Zadania do przedmiotu
Elementy Optymalizacji Nieliniowej

Gabriel Pietrzkowski

8 listopada 2013

Spis treści

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 0

0.1 Zbiory zadane przez równości i nierówności

Zadanie 0.1. Naszkicuj podzbiór $\mathbb{R}^2$ w przypadkach gdy $\diamond$ to $=$; gdy $\diamond$ to $<$; gdy $\diamond$ to $\leqslant$.

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 5y + 1 \diamond 0\right\}$;
b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 + 6y \diamond -4\right\}$;
c) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 \diamond 0\right\}$;
d) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - y^2 \diamond 2\right\}$;
e) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x - 2y + 2 \diamond 0\right\}$;
f) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x + y - 3 \diamond 0\right\}$;
g) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy \diamond 0\right\}$;
h) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |2x - y + 1| + |x + y| \diamond 2\right\}$;
i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x-y| + 2, |2x+y|\} \diamond 4\right\}$;

Zadanie 0.2. Naszkicuj podzbiór $\mathbb{R}^3$ w przypadkach gdy $\diamond$ to $=$; gdy $\diamond$ to $<$; gdy $\diamond$ to $\leqslant$.

a) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y + 3z + 2 \diamond 0\right\}$;
b) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 + 2x + 4z + 1 \diamond 0\right\}$;
c) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x-y|, x + y - 2\} \diamond z\right\}$;
d) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3|x| + |y+1| + |2z-3| \diamond 6\right\}$;

Zadanie 0.3. Zadaj przy pomocy (jak najmniejszej ilości) nierówności zbiór w $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$.

a) trójkąt o wierzchołkach w punktach $(1,1)$, $(-2,3)$, $(0,-1)$;

b) równoległobok, którego trzy wierchołki mają współrzędne $(2,2)$, $(1,-1)$, $(-2,1)$;

c) półkule kuli o środku w punkcie $(1,-2,3)$ i promieniu 5, których podstawy są równoległa do płaszczyzny opisanej równaniem $3x - 2y + z = 0$;

d) równoległościan, którego cztery wierzchołki mają współrzędne $(0,0,0)$, $(2,2,0)$, $(2,-2,1)$, $(-1,-1,3)$.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 1

1.1 Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1.1. Zbadaj czy funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną kierunkową w dowolnym kierunku $v \in \mathbb{R}^n$. Czy f jest różniczkowalna w punkcie x_0?

Zadanie 1.2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

a) Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie $x = 0$.

b) Znajdź pochodną kierunkową w punkcie $x = 0$ i w kierunkach $v^1 = (1, 0)^T$ oraz $v^2 = (0, 1)^T$.

c) Czy istnieje w punkcie $x = 0$ pochodna w kierunku $v = (v_1, v_2)^T$ takim, że $v_1 v_2 \neq 0$?

d) Czy w punkcie $x = 0$ funkcja f jest różniczkowalna?

Uwaga 1. Ciągłość funkcji można pokazać korzystając z nierówności między średnimi geometryczną i kwadratową.

Zadanie 1.3. Wyznaczyć w dowolnym punkcie $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ gradient i hessjan funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określonych wzorami

a) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, **b)** $f(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x.$

Zadanie 1.4. Wyznaczyć w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ gradient i hessjan funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określonych wzorami

a) $f(x) = b^T x$; **b)** $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x$; **c)** $f(x) = e^{a^T x + c}$;

d) $f(x) = e^{x^T A x + b^T x + c}$; **e)** $f(x) = \frac{1}{2} a^T x x^T b$; **f)** $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^{2k}$.

gdzie A jest dowolną macierzą o wymiarach $n \times n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.5. Dla funkcji z zadnia 1.4 obliczyć pochodne w kierunku v jeśli

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 2$.

b) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -1$;

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 2

2.1 Określoność macierzy symetrycznych

Zadanie 2.1. Zbadaj określoność macierzy symetrycznych

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Zadanie 2.2. Zbadać określoność macierzy

a) aa^T dla $a \in \mathbb{R}^n$; **b)** $\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T$ dla $a_i \in \mathbb{R}^n$; **c)** $aa^T - bb^T$ dla $a, b \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 2.3. Dla jakich wartości t macierz

a) $\begin{pmatrix} t & 2 \\ 2 & 2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ **b)** $\begin{pmatrix} t^2 - 1 & 2\sqrt{2t} & 0 \\ 2\sqrt{2t} & t & 0 \\ 0 & 0 & t - 2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, \infty)$

a) jest dodatnio określona?

b) jest dodatnio półokreślona, ale nie dodatnio określona?

c) jest ujemnie określona?

d) jest ujemnie półokreślona, ale nie ujemnie określona?

e) nie jest określona?

2.2 Optymalizacja na zbiorach otwartych

Zadanie 2.4. Znajdź punkty krytyczne funkcji f i zbadaj, czy funkcja ma w nich ekstrema lokalne, czy punkty siodłowe, dla

a) $f(x, y) = 5x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 3$; **b)** $f(x, y) = x^3 - y^2 - 4xy - 3x$;

c) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - x^4 - y^4$; **d)** $f(x, y) = 3x^2 - y^3 + 12xy - 36y$;

e) $f(x, y) = 5xy - 2x^2 - 2y^2$; **f)** $f(x, y, z) = 2z^3 + 4y^2 - 2yz + 4yx + 2x^2 - 2z$;

g) $f(x, y, z) = z^3 + x^2 + xz - 2yz + 2y^2 - 3x + 3$; **h)** $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 6x + 16y - 4z$.

