

Algebra liniowa, I rok Informatyki, 2004/2005 (z poprawkami)

1. Struktury algebraiczne. Półgrupy, grupy, pierścienie, ciała. Liczby zespolone.
 2. Macierze. Działania i własności. Równania liniowe.
 3. Przestrzenie liniowe. Podprzestrzenie, wymiar, baza. Przekształcenia liniowe.
 4. Obraz i jądro przekształcenia liniowego i macierzy. Rząd macierzy. Funkcjonały liniowe. Przestrzeń sprzężona. Baza dualna.
 5. Układy równań liniowych. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Metoda eliminacji Gaussa. Rozkład macierzy na czynniki trójkątne.
 6. Warstwy. Przestrzeń ilorazowa. Układy współrzędnych w przestrzeni liniowej.
 7. Normy wektorów i macierzy. Nierówności norm.
 8. Arytmetyka zmiennopozycyjna. Numeryczne uwarunkowanie zadań. Numeryczna poprawność i stabilność algorytmów.
 9. Komputerowa implementacja metody eliminacji Gaussa.
 10. Uwarunkowanie numeryczne układów równań liniowych z macierzą nieosobliwą. Analiza metody eliminacji Gaussa.
 11. Wyznaczniki. Wzory Cramera. Numeryczne obliczanie wyznacznika.
 12. Przekształcenia afiniczne. Niezmienniki przekształceń. Układy współrzędnych.
-
13. Formy dwuliniowe. Macierz formy. Kongruencje. Twierdzenie Sylwestra. Przestrzenie ortogonalne.
 14. Równania i zbiory II stopnia. Afiniczna postać kanoniczna równania.
 15. Przestrzenie euklidesowe i unitarne. Izometrie. Rzuty prostopadłe.
 16. Bazy ortogonalne. Ortogonalizacja Grama-Schmidta. Objętość równoległościanu.
 17. Bazy ortonormalne. Macierze ortogonalne.
 18. Pseudoodwrotność macierzy. Rozkład ortogonalno-trójkątny macierzy. Odbicia Householdera. Obroty Givensa.
 19. Regularne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów. Algorytm równań normalnych. Aproksymacja średniokwadratowa. Zadania nieregularne.
 20. Zastosowanie rozkładu ortogonalno-trójkątnego do rozwiązywania LZNK.
 21. Algebraiczne zagadnienie własne. Podobieństwa macierzy. Twierdzenie Jordana.
 22. Widmo macierzy. Twierdzenie Schura. Izometryczna postać kanoniczna równania tworzącego II stopnia.
 23. Struktura przekształceń liniowych. Norma druga macierzy. Uwarunkowanie numeryczne wartości i podprzestrzeni własnych.
 24. Metody rozwiązywania zadania własnego. Sprowadzanie macierzy do postaci Hessenberga. Metoda potęgowa. Algorytm QR.

Zasady zaliczania przedmiotu

Blady atoli strach padł na wszystkich, kiedy król, dla niespodzianego kaprysu, ogłaszał zgadywanki. Z dawien dawna lubował się w nich i jeszcze wielkiego kanclerza podczas koronacji zaskoczył pytaniem, jak sądzi, czy pacierz i macierz różnią się czymś między sobą, a jeśli tak, to czym?

Stanisław Lem: Cyberiada.

Na zaliczenie przedmiotu składają się:

- Prace domowe zadawane co tydzień. Na końcu semestru liczba otrzymanych punktów (1 zadanie to 1 punkt, można też otrzymać ułamek) będzie podzielona przez liczbę zadań zadanych w danej grupie ćwiczeniowej, pomnożona przez 40 i dodana do liczby punktów zdobytych na kolokwiach.
- Dwa kolokwia w semestrze. Na każdym z nich można dostać maksymalnie 30 punktów.
- Aby zaliczyć ćwiczenia, trzeba na nie chodzić i zdobyć (z prac domowych i kolokwiów) co najmniej 50 punktów.
- Egzamin pisemny na końcu semestru.
- Osoby, u których wystąpi niezgodność między oceną z egzaminu pisemnego i liczbą punktów z ćwiczeń, albo niezgodność proponowanej oceny końcowej z ambicjami, zdają egzamin ustny.
- Osoby, które otrzymały 88 lub więcej punktów z ćwiczeń mają prawo do zdawania tylko egzaminu ustnego.

W drugim semestrze ma być lepiej. Zasady będą te same.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 22 listopada 2001.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Niech $z = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$. Oblicz z^{2001} .

2. Zbadaj, czy zbiór macierzy zespolonych 2×2 o postaci

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

jest przestrzenią liniową

- a) nad ciałem liczb rzeczywistych,
- b) nad ciałem liczb zespolonych.

W każdym przypadku, jeśli odpowiedź jest twierdząca, wskaż wymiar i bazę.

