co można powiedzieć o h\"olderowsko\u015bci jego trajektorii?
 - c) Znale\u017c\u0107 wszystkie niemalej\u0105ce funkcje $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ takie, \u017ce proces $Y_t = g(t)X_{f(t)}$ jest procesem Wienera.

4. Rozważmy nast\u0119puj\u0105ce procesy na $[0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \text{a) } X_t &= \cos t W_t + 2 \ln(t + 1), \\ \text{b) } Y_t &= (W_t + 2W_{4t})1_{\{W_t \geq W_{4t}\}}, \\ \text{c) } Z_t &= (W_t + 2W_{4t})1_{\{W_t \neq W_{4t}\}}. \end{aligned}$$

Wskaza\u0107 kt\u00f3re z powy\u017cszych proces\u00f3w s\u0105 gaussowskie i dla wskazanych proces\u00f3w obliczy\u0107 funkcje warto\u015bci oczekiwanej oraz kowariancji.

5. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest ca\u0142kowalny z kwadratem, ma niezale\u017cne przyrosty, $\mathbb{E}X_t = 3t$ oraz $\text{Var}(X_t) = 4t$. Znale\u017c\u0107 funkcje $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, \u017ce $X_t^2 + f(t)X_t + g(t)$ jest martynga\u0142em wzgl\u0119dem filtracji generowanej przez proces X .
6. Niech (N_t) b\u0119dzie procesem Poissona z parametrem 3 oraz

$$\tau := \inf\{t \geq 0: N_t = 7\}.$$

- a) Udowodni\u0107, \u017ce τ jest momentem zatrzymania wzgl\u0119dem filtracji (\mathcal{F}_t^N) generowanej przez N .
- b) Wykaza\u0107, \u017ce τ jest sko\u0144czony prawie na pewno.
- c) Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ znale\u017c\u0107 $\gamma \in \mathbb{R}$ takie, \u017ce proces $\exp(\alpha N_t + \gamma t)$ jest martynga\u0142em.
- d) Obliczy\u0107 $\mathbb{E}e^{-2\tau}$.