Zadanie 2.5. Podaj przykład funkcji, która nie osiąga ani minimum, ani maksimum i jest

a) nieciągła, określona na odcinku domkniętym;

b) ciągła, określona na półpłaszczyźnie;

c) ciągła, określona na kuli otwartej w $\mathbb{R}^3$.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 3

3.1 Optymalizacja przy ograniczeniach równościowych

Zadanie 3.1. Znajdź minimum globalne funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ na zbiorze A.

a) $f(x, y) = x^2 + (y + 1)^2$, $\quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 = 0 \right\}$;

b) $f(x, y) = xy^2$, $\quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9 \right\}$;

c) $f(x, y) = xy^3$, $\quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \right\}$;

d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, $\quad A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$;

e) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$, $\quad A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1 \right\}$.

Zadanie 3.2. Znaleźć minimalny obwód prostokątnej działki o zadanym polu powierzchni 4 arów.

Zadanie 3.3. Znaleźć maksymalną objętość prostopadłościanu o zadanym polu powierzchni całkowitej $24cm^2$.

Zadanie 3.4. Znaleźć punkt $x \in \mathbb{R}^n$ należący do hiperpłaszczyzny zadanej równaniem $\sum_{i=1}^n a_i x_i = a$, dla którego suma kwadratów jego odległości od danych punktów $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$, jest minimalna.

Zadanie 3.5. Rozważ funkcję entropii $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danej wzorem $E(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$. Znajdź maksimum tej funkcji na płaszczyźnie zadanej wzorem $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

Zadanie 3.6. Znajdź punkt leżący na walcu $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 16 \right\}$ najbliższy punktowi $(1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Zadanie 3.7. Na wysokości h nad poziomą płaszczyzną π umieszczone jest działo, którego lufa może być skierowana w dowolnym kierunku wzdłuż pewnej płaszczyzny pionowej. Zgodnie z prawami fizyki pocisk upadnie na płaszczyznę π w odległości poziomej

$$\ell = g^{-1} \left(\sqrt{v_y^2 + 2gh} + v_y \right) v_x$$

od działa, gdzie g jest stałą przyspieszenia ziemskiego, v_x, v_y są składowymi poziomą i pionową prędkości początkowej pocisku. Jak należy skierować lufę działa, by pocisk wystrzelony z ustaloną prędkością $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ upadł na płaszczyznę π w maksymalnej odległości od działa.

Zadanie 3.8. Załóżmy, że mamy wyprodukować pojemnik w kształcie prostopadłościanu o ustalonej objętości V, którego trzy pary naprzeciwległych ścian będą zbudowane z trzech różnych materiałów. Ceny za jednostkę powierzchni każdego z trzech materiałów są równa odpowiednio c_1, c_2, c_3. Jakie wymiary powinien mieć pojemnik, by koszt jego produkcji był minimalny.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 4

4.1 Warunki konieczne KKT

Zadanie 4.1. Sprawdź czy punkty ze zbioru P mogą być rozwiązaniami problemu minimalizacji (lub maksymalizacji) funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ na danym zbiorze $S \subset \mathbb{R}^n$.

a) dla $P = \{ (0, 0), (1, -1), (1, 0) \}$ zbadaj $f(x, y) = -x^2 + 2y^2$ na

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 1 \right\};$$

b) dla $P = \{ (-3/2, -1/2), (-1, -1), (-1/2, -3/2) \}$ zbadaj $f(x, y) = 3xy - 5$ na

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 2 \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x - y - 1 \leqslant 0 \right\};$$

Zadanie 4.2. Znajdź minimum funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ na zbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$.

a) $f(x, y) = -(x - 4)^2 - (y - 4)^2 \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 4,\ x \leqslant 2y,\ 3x \geqslant y \right\}$;

b) $f(x, y) = xy \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9,\ x \geqslant 1,\ y \geqslant -1 \right\}$;

c) $f(x, y) = 3x + 5y \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 + y + 11 \leqslant 0,\ 1 + x^2 - y^2 \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \right\}$;

d) $f(x, y, z) = y - z \quad A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 = 0,\ y^2 + (z - 1)^2 \leqslant 1 \right\}$;

e) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + x_3^2 \quad A = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 0,\ -x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 0 \right\}$;

f) $f(x, y, z) = (x + 2)^2 - y \quad A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 \leqslant 1,\ y^2 + z^2 \geqslant -2x + 2 \right\}$;

Zadanie 4.3. 1 metr nad okrągłym stołem o średnicy 6 metrów, umieszczono symetrycznie względem środka stołu i w płaszczyźnie prostopadłej do blatu, przechodzącej przez środek blatu stołu, dwa identyczne źródła światła oddalone od siebie o 4 metry. Wiedząc, że natężenie oświetlenia E w odległości r od jednego źródła światła wyraża się wzorem

$$E(r) = \frac{I}{4\pi r^2},$$

gdzie I jest natężeniem światła źródła, oblicz minimalne i maksymalne natężenie oświetlenia na powierzchni stołu.

Zadanie 4.4. Wyznacz punkty na zbiorze $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - \frac{1}{2}y^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ najbliżej i najdalej oddalone od punktu $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

4.2 Optymalizacja w ekonomii (mnożniki Lagrange'a)

Zadania z książki A.Ostoja-Ostaszewskiego, "Matematyka w ekonomii. Modele i metody"

Zadanie 4.5. Za każdą godzinę pracy otrzymujemy 16 złotych, a nasza użyteczność u zarobienia W złotych i posiadania L godzin czasu wolnego jest równa $u(W, L) = W^{3/4}L^{1/4}$. Jak optymlanie rozdysponować 60 godzin między pracę i wypoczynek.

Zadanie 4.6. Konsument chce wydać 1280 zł an dwa dobra, X i Y, kosztujące opowiednio 1 zł i 16 zł za jednostkę. Jego funkcja użyteczności opisująca, jak ceni on sobie x jednostek dobra X i y jednostek dobra Y, jest dana wzorem $U(x, y) = x^{3/4}y^{1/4}$. Ile jednostek każdego z dóbr powinien zakupić konsument by zmaksymalizować ich użyteczność (zmaksymalizować funkcję użyteczności)?