3. Znajdź rząd oraz bazę jądra i obrazu macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Wskaż wymiar i bazę podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}[x]_4$, składającej się z wielomianów w spełniających warunki $w'''(1) = 0$, $w^{(4)}(1) = 0$ i $w^{(5)}(1) = 0$.

5. Znajdź zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 1 & 2 & a^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

w zależności od parametru a .

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 18 listopada 2002.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z , które są rozwiązaniami równania

$$\frac{z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{(z^3 - 1)^2} = 0.$$

Przedstaw je w postaci trygonometrycznej.

2. Oblicz macierz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wykonując jak najmniej mnożeń i dodawań liczb.

3. Wskaż maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru kolumn i maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru wierszy macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jaki jest wymiar jądra i obrazu tej macierzy?

4. Niech $A = \begin{bmatrix} (0, 1) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, 1) \end{bmatrix}$.

Oblicz macierz $A^9 - 3A^5 + 5A$, stosując schemat Hornera.

5. Macierz zespolona hermitowska $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ spełnia warunek $A = A^H$, a macierz antyhermitowska B spełnia warunek $B = -B^H$.

Czy zbiory macierzy hermitowskich i antyhermitowskich $n \times n$ są przestrzeniami liniowymi

- a) nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} ,
- b) nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} ,
- c) nad ciałem liczb wymiernych \mathbb{Q} ?

W każdym przypadku, jeśli odpowiedź jest twierdząca, określ wymiar przestrzeni.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 17 listopada 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Dana jest macierz zespolona

$$A = \begin{bmatrix} (-1/2, 0) & (0, \sqrt{3}/2) \\ (0, \sqrt{3}/2) & (-1/2, 0) \end{bmatrix}.$$

Oblicz macierze A^{2003} oraz A^{-2003} .

Wskazówka: Oblicz najpierw A^3 .

2. Zbadaj, czy zbiór macierzy zespolonych 2×2 o postaci

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

z działaniami dodawania i mnożenia macierzy jest ciałem. Rozwiązując zadanie, tam gdzie można, powołuj się na odpowiednie własności działań na macierzach.

3. Znajdź rząd i wymiary jądra i obrazu macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Zbadaj, czy układ wielomianów $x^2 - x, x^2 + x, x^2 - 1$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ (wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej 2). Odpowiedź uzasadnij.

5. Niech V oznacza przestrzeń liniową nad ciałem \mathbb{R} , której elementami są macierze zespolone $n \times n$. Zbiory

$$\text{Sym} = \{A: A^T = A\}, \quad \text{ASym} = \{A: A^T = -A\},$$

$$\text{Herm} = \{A: A^H = A\}, \quad \text{AHerm} = \{A: A^H = -A\},$$

są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V . Znajdź wymiary podprzestrzeni

$$\text{Sym} \cap \text{Herm}, \quad \text{Sym} \cap \text{AHerm}, \quad \text{ASym} \cap \text{Herm}, \quad \text{ASym} \cap \text{AHerm}.$$

Czy przestrzeń V jest sumą prostą tych czterech podprzestrzeni?

Odpowiedź uzasadnij.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 22 listopada 2004.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Macierz $A = [a_{ij}]_{i,j}$ nazywa się macierzą $(2k+1)$ -diagonalną, jeśli $a_{ij} = 0$ dla $|i-j| > k$. W szczególności dla $k=1$ mówi się o macierzy trójdiagonalnej.

Zbadaj, jakie jest najmniejsze k , takie że macierz $C = AB$ jest $(2k+1)$ -diagonalna dla dowolnych macierzy trójdiagonalnych $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. W jaki sposób k zależy od n ? Odpowiedź uzasadnij.

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze schematu Hornera i innych posiadanych wiadomości znajdź macierz

$$B = (A^3 - 6A^2 + 11A - 4I_3)^{-1}.$$

3. Znajdź rząd i bazę obrazu macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jaki jest wymiar jądra tej macierzy? Odpowiedź uzasadnij.

4. Zbadaj, czy podane niżej wektory,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} (1, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} (1, 1) \\ (-1, 1) \\ (0, 2) \end{bmatrix},$$

są liniowo niezależne, a) nad ciałem \mathbb{R} , b) nad ciałem \mathbb{C} . Odpowiedzi uzasadnij.

5. Niech $p_0(x) = 1, p_1(x) = x + 1, p_2(x) = x^2 + x, p_3(x) = x^3 + x^2$.

Układ wielomianów p_0, p_1, p_2, p_3 jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$.