Zadanie 4.7. Wiadomo, że konsumenta charakteryzuje funkcja użyteczności Cobba-Douglasa $u_\alpha(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$. Parametr α jest nieznany, ale wiadomo, że natrafiając na problem maksymalizacji użyteczności zmaksymalizować $u_\alpha(x, y)$ przy założeniu $x + y = 3$

konsument wybierze $x = 1$, $y = 2$. Zakładając, że wybór konsumenta jest optymalny, znaleźć wartość α.

Zadanie 4.8. Do wyprodukowania q jednostek towaru niezbędny jest kapitał K i praca L, przy czym $q = 10K^{1/4}L^{1/4}$. Oblicz minimalny koszt $C(q)$ wyprodukowania q jednostek towaru, jeśli jednostka kapitału kosztuje 300 zł, a jednostka pracy 100 zł. Jaka wielkość produkcji daje maksymalny zysk, gdy jednostkowa cena zbytu wynosi 2000 zł?

Zadanie 4.9. Tygodniowa produkcja pewnego towaru jest opisana funkcją Cobba-Douglasa $Q = L^{1/4}K^{3/4}$, gdzie L oznacza ilość pracy, a K ilość kapitału. Obliczyć najniższy koszt wyprodukowania w ciągu tygodnia 5000 jednostek towaru przy stawce 5zł za godzinę. Przyjąć cenę kapitału równą 1.

Zadanie 4.10. Obliczyć najniższy możliwy koszt $C(q)$ wyprodukowania q jednostek towaru, gdy za surowce trzeba zapłacić $p_x x + p_y y$, a funkcją produkcji jest

a) $q = Ax^\alpha y^\beta$ **b)** $q = (x^\gamma + y^\gamma)^{1/\gamma}$

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 5

5.1 Zbiory wypukłe

Zadanie 5.1. Pokaż, że każda podprzestrzeń liniowa jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 5.2. Pokaż, że każda półprzestrzeń jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 5.3. Pokaż, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^n$ są zbiorami wypukłymi to $A \cap B$ jest również zbiorem wypukłym.

Zadanie 5.4. Sprawdź, czy podane zbiory są wypukłe.

a) $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$; **b)** $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, \forall_{i\in\{1,2,3\}}\, x_i \geqslant 0\right\}$;

c) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leqslant 2\right\}$;

Zadanie 5.5. Znajdź zbiory punktów ekstremalnych dla zbiorów wypukłych z Zadania 5.4.

Zadanie 5.6. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją liniową i niech $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami wypukłymi. Pokaż, że $f(A) \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ są również zbiorami wypukłymi.

Zadanie 5.7. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Pokaż, że dla każdego $r \in \mathbb{R}$, zbiór $A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < r\}$ jest wypukły.

Zadanie 5.8. Korzystając z faktów z paragrafu 5.2 sprawdź, czy podane zbiory są wypukłe.

a) $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 x_2^3 \geqslant 8\right\}$; **b)** $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 > 0, x_2 > 0, x_1 x_2 > 1\right\}$;

c) $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \ln\left(\frac{1}{x_1 - x_2}\right) \geqslant 1, x_1 - x_2 > 0\right\}$; **d)** $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x_1 - x_2 - 1, |x_1 + 2x_2|\} \leqslant 2\right\}$

e) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| + |x - 2y| \leqslant 3\right\}$; **f)** $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 - x_3,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 + x_3\right\}$.

5.2 Funkcje wypukłe

Zadanie 5.9. Pokazać, że suma dwóch funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

Zadanie 5.10. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym i $g_1, g_2 : U \to \mathbb{R}$ funkcjami wypukłumi. Wykaż, że $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$ jest również funkcją wypukłą.

Zadanie 5.11. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnić, że nadwykres funkcji f jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 5.12. Korzystając z warunków pierwszego rzędu zbadać, czy funkcje f są wypukłe.

a) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$, **b)** $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$,

c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4$, **d)** $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^4$,

e) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^4$, **f)** $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^2$,

Zadanie 5.13. Korzystając z warunków drugiego rzędu zbadać, czy funkcje f z Zadania 5.12 są wypukłe.

Zadanie 5.14. Niech A będzie dowolną macierzą o wymiarach $n \times n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ i $c \in \mathbb{R}$. Podaj warunki konieczne (lub dostateczne, jeśli to możliwe) na to by funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ była wypukła/wklęsła.

a) $f(x) = e^{a^T x + c}$; **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$; **c)** $f(x) = e^{x^T A x + b^T x + c}$.

Zadanie 5.15. Korzystając z warunków drugiego rzędu zbadaj, czy funkcja f jest wypukła.

a) $f(x, y) = xe^{2y+3}$; **b)** $f(x, y) = x^2 e^{-3y+1}$; **c)** $f(x, y) = e^{x^2+y^2} + (x + 2y)^2$;

d) $f(x, y) = e^{-2x^2-3y^2}$; **e)** $f(x, y) = (x - y)^2 e^{3x+2y-1}$.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 6

6.1 Minimalizacja funkcji wypukłych na zbiorach otwartych

Zadanie 6.1. Dowodząc wypukłości (albo wklęsłości) funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ oraz wypukłości zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$, znaleźć minimum (albo maksimum) funkcji f na zbiorze A.

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + 1 + e^{x_2+1} + e^{-8x_2+4}$, $\quad A = \{(x_1, x_2,) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, 3x_2\} < 2\}$;

b) $f(x_1, x_2) = e^{x_1-x_2} + x_2 - x_1 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 2)^2$, $\quad A = \{(x_1, x_2,) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 2)^4 + e^{x_2} < 2008\}$;

c) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) - x_1^2 - x_2^2$, $\quad A = \{(x_1, x_2,) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 > 0,\ x_1 + x_2 > 0\}$.

Zadanie 6.2. Znajdź punkt $x \in \mathbb{R}^n$, dla którego suma kwadratów jego odległości od danych punktów $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$, jest minimalna.

Zadanie 6.3. Niech będą dane punkty $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Znajdź prostą postaci $y = ax + b$, dla której funkcja $S(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2$ przyjmuje minimum. Podaj interpretację geometryczną tego zadania.

Zadanie 6.4. [1] Koszt produkcji x sztuk produktu X i y sztuk produktu Y wynosi $4x^2 + xy + 2y^2$. Zakładając, że jedną sztukę produktu X i Y można sprzedać za odpowiednio $p_X = 150 - 5x + y$ oraz $p_Y = 30 + 2x - 2y$, obliczyć ile sztuk każdego z produktów należy wyprodukować by zmaksymalizować zysk.

6.2 Optymalizacja funkcji liniowych na zbiorach wypukłych

Zadanie 6.5. Znaleźć wartości ekstremalne podanej funkcji liniowej f na zbiorze wypukłym A.

a) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, $\quad A = \{\max\{x_1 - 2, x_2 + 3\} \leqslant 2\}$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3 - 2$, $\quad A = \left\{x_1 + x_2 + x_3 \geqslant -2, \forall_{i\in\{1,2,3\}}\ x_i \leqslant 1\right\}$,

c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $\quad A = \{|x_1 - 2| + |x_2| + |x_3 + 1| \leqslant 1\}$,

d) $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 + 1$, $\quad A = \{\max\{|x_1 - x_2 + 1|, |2x_1 + x_2|\} \leqslant 4\}$;

e) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ $\quad A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 8,\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 4,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\right\}$;

[1] zadanie z ksiazki Pembertona i Rau

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 7

7.1 Funkcje quasiwypukłe i quasiwklęsłe

Zadanie 7.1. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ jest quasiwypukła. Które z tych funkcji są również quasiwklęsłe?

Zadanie 7.2. Podaj przykład dwóch funkcji quasiwypukłych, których suma nie jest quasiwypukła.

Zadanie 7.3. Podaj przykład funkcji, która

a) jest quasiwypukła, ale nie jest wypukła;

b) jest quasiwklęsła, ale nie jest wklęsła;

c) jest jednocześnie quasiwypukła i wklęsła, ale nie jest wypukła;

d) jest jednocześlnie quasiwypukła i quasiwklęsła, ale nie jest ani wypukła ani wklęsła.

Zadanie 7.4. Sprawdź czy funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest quasiwypukła lub quasiwklęsła.

a) $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1| + |x_2|}$, $\quad A = \mathbb{R}^2$; **b)** $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1 - 1|, x_2\}$, $\quad A = \mathbb{R}^2$;

c) $f(x_1, x_2) = \ln(1 + |x_1 + 1| + 2|x_2 + 2|)$, $\quad A = \mathbb{R}^2$; **d)** $f(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2-3x_1+4x_2-7}$, $\quad A = \mathbb{R}^2$;

e) $f(x_1, x_2) = x_1(1 + x_2)$, $\quad A = \mathbb{R}^2$; **f)** $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{e^{x_1} + 1}$, $\quad A = \mathbb{R}^2$.

Zadanie 7.5. Niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, gdzie I jest odcinkiem. Udowodnij, że jeśli f jest monotoniczna to jest quasiwypukła i quasiwklęsła. Ogólniej udowodnij, że jeśli f przyjmuje co najwyżej jedno minimum (odpowiednio maksimum) to jest quasiwypukła (odpowiednio quasiwklęsła).

Zadanie 7.6. Niech $f, g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ będą dane wzorami

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \ln x_1 + \dots \alpha_n \ln x_n, \qquad g(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Badając wypukłość/wklęsłość funkcji f pokaż, że jeśli $\alpha_1 < 0, \dots, \alpha_n < 0$ to g jest quasiwypukła, a jeśli $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ to g jest quasiwklęsła.

Zadanie 7.7. Niech $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = x^a y^b$. Korzystając z warunków drugiego rzędu podaj warunek dostateczny na to by f była funkcją quasiwypukłą (ewentualnie quasiwklęsłą).

Zadanie 7.8. Niech $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$. Korzystając z warunków drugiego rzędu podaj warunek dostateczny na to by f była funkcją quasiwypukłą (ewentualnie quasiwklęsłą).

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 8

8.1 Warunki dostateczne KKT

Zadanie 8.1. Sprawdź czy punkty ze zbioru P są rozwiązaniami problemu minimalizacji funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ na danym zbiorze $S \subset \mathbb{R}^n$.

a) dla $P = \{(1, -1, 3)\}$ zbadaj $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + x_2 + x_3^2 - x_3$ na

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 \leqslant 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3,\ 3x_2^2 - x_3 \leqslant 0,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0 \right\};$$

b) dla $P = \{(1, 1, 2)\}$ zbadaj $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - 3x_1 - 6x_2 - 8x_3$ na

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4,\ x_3 \leqslant 2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \right\};$$

c) dla $P = \{(0, 1)\}$ zbadaj $f(x, y) = e^{y-2x} + y$ na

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x - y \leqslant 0,\ x^2 + 2x - 2y + 2 \leqslant 0,\ y - 2x - 2 \leqslant 0 \right\};$$

d) dla $P = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 1)\}$ zbadaj $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 - x_2 - x_3)$ na

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 \leqslant 1,\ x_2^2 \leqslant x_3,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \right\};$$

e) dla $P = \left\{ (\frac{2}{3}, \frac{8}{3}) \right\}$ zbadaj $f(x, y) = \cos x + (y - \frac{11}{3})^2$ na

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x - y| + 2, |2x + y|\} \leqslant 4,\ y \leqslant -x^2 + \frac{14}{3}x \right\};$$

f) dla $P = \{(0, 1)\}$ zbadaj $f(x, y) = e^x + y \ln y + x$ na

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geqslant 1,\ x^2 - 2x - y \leqslant -1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant x \right\};$$

g) dla $P = \left\{ (\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{9}{14}) \right\}$ zbadaj $f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + (x + z)^2$ na