Przedstaw wielomian $w(x) = x^3$ jako kombinację liniową elementów tej bazy.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 10 stycznia 2002.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Oblicz normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_F$ macierzy

$$A = \begin{bmatrix} (1,0) & (2,1) & (3,4) \\ (0,1) & (5,1) & (1,2) \end{bmatrix}.$$

2. Oszacuj wskaźnik uwarunkowania w normie $\|\cdot\|_\infty$ macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$, której współczynniki są dane wzorem

$$a_{ij} = \frac{1}{4^{|i-j|}}.$$

3. Def. Macierz Hessenberga jest to macierz kwadratowa $[a_{ij}]_{i,j}$, taka że $a_{ij} = 0$ dla $i - j > 1$.

Oblicz koszt (w jednostkach OPMS) rozwiązywania metodą eliminacji Gaussa układu równań liniowych $Ax = b$, z macierzą Hessenberga $n \times n$.

4. Skonstruuj i oszacuj zaburzenia współczynników a_0, \dots, a_n wielomianu $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, równoważne błędom zaokrągleń wytworzonym podczas obliczania wartości wielomianu dla ustalonego x , ze schematu Hornera:

$$a(x) = (\dots (a_nx + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

W obliczeniu tym jest użyta arytmetyka zmiennopozycyjna o ustalonym błędzie względnym reprezentacji v . Przyjmij założenie, że w obliczeniach nie wystąpił nadmiar ani niedomiar.

Czy na podstawie przeprowadzonych rachunków można powiedzieć, że algorytm ten jest numerycznie poprawny?

5. Znajdź (metodą eliminacji Gaussa) czynniki trójkątne macierzy układu równań liniowych

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix},$$

a następnie, korzystając ze znalezionych czynników, rozwiąż ten układ. Sprawdź wynik!

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 6 stycznia 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Wiedząc, że $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty$ oraz $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$, oszacuj na podstawie każdego z tych wzorów normę drugą macierzy

$$A = \begin{bmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,-2) \\ (1,-1) & (2,0) & (3,-4) \\ (0,2) & (3,4) & (5,0) \end{bmatrix}.$$

Które z tych dwóch oszacowań jest lepsze?

2. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź wynik. Napisz, czym jest zbiór rozwiązań tego układu.

3. Niech $V = \mathbb{R}[x]_3$ i niech $U = \{w \in V : w(0) = 0, w(-1) = -w(1), \int_{-1}^1 w(x) dx = 0\}$. Zbiór U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , a zatem istnieje przestrzeń ilorazowa V/U . Jaki jest jej wymiar? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka: Wybierz dowolną bazę przestrzeni V , zapisz warunki nałożone na elementy zbioru U w postaci układu równań liniowych i zbadaj ten układ.

4. Dla każdej z macierzy

$$A = [x, x(1-x), x^2], \quad B = [(1-x)^2, 2x(1-x), x^2],$$

sprawdź, czy reprezentuje ona bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to znajdź macierz odpowiedniej bazy dualnej.

Wskazówka: Możesz przyjąć za punkt wyjścia do konstrukcji macierz

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \text{taką że} \quad \Phi w = \begin{bmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ \frac{1}{2}w''(0) \end{bmatrix} \quad \text{dla każdego } w \in \mathbb{R}[x]_2.$$

Macierz ta reprezentuje bazę dualną do bazy potęgowej $[1, x, x^2]$.

5. Niech $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ będzie przekształceniem liniowym określonym za pomocą wzoru

$$(f(w))(x) = w(1-x).$$

Znajdź macierze tego przekształcenia

a) w bazie $[1, x, x^2]$,

b) w bazie $[(1-x)^2, 2x(1-x), x^2]$,

przy czym po znalezieniu jednej z tych macierzy drugą wyznacz na jej podstawie i na podstawie odpowiedniej macierzy zmiany bazy. Sprawdź wynik.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 5 stycznia 2004.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Oblicz normę p-tą indukowaną macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

dla $p = 1$ i $p = \infty$. Dla każdego z tych przypadków wskaż wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, taki że $\|\mathbf{x}\|_p = 1$ i $\|A\mathbf{x}\|_p = \|A\|_p$.

Czy (w jednym i drugim przypadku) istnieją dwa wektory liniowo niezależne spełniające ten warunek? Odpowiedź uzasadnij.

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź rozkład trójkątno-trójkątny macierzy A . Następnie, przy użyciu tego rozkładu znajdź zbiór rozwiązań układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Znajdź jądro i obraz macierzy A .

3. Funkcjonały liniowe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, dane wzorami

$$\varphi_0(w) = w(0), \quad \varphi_1(w) = w'(0), \quad \varphi_2(w) = \frac{1}{2}w''(0),$$

są elementami bazy sprzężonej z bazą potęgową $[1, x, x^2]$ przestrzeni $V = \mathbb{R}[x]_2$. Korzystając z tej informacji znajdź bazę sprzężoną z bazą $[(1-x)^2, 2x(1-x), x^2]$ przestrzeni V .