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x - y - z + 1 \leqslant 0,\ xyz - 1 \leqslant 0,\ x - 2y + z - 1 = 0 \right\};$$

h) dla $P = \left\{ (\frac{8}{3}, 1, \frac{4}{9}) \right\}$ zbadaj $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z$ na

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + z - 5 \leqslant 0,\ xyz - 2 \leqslant 0,\ x - 4y + 3z = 0 \right\};$$

Zadanie 8.2. Znajdź wartości ekstremalne

a) funkcji $f(x, y) = (x - y)^3$ na zbiorze $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}$;

b) funkcji $f(x, y) = e^{-x} - 2y$ na zbiorze $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 4,\ e^x - y \leqslant 2 \right\}$;

c) funkcji $f(x_1, x_2) = (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2$ na zbiorze

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1^2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant 6, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \right\};$$

d) funkcji $f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$ na zbiorze $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \right\}$;

e) funkcji $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ na zbiorze $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.

Zadanie 8.3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1-1)^2-(x_2+1)^2-x_3^2}$$

przyjmuje na zbiorze $A_a = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant a^2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ maksimum we wnętrzu tego zbioru.

Zadanie 8.4. Udowodnić, że funkcja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^4$ obcięta do zbioru $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 2,\ \max\{|x_1 - x_2|, |x_2 + x_3|\} \leqslant 4\}$ przyjmuje minimum we wnętrzu zbioru A. Obliczyć to minimum.

Zadanie 8.5. Udowodnić, że funkcja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^1 x_3^3$ obcięta do zbioru $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 \leqslant 1\}$ osiąga maksimum na brzegu zbioru A.

Zadanie 8.6. Znaleźć minimum funkcji $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ na zbiorze $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 9

9.1 Twierdzenie o oddzielaniu

Zadanie 9.1. Dla danego zbioru domkniętego i wypukłego A znaleźć płaszczyznę podpierającą w punkcie $x \in \partial A$.

a) $x = (2,2) \in A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 8\}$;
b) $x = (2,1) \in A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, x_2 + 1\} \leqslant 2\}$;
c) $x = (-1,0) \in A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2 \leqslant 1\}$;
d) $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leqslant 1\}$;
e) $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$.

9.2 Algebra zbiorów

Zadanie 9.2. Udowodnić, że suma i różnica Minkowskiego dwóch zbiorów wypukłych (odpowiednio ograniczonych) jest zbiorem wypukłym (ograniczonym).

Zadanie 9.3. Znaleźć sumę $A + B$ oraz różnice $A - B$ i $B - A$ Minkowskiego zbiorów A i B.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(1,0), (-1,0)\} \cup \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [-1,1)\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 4\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{9}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 = 1\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{2|x_1|, |x_2|\} \leqslant 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$;
e) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$;
f) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, |x_2| \leqslant 1\}$;
g) $A = \{\lambda(1,1) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \geqslant 0\}$, $B = \{\lambda(-1,2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \geqslant 0\}$;
h) $A = \mathrm{cone}(\mathrm{conv}((0,1),(1,1)))$, $B = \mathrm{cone}((-1,-1))$.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 10

10.1 Stożki wypukłe

Zadanie 10.1. Pokazać, że zbiór

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0 \right\}.$$

jest najmniejszym stożkiem wypukłym zawierającym punkty $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$.

Zadanie 10.2. Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ będą stożkami wypukłymi. Wykaż, że $A + B$ jest również stożkiem wypukłym.

Zadanie 10.3. Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ będą stożkami wypukłymi. Wykaż, że $A \cap B$ jest również stożkiem wypukłym.

10.2 Stożki polarne

Zadanie 10.4. Pokaż, że każdy z poniższych zbiorów C jest stożkiem wypukłym i domkniętym. Wyznacz minimalny zbiór punktów X, które generują C, tzn. $C = \mathrm{cone}(\mathrm{conv}(X))$. Znajdź stożek polarny do C.

a) $C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 0\right\}$;
b) $C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_1 \leqslant 0, \ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geqslant 0\right\}$;
c) $C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geqslant 0, \ x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 \geqslant 0\right\}$;
d) $C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 \geqslant 0\right\}$;
e) $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0\}$.

Zadanie 10.5. Znajdź stożek polarny do stożka wypukłego generowanego przez następujące zbiory punktów.

a) $\{(1,2), (2,3)\}$; **b)** $\{(-1,3), (3,2), (1,1)\}$;
c) $\{(1,0,0), \ (0,1,0), \ (0,0,1)\}$; **d)** $\{(1,0,0), \ (0,1,0), \ (1,1,1)\}$;
e) $\{(1,0,-1), \ (-1,0,-1), \ (0,1,-1), \ (0,-1,-1)\}$; **f)** $\{(-1,0,0), \ (0,1,1), \ (0,0,1)\}$;
g) $\{(1,1,0), \ (0,1,1), \ (1,0,1)\}$.