4. Warstwy W_1 i W_2 przestrzeni liniowej V o wymiarze n mają wymiary odpowiednio k i l (w ogólności różne). Zbadaj, czy zbiór

$$W = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in W_1, \mathbf{y} \in W_2\}$$

jest warstwą przestrzeni V i jeśli odpowiedź jest twierdząca, to znajdź (określony przez liczby l, m, n) zbiór wszystkich liczb, które mogą być wymiarem tej warstwy.

5. (W tym zadaniu należy rozwiązać tylko jeden, dowolnie wybrany wariant)

a) Podprzestrzeń liniowa X przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ jest zbiorem miejsc zerowych funkcjonału φ danego wzorem

$$\varphi(w) = w(-1) + w(1).$$

Znajdź dowolną bazę podprzestrzeni X .

b) Podprzestrzeń liniowa X przestrzeni \mathbb{R}^3 jest zbiorem miejsc zerowych funkcjonału φ danego wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 + x_3.$$

Znajdź dowolną bazę podprzestrzeni X .

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 10 stycznia 2005.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań bardzo duże znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 6 punktów.

1. Niech $\|\cdot\|$ oznacza ustaloną normę indukowaną w $\mathbb{K}^{n,n}$.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest to liczba $\text{cond } A \stackrel{\text{def}}{=} \|A\| \|A^{-1}\|$.

Udowodnij, że dla każdej macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ zachodzi nierówność $\text{cond } A \geq 1$.

Dla normy indukowanej przez dowolną p -tą normę Höldera podaj (możliwie najprostsze) przykłady macierzy B i C , dla których $\text{cond } B = 1$ oraz $\text{cond } C > 1$ (należy obliczyć te wskaźniki dla podanych macierzy).

2. Niech $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ oraz $Y = [x_1 + x_2 - 2x_4, x_2, x_3, x_4]$ będą bazami pewnej przestrzeni liniowej nad \mathbb{R} . Przekształceniu $f: V \rightarrow V$ w bazie X odpowiada macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 3 & 6 & -9 & -12 \\ 4 & -8 & -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Oblicz macierz B reprezentującą przekształcenie f w bazie Y .

3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 9 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 14 & 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Metodą eliminacji Gaussa znajdź czynniki trójkątne L, R rozkładu macierzy A i podaj jej rząd. Następnie korzystając z tych czynników znajdź zbiór rozwiązań układu równań liniowych $Ax = b$. Sprawdź wynik.

4. Niech $V = \mathbb{R}[x]_4$ i niech $U = \text{lin}\{x + x^3, x - x^3, x^3 - 4x\}$.

Znajdź dowolną bazę przestrzeni ilorazowej V/U .

Zbadaj, czy funkcja $f: V/U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f([a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4]) \stackrel{\text{def}}{=} |a_0 + a_2| + |a_2 + a_4| + |a_4 + a_0|$$

jest dobrze określona i jeśli tak, to czy jest normą.

5. Zbadaj, czy układ funkcjonałów liniowych $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ określonych wzorami

$$\varphi_1(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x) dx, \quad \varphi_2(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 xf(x) dx, \quad \varphi_3(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^2f(x) dx$$

jest bazą przestrzeni sprzężonej z $\mathbb{R}[x]_2$.

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 18 stycznia 2002.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).

Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. Niech T oznacza przestrzeń liniową nad ciałem \mathbb{R} , której bazą jest układ funkcji

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos 2x, \quad f_4(x) = \sin 2x.$$

Przekształcenia F_1 i $F_2: T \rightarrow T$ są określone wzorami

$$(F_1(g))(x) = g'(x), \quad (F_2(g))(x) = \int g(x) dx.$$

a) Skonstruuj macierze przekształceń F_1 i F_2 w bazie f_1, \dots, f_4 .

Podaj rząd każdej z tych macierzy.

Udowodnij tezę, że $F_1 = F_2^{-1}$, lub jej zaprzeczenie.

Wskazówka:

$$\left. \begin{array}{l} \int \sin x dx = -\cos x + a, \\ \int \cos x dx = \sin x + b \end{array} \right\} \quad (\text{należy przyjąć } a = b = 0).$$

b) Wskaż jądro i obraz przekształcenia $F = F_1 + F_2$.

c) Wskaż wszystkie podprzestrzenie przestrzeni T , w których przekształcenia

F_1 i F_2 są związane zależnością $F_1 = cF_2$ dla pewnych stałych c .

Czy przestrzeń T jest sumą prostą tych podprzestrzeni?

d) Wiedząc, że każdy funkcjonał liniowy φ w przestrzeni T można przedstawić

w postaci

$$\varphi(g) = \sum_{k=0}^5 w(x_k)g(x_k); \quad x_k = \frac{2k\pi}{6}, \quad k = 0, \dots, 5$$

dla pewnej funkcji $w \in T$, znajdź funkcje w_1, \dots, w_4 , które odpowiadają elementom $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ bazy dualnej do f_1, \dots, f_4 .