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 11

11.1 Stożki kierunków dopuszczalnych, styczne i normalne

Zadanie 11.1. Dla podanych zbiorów A znaleźć stożek $F_A(x)$ kierunków dopuszczalnych, stożek styczny $T_A(x)$ oraz stożek normalny $N_A(x)$ w punkcie $x \in A$.

a) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in A = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1 \right\};$

b) $x = (-3,-3,1) \in A = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x_1+1|, -x_2-1\} \leqslant 2 \right\};$

c) $x = (0, \sqrt{3}, -2) \in A = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 4,\ (x_1+1)^2 + x_2^2 \leqslant 4 \right\};$

d) $x = (1,2,3) \in A = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{2|x_1|, |x_2|\} \leqslant 2, |x_1| + |x_3| \leqslant 4 \right\};$

e) $x = (1,-1,1) \in A = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2,\ x_1^2 + x_2 \leqslant 0,\ |x_3| \leqslant 1 \right\};$

f) $x = (4,-3) \in A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\left\{ x+y-1, x^2+y^2-25 \right\} \leqslant 0 \right\}.$

11.2 Rachunek subróżniczkowy

Zadanie 11.2. Znajdź subróżniczkę funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = ||x| - 1|;$
b) $f(x) = |x^2 - 1|;$
c) $f(x) = |x| + x;$
d) $f(x) = \max\{2x, -x, x+1\};$
e) $f(x) = \ln(1 + |x|);$
f) $f(x) = \sqrt{1 + 2|x|};$
g) $f(x) = -|x|;$
h) $f(x) = x(x-1)(x+1).$

Zadanie 11.3. Znajdź subróżniczkę funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w dowolnym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = |x - y|;$
b) $f(x,y) = |x| + |y|;$
c) $f(x,y) = |x - y| + |x + y|;$
d) $f(x,y) = \max\{x, y, x + y\}.$

Zadanie 11.4. Znajdź subróżniczkę funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w punktach ze zbioru P.

a) $f(x,y) = |2x - 3y + 1|;$ $\quad P = \{(-2,-1), (4,1)\}$
b) $f(x,y) = |2x - y| + |3x + y - 5| + 1;$ $\quad P = \{(1,2), (2,-1)\}$
c) $f(x,y) = |5x + 3y - 1| + 3x^2 - 2xy + 2y^2;$ $\quad P = \{(1,2), (-1,2)\}$
d) $f(x,y) = \max\{3x + 2y + 1, (x+1)^2 + (y-1)^2 - 4, |x + y - 1| + 1\};$ $\quad P = \{(-2,3), (0,0), (-1/2,1)\}.$

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zestaw nr 12

12.1 Optymalizacja z użyciem rachunku subróżniczkowego

Zadanie 12.1. Sprawdź czy punkty ze zbioru P są rozwiązaniami problemu minimalizacji funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) $f(x,y) = \max\left\{ 2x - 3y - 1,\ -x + y - 1,\ x^2 + 2y^2 - 36 \right\}$ dla $P = \{(4,3)\};$

b) $f(x,y) = \max\left\{ |4x - y + 1|, 2x^2 - 8 \right\}$ dla $P = \{(2,9), (0,1), (3,3)\};$

c) $f(x,y) = \max\left\{ x^2 + y^2, 13x + 7y + 20, 3x + 3y + 20 \right\}$ dla $P = \{(-10,10), (-2,-2), (-2,5)\};$

Zadanie 12.2. Sprawdź czy punkty ze zbioru P są rozwiązaniami problemu minimalizacji funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ na danym zbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$.

a) dla $P = \{(-1,-3), (-1,3)\}$ zbadaj $f(x,y) = \max\{-x - y,\ 2x - y + 3\}$ na

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |2x| + |y| \leqslant 5 \right\};$$

b) dla $P = \left\{ (10,10), (-2 - \sqrt{6}, 1/2) \right\}$ zbadaj $f(x,y) = \max\left\{ x^2,\ y^2,\ -4x + 2y + 1 \right\}$ na

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant (x-12)^2 + 6,\ x + y \leqslant 20 \right\};$$

Zadanie 12.3. Znajdź minimum globalne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) $f(x,y) = |x - y + 1| + |2x + y - 4|;$
b) $f(x,y) = \max\{(x-1)^2, |y|\};$
c) $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, x + 1\};$
d) $f(x,y) = \max\{e^x, e^{-y}, y - x\};$
e) $f(x,y) = \max\{(x-1)^2 + y^2 + 4, -2x + 4y + 2\}.$

Zadanie 12.4. Znajdź minimum globalne funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ na zbiorze A.

a) $f(x,y) = \max\{x, y\},$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\};$
b) $f(x,y) = |x - y + 2|,$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 2\};$
c) $f(x,y) = \max\{x - y, x + y\},$ $\quad A = \{(x-1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ (x+1)^2 + y^2 \leqslant 4\};$
d) $f(x,y) = |2x + y - 2| + 1,$ $\quad A = \{(y-x)^2 - 2 \leqslant x + y,\ (x+y)^2 - 2 \leqslant y - x\}.$

Elementy Optymalizacji Nieliniowej
Zadania z egzaminów

13.1 Egzamin główny w semestrze letnim 2007/2008

Zadanie 13.1.1.

a) Sprawdź czy funkcja $f(x) = (x-1)^5 + 1$ jest quasiwypukła lub quasiwklęsła.

b) Udowodnij, że funkcja $g(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$ określona na zbiorze $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ jest quasiwypukła.

Zadanie 13.1.2. Wyznacz subróżniczkę funkcji

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2||x| - 1| + x$ w punkcie $x = -1$;

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \max\{x, 2y, 0\}$ w punkcie $(x,y) = (0,0)$.

Zadanie 13.1.3. Wyznacz stożki: styczny i normalny do zbioru

a) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y + 2 \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 25\}$ w punkcie $(x,y) = (-3,4)$;

b) $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x-y|, x+y-2\} \leqslant z\}$ w punkcie $(x,y,z) = (1,1,0)$.

Zadanie 13.1.4. Niech funkcja f dana będzie wzorem $f(x,y) = x^4 + 2x + y - 1$. Sprawdź, czy w którymś z punktów $(2,0)$, $(-2,4)$, $(0,0)$, $(-2,-4)$ spełnione są warunki dostateczne KKT na to, by w punkcie tym f osiągała minimum na zbiorze

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \max\{|x+y|, -x\} \leqslant 2,\ (x+2)^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

Zadanie 13.1.5.

a) Dla jakich wartości parametru α funkcja

$$f(x,y) = x^3 + \alpha y + xy$$

przyjmuje minimum na zbiorze $A = \{x \leqslant 0,\ x^2 + 2|y| \leqslant 20\}$ na brzegu tego zbioru?

b) Dla jakich wartości parametru β funkcja $g(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2+2\beta(x-y)}$ przyjmuje

- minimum
- maksimum

na zbiorze $B = \{\max\{|x+y|, |y|\} \leqslant 2,\ z = 1\}$ w punkcie, w którym wiąz z nierównością występujący w definicji zbioru B jest nieaktywny?