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -8 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź macierze P, L, R, Q , takie że $PAQ^T = LR$, przy czym P i Q są macierzami permutacji, macierz L jest trójkątna dolna z jedynkami na diagonalu, a macierz R jest trójkątna górna. Zastosuj w tym celu eliminację Gaussa z pełnym wyborem elementu głównego, wykonywanym tak, aby otrzymana macierz L miała pod diagonalą współczynniki o jak najmniejszych wartościach bezwzględnych.
- b) Wskaż jądro i obraz macierzy A , a następnie znajdź zbiór rozwiązań układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- c) Czy istnieje wektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$, taki że układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ jest sprzeczny? Odpowiedź uzasadnij w oparciu o stosowne twierdzenie.

3. Niech $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, gdzie α jest ustaloną liczbą wymierną. Oznaczmy macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Czy grupa (z działaniem mnożenia macierzy) generowana przez macierze A i B jest abelowa? Czy jest to grupa skończona? Odpowiedzi uzasadnij.
- b) Niech $C = ABA$. Oblicz wyznacznik macierzy C^{-1} .
- c) Udowodnij, że $\text{cond}_2 C = 1$.

Wskazówka: może w tym pomóc obliczenie macierzy $A^T A$.

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 12⁰⁰ 17 stycznia 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).
Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź macierze L, R, P , takie że $PA = LR$ oraz: L jest macierzą trójkątną dolną ze współczynnikami na diagonalu równymi 1, macierz R jest trójkątna górna a P jest macierzą permutacji dobraną tak, aby wartości bezwzględne współczynników macierzy L były nie większe niż 1. Sprawdź wynik.
- b) Korzystając z rozkładu macierzy A na czynniki znalezione w poprzednim punkcie rozwiąż układ równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sprawdź wynik.
- c) Oblicz wskaźnik uwarunkowania macierzy L w normie $\|\cdot\|_1$.

2. Niech $V = \text{lin}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gdzie $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^{2x}$, $f_4(x) = e^{-2x}$ (przestrzeń V jest czterowymiarowa).
Przekształcenie liniowe $g: V \rightarrow V$ jest określone wzorem $g(f) = f - f'$.

- a) Wyznacz macierz przekształcenia g w bazie $F = [f_1, f_2, f_3, f_4]$.
Określ wymiar i znajdź dowolną bazę obrazu przekształcenia g .
- b) Znajdź bazę przestrzeni ilorazowej $V/\ker g$.
- c) Niech $h_1 = f_1 + f_2$, $h_2 = f_1 - f_2$, $h_3 = f_3 + f_4$, $h_4 = f_3 - f_4$.
Znajdź macierz przejścia od bazy F do $H = [h_1, h_2, h_3, h_4]$ i za jej pomocą macierz przekształcenia g w bazie H .
- d) Czy układ funkcjonałów $\varphi_0, \dots, \varphi_3$, takich że dla każdego $f \in V$ $\varphi_0(f) = f(0)$, $\varphi_1(f) = f'(0)$, $\varphi_2(f) = f''(0)$ i $\varphi_3(f) = f'''(0)$ rozpina przestrzeń dualną do V ?
Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka: $(e^{ax})' = ae^{ax}$.

3. a) Macierz $(a_{ij})_{i,j}$ spełniająca warunek $a_{ij} = 0$ dla $i > j + 1$ nazywa się (górną) macierzą Hessenberga. Przykład takiej macierzy jest w zadaniu 1.

Oblicz koszt (w jednostkach OPMS) rozwiązywania metodą eliminacji Gaussa układu równań liniowych $Ax = b$, w którym macierz A jest nieosobliwą macierzą Hessenberga $n \times n$.

- b) Niech $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ i niech $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_p = 1$ (symbol \mathbb{K} oznacza ciało \mathbb{C} lub \mathbb{R}).

Czy znając normę (indukowaną przez normę p -tą) i wskaźnik uwarunkowania każdej z macierzy A i B można podać jakieś większe niż 0 dolne oszacowanie normy p -tej wektora ABx ?

Odpowiedź uzasadnij.

- c) Czy algorytm obliczania normy drugiej wektora $x \in \mathbb{R}^n$:

```
s := 0;
for i := 1 to n do
  s := s + x_i * x_i;
return sqrt(s);
```

jest odporny na nadmiar zmiennopozycyjny? Jeśli nie, to jak należałoby go zmienić?