13.2 Egzamin poprawkowy w semestrze letnim 2007/2008

Zadanie 13.2.1. Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{12}(x-y)^3.$$

Zbadaj, czy funkcja ma w nich minimum, maksimum, czy punkt siodłowy.
Zadanie 13.2.2. Niech

$$f(x,y,z) = \frac{e^{x+y-2z}\sin z}{x + y^2}.$$

Wyznacz $f'_{(0,0,1)}(\pi,\pi,0) + 2f'_{(-1,1,0)}(2\pi,2\pi,\pi)$.
Zadanie 13.2.3. Czy funkcja

$$f(x) = \sqrt{|x-1|}$$

jest **a)** quasiwypukła **b)** quasiwklęsła na $\mathbb{R}$?
Zadanie 13.2.4. Wyznacz (uzasadniając odpowiedź) subróżniczkę funkcji

$$f(x) = \max\{x^2 - 1, 2x + 7, 1\}$$

w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$.
Zadanie 13.2.5. Niech

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \leqslant 25,\ |y| + |x| \leqslant 7\}$$

a) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym i zwartym.

b) Wyznacz zbiór punktów ekstremalnych A.

c) Wybierz jeden z punktów ekstremalnych zbioru A i wyznacz w nim stożki: styczny i normalny do A (jako podzbiory $\mathbb{R}^2$). Proszę uzasadnić odpowiedź!

Zadanie 13.2.6. Niech

$$f(x) = (x + y + 3)^4 + (x - 2y)^2.$$

Wyznacz $\min_A f(x)$ (najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze A) oraz $\operatorname{argmin}_A f(x)$ (a więc punkt, w którym jest ona osiągana), gdzie

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \max\{|x+y|, |x-y|\} \leqslant 2008\}.$$

Zadanie 13.2.7. Rozważ zadanie poszukiwania maksimum funkcji

$$f(x) = x - y + 1$$

na zbiorze

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 8,\ y \geqslant x^2 - 2\}.$$

Sprawdź czy w punkcie **a)** $(1,-1)$, **b)** $(-3,3)$, **c)** $(1,3)$ spełnione są warunki konieczne KKT (na to, by w punkcie tym $f(x)$ przyjmowała maksimum).

13.3 Egzamin główny w semestrze letnim 2008/2009

Zadanie 13.3.1. Rozważ funkcję $f(x, y) = (x + y)(x + 6)(-y - 3)$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (-3, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-6, -3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.

(iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (3, 2)$, $E = (3, -3)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 13.3.2. Rozważ funkcję afiniczną $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1$ określoną na zbiorze

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y + 1| \leqslant 2, y \geqslant -3, y - 2x \leqslant 0, |x + y - z| \leqslant 5 \right\}.$$

(i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.

(ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X.

(iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X.

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 13.3.3. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{4x^2 + y^2, 5x + 3y + 3, 3x - 4y + 6\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.

(ii) (6pt) Oblicz subróżniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (-3/5, 3/5)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 2)$ i $D = (1, -2)$.

(iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w $\mathbb{R}^2$, w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 13.3.4. Niech
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 \leqslant 1,\ |2y| - x \leqslant 0\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Zadanie 13.3.5. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leqslant 1,\ y + z = 0,\ x + 2y + z \geqslant 0 \right\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 1, -1)$, $B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B, na maksimum w A)?

13.4 Egzamin poprawkowy w semestrze letnim 2008/2009

Zadanie 13.4.1. Rozważ funkcję $f(x, y) = (2x + y)(x + 1)(y + 1)$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (6pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f;

(ii) (2pt) Zbadaj czy w punktach $A = (-1/2, 0)$, $B = (-1/2, 1/2)$ istnieje minimum lokalne funkcji f;

(iii) (2pt) Zbadaj czy w punktach $C = (-1, -1)$, $D = (-1, 2)$ istnieje maksimum lokalne funkcji f;

Zadanie 13.4.2. Rozważ funkcję liniową $f(x, y, z) = -x + y + 2z + 2$ określoną na zbiorze

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leqslant 3, \max\{x - 1, y, z + 1\} \geqslant 0 \right\}.$$

(i) (2pt) Udowodnij, że zbiór X jest wypukły;

(ii) (2pt) Udowodnij, że zbiór X jest zwarty;

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X;

(iv) (2pt) Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze X;

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 13.4.3. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{x^2 + y^2, 13x + 7y + 20, 3x + 3y + 20\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź czy f jest funkcją wypukłą;

(ii) (6pt) Policz subróżniczki ∂f funkcji f w punktach

$$A = (-10, 10), \qquad B = (-2, -2), \qquad C = (-2, 5);$$

(iii) (2pt) Czy w którymś z punktów A, B, C funkcja f przyjmuje minimum lokalne? Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje minimum globalne?

Zadanie 13.4.4. Rozważ zbiór

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y \leqslant 0,\ |2x - y - 5| + 3|x + 2y| \leqslant 25 \right\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (1/3, -13/3)$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (5, -5)$.

Zadanie 13.4.5. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y - z)^2$ określoną na zbiorze

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 2xy + y - z \leqslant 1,\ x + 2y - z = 0,\ 3x + 3y - z \geqslant 0 \right\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 2, 3)$, $B = (1/2, -1, -3/2)$, $C = (0, 1/2, 1)$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B, na maksimum w A)?