Jeśli błąd względny wyniku obliczania pierwiastka kwadratowego w arytmetyce zmiennopozycyjnej (funkcja sqrt) jest nie większy niż $c\nu$ (gdzie c jest niewielką stałą, a $\nu = 2^{-t}$ — błędem reprezentacji) to czy algorytm podany wyżej jest numerycznie poprawny? Czy można wykazać numeryczną poprawność tego algorytmu ze stałą kumulacji danych równą 0?

Odpowiedź uzasadnij na podstawie przeprowadzonej analizy błędów zaokrągleń.

Egzamin poprawkowy z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 4 marca 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).

Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź macierze L, R, P , takie że $PA = LR$ oraz: L jest macierzą trójkątną dolną ze współczynnikami na diagonalu równymi 1, macierz R jest trójkątną górną a P jest macierzą permutacji dobraną tak, aby wartości bezwzględne współczynników macierzy L były nie większe niż 1. Sprawdź wynik.

Wskazówka: Spróbuj zgadnąć właściwe uporządkowanie wierszy macierzy A przed przystąpieniem do wyznaczania macierzy L i R .

- b) Korzystając z rozkładu macierzy A na czynniki znalezione w poprzednim punkcie rozwiąż układ równań liniowych $Ax = b$. Sprawdź wynik.
- c) Oblicz wskaźnik uwarunkowania macierzy L w normie $\|\cdot\|_\infty$.

2. Niech $V = \mathbb{R}[x]_2$. Przekształcenie liniowe $g: V \rightarrow V$ jest określone wzorem $g(f) = 2f - xf'$.

- a) Wyznacz macierz przekształcenia g w bazie $B = [(1-x)^2, 2x(1-x), x^2]$. Określ wymiar i znajdź dowolną bazę obrazu przekształcenia g .
- b) Znajdź macierz przejścia od bazy potęgowej $[1, x, x^2]$ do bazy B i za jej pomocą macierz przekształcenia g w bazie potęgowej.
- c) Znajdź bazę przestrzeni ilorazowej $V/\ker g$.
- d) Czy układ funkcjonałów $\varphi_0, \dots, \varphi_3$, takich że $\varphi_0(f) = f'(0)$, $\varphi_1(f) = f'(1)$, $\varphi_2(f) = f''(0)$, $\varphi_3(f) = f''(1)$ dla każdego $f \in V$ rozpina przestrzeń dualną do V ? Odpowiedź uzasadnij.

3. a) Macierz $(a_{ij})_{i,j}$ spełniająca warunek $a_{ij} = 0$ dla $|i - j| > 1$ nazywa się macierzą trójdziagonalną. Przykład takiej macierzy jest w zadaniu 1.
- Oblicz koszt (w jednostkach OPMS) rozwiązywania metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie układu równań liniowych $Ax = b$, w którym macierz A jest nieosobliwą macierzą trójdziagonalną $n \times n$. Czy w algorytmie bez wyboru elementu głównego wykonuje się taką samą liczbę działań zmiennopozycyjnych (mnożeń, dzieleni, dodawań i odejmowań)?
- b) Wartość w wyrażenia $a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$ jest obliczana za pomocą algorytmu, który realizuje wzór $((a_0x + a_1y)x + a_2y^2)x + a_3y^3$ przy użyciu mnożeń i dodawań zmiennopozycyjnych.
- Skonstruuj zaburzenia danych a_0, \dots, a_3 równoważne wytworzonym błędom zaokrągleń. Czy z postaci tych zaburzeń wynika, że algorytm ten jest numerycznie poprawny?
- c) Znajdź wyrażenia opisujące wskaźniki uwarunkowania zadania z poprzedniego punktu dla danych a_0, \dots, a_3 .

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 16 stycznia 2004.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).
Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. a) Funkcjonały φ_1 i φ_2 określone w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ (wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej stopnia co najwyżej 3) wzorami

$$\varphi_1(w) = w(0) + w(1), \quad \varphi_2(w) = w'(0) + w'(1)$$

rozpinają pewną podprzestrzeń X przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_3)^*$.

Oblicz wymiar i skonstruuj lub wskaż (z odpowiednim uzasadnieniem) dowolną bazę przestrzeni ilorazowej $(\mathbb{R}[x]_3)^*/X$.

- b) Niech X będzie ustaloną podprzestrzenią liniową przestrzeni V z określoną normą $\|\cdot\|$. Zbadaj (przeprowadzając stosowny dowód), czy funkcja f określona wzorem

$$f([x]) = \inf_{y \in [x]} \|y\|$$

jest normą w przestrzeni ilorazowej V/X .

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 32 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

- a) Rozwiąż układ równań liniowych $Ax = b$, dokonując rozkładu macierzy A na czynniki trójkątne za pomocą eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego. Sprawdź wynik.
- b) Rozwiąż ten sam układ równań dokonując pełnego wyboru (z przestawianiem wierszy i kolumn), tak aby minimalizować współczynniki otrzymanej macierzy trójkątnej dolnej.
- c) Oblicz wskaźniki uwarunkowania w normie pierwszej macierzy A oraz znalezionych w punkcie a) czynników trójkątnych jej rozkładu.

3. Niech $f: \mathbb{C}[x]_3 \rightarrow \mathbb{C}[x]_3$ będzie przekształceniem liniowym, takim że jeśli $z = f(w)$, to

$$z(1) = w(i), \quad z(i) = w(-i), \quad z(-1) = w(1), \quad z(-i) = w(-1).$$

- a) Znajdź macierz przekształcenia f w bazie sprzężonej z bazą przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_3)^*$ składającą się z funkcjonałów $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ określonych wzorami

$$\varphi_0(w) = w(1), \quad \varphi_1(w) = w(i), \quad \varphi_2(w) = w(-1), \quad \varphi_3(w) = w(-i).$$

- b) Znajdź macierz przekształcenia f w bazie potęgowej.

Uwaga: Jeśli zastosowany sposób rozwiązania zadania wymaga obliczenia odwrotności znalezionej wcześniej macierzy np. A , to wynik można przedstawić za pomocą odpowiedniego wzoru z symbolem A^{-1} .

- c) Czy istnieje liczba $n > 0$, taka że przekształcenie $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ jest tożsamościowe? Odpowiedź uzasadnij bez próby wyznaczenia n .

4. Liczba $x = a^4 - b^4$ ma być obliczona przy użyciu arytmetyki zmiennopozycyjnej.

- a) Oblicz wskaźniki uwarunkowania tego zadania ze względu na dane a, b . Dla jakich danych to zadanie jest źle uwarunkowane?
b) Zbadaj (poprzez skonstruowanie zaburzeń odpowiadających wytworzonym błędom zaokrągleń i oszacowanie stałych kumulacji), czy poniższe algorytmy są numerycznie poprawne.

Algorytm I:

$$x := ((a \cdot a + b \cdot b) \cdot (a + b)) \cdot (a - b);$$

Algorytm II:

$$a_2 := a \cdot a;$$

$$b_2 := b \cdot b;$$

$$x := (a_2 + b_2) \cdot (a_2 - b_2);$$

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 11⁰⁰ 22 stycznia 2005.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).
Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. a) Oblicz wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania liczby $x = a^2 - ab + b^2$ ze względu na daną a . Dla jakich danych zadanie to jest źle uwarunkowane?
b) Do rozwiązania zadania z punktu a) służy następujący algorytm, realizowany przy użyciu arytmetyki zmiennopozycyjnej o dokładności względnej ν :

$$c := a - b;$$

$$x := \frac{1}{2}(c \cdot c + (a \cdot a + b \cdot b)).$$

Znajdź wyrażenie, którego wartość będzie otrzymanym wynikiem, przy założeniu, że w żadnym z działań nie wystąpił nadmiar ani niedomiar oraz że mnożenie przez $\frac{1}{2}$ jest wykonywane dokładnie.

- c) Na podstawie wyników z punktu b) zbadaj, czy istnieje oszacowanie błędu względnego wyniku obliczonego przez algorytm podany w tym punkcie, niezależne od danych a, b .

2. Macierze $X = [1, x, x^2, x^3]$ i $Y = [1, 1 + x, 1 + x + \frac{1}{2}x^2, 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3]$ reprezentują bazy przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$.

- a) Wiedząc, że macierz $\Phi = [\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$, której elementy są funkcjonałami:

$$\varphi_0(w) = w(0), \quad \varphi_1(w) = w'(0), \quad \varphi_2(w) = \frac{1}{2}w''(0), \quad \varphi_3(w) = \frac{1}{6}w'''(0),$$

reprezentuje bazę sprzężoną z X , znajdź macierz Ψ bazy sprzężonej z bazą Y .

- b) Przekształcenie $f: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ jest określone wzorem

$$(f(w))(x) = xw'(x) - w(x).$$

Znajdź macierze tego przekształcenia w bazach X i Y .

Czy istnieje przekształcenie odwrotne do f ? Odpowiedź uzasadnij.

- c) Przekształcenie $g: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ jest określone wzorem

$$g(w) = w''.$$

Niech $V = \ker g$. Znajdź wymiar przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3/V$ i podaj jej dowolną bazę Z , oraz bazę sprzężoną z Z .

3. a) Współczynniki macierzy rzeczywistej $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

są podane w jednowymiarowych tablicach a , b , c , w taki sposób, że $a[i] = a_i$ itd. Napisz czytelnie procedurę o możliwie niskim koszcie (w Pascalu, same instrukcje), która przy założeniu, że macierz A jest diagonalnie dominująca, rozwiązuje układ równań liniowych $Ax = \mathbf{d}$ (współczynniki wektora prawej strony \mathbf{d} są dane w tablicy d).