13.5 Egzamin główny w semestrze letnim 2010/2011

Zadanie 13.5.1. (10pt) Sprawdź, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x,y) = \ln\left(|8x - 4y + 15| + (3x - y)^2 + e^{-3x+5y+7}\right) - 5$$

jest quasiwypukła.

Zadanie 13.5.2. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x$. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 5,\ x - y - 1 \geqslant 0\right\}.$$

Rozważ problem (P) znalezienia punktów, w których funkcja f przyjmuje ekstremum na zbiorze A.

(2pt) Sprawdź warunek jakości więzów dla problemu (P) w każdym punkcie $p \in A$;

(1pt) wypisz warunki konieczne KKT na istnienie minimum/maksimum w punkcie $p = (x,y) \in A$ dla problemu (P);

(5pt) rozwiązując równania znajdź wszystkie punkty, które mogą być rozwiązaniami problemu (P);

(1pt) podaj rozwiązanie problemu (P) (sformułuj odpowiedź!).

Zadanie 13.5.3. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y + 1 \leqslant 0,\ x + y - 1 \geqslant 0,\ -x + y - 5 \leqslant 0,\ x + y - 7 \leqslant 0\right\}.$$

(2pt) Sprawdź, czy zbiór A jest wypukły;

(1pt) sprawdź, czy funkcja f jest wypukła na zbiorze A;

(6pt) sprawdź warunki konieczne KKT dla problemu minimalizacji funkcji f na zbiorze A w punktach $(-1,2), (1,2), (0,0), (1,6), (0,1)$;

(1pt) z podanych wyżej punktów wybierz te, w których funkcja f przyjmuje minimum globalne na zbiorze A? (odpowiedź sformułuj i uzasadnij!)

Zadanie 13.5.4. Rozważ funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x,y) = |3x + y - 12| + (x - y)^2$.

(2pt) Sprawdź, czy funkcja f jest wypukła na zbiorze $\mathbb{R}^2$;

(6pt) policz i narysuj subróżniczkę ∂f funkcji f w punktach $(2,2), (3,3), (2,6)$;

(2pt) z podanych wyżej punktów wybierz te, w których funkcja f przyjmuje minimum globalne na zbiorze A? (odpowiedź sformułuj i uzasadnij!)

Zadanie 13.5.5. Niech wypukła funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = \max\{x + y,\ x - y\}$. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-4)^2 \leqslant 25,\ -x - 3 \leqslant 0,\ x + y \leqslant 4\right\},$$

będzie zbiorem wypukłym.

(6pt) oblicz i narysuj stożki $F_A(p), T_A(p), N_A(p)$ w punktach $p \in \{(-3,0), (0,0), (0,-1), (-3,4)\}$;

(4pt) z podanych wyżej punktów wybierz te, w których funkcja f przyjmuje minimum globalne na zbiorze A? (odpowiedź sformułuj i uzasadnij!)

Uwaga: Proszę nie sprawdzać, czy funkcja f i zbiór A są wypukłe.

13.6 Egzamin poprawkowy w semestrze letnim 2010/2011

Zadanie 13.6.1. (10pt) Sprawdź, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x,y) = 2 + \sqrt{(x - 4y)^2 + e^{2x-5y-3} + |3x - 5y - 1|}$$

jest quasiwypukła.

Odpowiedź: Tak

Zadanie 13.6.2. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x$. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4 \leqslant y,\ y \leqslant 3x\right\}.$$

Rozważ problem (P) znalezienia punktów, w których funkcja f przyjmuje ekstremum na zbiorze A.

(2pt) Sprawdź warunek jakości więzów dla problemu (P) w każdym punkcie $p \in A$;

(1pt) wypisz warunki konieczne KKT na istnienie minimum/maksimum w punkcie $p = (x,y) \in A$ dla problemu (P);

(5pt) rozwiązując równania znajdź wszystkie punkty, które mogą być rozwiązaniami problemu (P);

(1pt) podaj rozwiązanie problemu (P) (sformułuj odpowiedź!).

Zadanie 13.6.3. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - x + y + 1 \leqslant 0,\ 3x - y - 1 \geqslant 0,\ -x - y - 5 \leqslant 0,\ 3x - y - 7 \leqslant 0\right\}.$$

(2pt) Sprawdź, czy zbiór A jest wypukły;

(1pt) sprawdź, czy funkcja f jest wypukła na zbiorze A;

(6pt) sprawdź warunki konieczne KKT dla problemu minimalizacji funkcji f na zbiorze A w punktach $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (0,0), (\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}), (0,-1)$;

(1pt) z podanych wyżej punktów wybierz te, w których funkcja f przyjmuje minimum globalne na zbiorze A? (odpowiedź sformułuj i uzasadnij!)

Zadanie 13.6.4. Rozważ funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x,y) = |3x - 2y - 19| + (x - 2y - 5)^2$.

(2pt) Sprawdź, czy funkcja f jest wypukła na zbiorze $\mathbb{R}^2$;

(6pt) policz i narysuj subróżniczkę ∂f funkcji f w punktach $(5,0), (7,1), (9,4)$;

(2pt) z podanych wyżej punktów wybierz te, w których funkcja f przyjmuje minimum globalne na zbiorze A? (odpowiedź sformułuj i uzasadnij!)

Zadanie 13.6.5. Niech wypukła funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = \max\{x + y + 5,\ x - y - 1\}$. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 25,\ -x - 5 \leqslant 0,\ x + y \leqslant -1\right\},$$

będzie zbiorem wypukłym.

(6pt) oblicz i narysuj stożki $F_A(p), T_A(p), N_A(p)$ w punktach $p \in \{(-5,-3), (-2,-3), (-2,-4), (-5,1)\}$;

(4pt) z podanych wyżej punktów wybierz te, w których funkcja f przyjmuje minimum globalne na zbiorze A? (odpowiedź sformułuj i uzasadnij!)

Uwaga: Proszę nie sprawdzać, czy funkcja f i zbiór A są wypukłe.