Napisz, jaką rolę dla tej procedury odgrywa założenie, że macierz A jest diagonalnie dominująca.

b) Przyjmując, że koszt jednego dzielenia liczb jest równy 10PMS, oblicz (dokładnie) koszt wykonania procedury napisanej w punkcie a) w zależności od n .

c) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 16 & & 16 \\ 16 & 68 & 16 & \\ & 16 & 68 & 15 \\ & & 16 & 68 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 64 \\ -52 \\ -1 \\ 68 \end{bmatrix},$$

przy czym niezaznaczone współczynniki są równe 0.

Znajdź czynniki L , R rozkładu trójkątno-trójkątnego rozkładu macierzy A i użyj ich do rozwiązania układu $Ax = \mathbf{b}$. Sprawdź wynik.

d) Oblicz wskaźnik uwarunkowania w normie $\|\cdot\|_1$ macierzy trójkątnej dolnej L otrzymanej podczas rozwiązywania punktu c).

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 16⁰⁰ 21 marca 2002.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. Znajdź macierz A i wektor \mathbf{b} , takie że $f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + \mathbf{b}$, jeśli przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia warunki

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Czy przekształcenie f jest podobieństwem afinicznym? Odpowiedź uzasadnij.

2. Sprawdź, czy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określona, na dwa sposoby, a mianowicie

- przez sprowadzenie do postaci kanonicznej,
- na podstawie kryterium Sylwestra.

3. Zapisz wielomian

$$p(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 4xy + 8xz - 12yz - 12x + 18y - 35z + 26$$

w postaci macierzowej, a następnie dokonaj zamiany zmiennych x , y , z na zmienne x' , y' , z' , takie że

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Czy zbiór miejsc zerowych wielomianu p ma środek symetrii? Odpowiedź uzasadnij.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 12⁰⁰ 21 marca 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. Niech $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^2$ i niech para wektorów $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ będzie liniowo niezależna dla każdego $i \in \{0, \dots, k\}$. Przypuśćmy, że

$$\mathbf{x}_0 = a_k \mathbf{x}_k + b_k \mathbf{y}_k,$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = a_i \mathbf{x}_i + b_i \mathbf{y}_i \quad \text{dla } i \in \{0, \dots, k-1\},$$

$$\mathbf{x}_i = c_i \mathbf{x}_{i+1} - d_i \mathbf{y}_{i+1} \quad \text{dla } i \in \{0, \dots, k-1\},$$

$$\mathbf{x}_k = c_k \mathbf{x}_0 - d_k \mathbf{y}_0.$$

Udowodnij, że

$$\prod_{i=0}^k b_i = \prod_{i=0}^k d_i.$$

Wskazówka: Zastosuj wzory Cramera.

2. a) Niech

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź (jeśli istnieje) przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, takie że $f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$ dla $i = 0, 1, 2$.

- b) Udowodnij, że jeśli punkt \mathbf{p}_n jest kombinacją afiniczną punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{n-1}$, to istnieje $k \in \{0, \dots, n-1\}$, takie że punkt \mathbf{p}_k jest kombinacją afiniczną punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n$.

Czy w takim przypadku każdy z punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ jest kombinacją afiniczną pozostałych? Odpowiedź uzasadnij.

3. Niech

$$p(x, y, z) = 4x^2 + 4xy + 5y^2 + 4yz + z^2 - 1.$$

Zapisz wielomian p w postaci macierzowej, a następnie sprowadź równanie $p(x, y, z) = 0$ do postaci kanonicznej i podaj nazwę zbioru rozwiązań tego równania w \mathbb{R}^3 .

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 12⁰⁰ 2 kwietnia 2004.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. a) Zapisz równanie

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz + 2x + 4y + 6z = 0$$

w postaci macierzowej. Znajdź zbiór środków symetrii jego zbioru rozwiązań.

- b) Zidentyfikuj (tj. podaj nazwę) zbioru rozwiązań tego równania.

Czy jest to możliwe bez przekształcenia równania do postaci kanonicznej?

Odpowiedź uzasadnij.

2. a) Macierz $A = A^H = LR$ jest iloczynem macierzy trójkątnej dolnej L z jedynekami na diagonalu i macierzy trójkątnej górnej R . Udowodnij (powołując się na twierdzenie Sylwestra), że macierz A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczynniki na diagonalu macierzy R są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

- b) Korzystając z powyższego stwierdzenia zbadaj, czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

jest ujemnie określona.

3. Niech

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź współrzędne barycentryczne punktu \mathbf{p} w układzie określonym przez punkty $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

- b) Znajdź reprezentację przekształcenia afinicznego f , takiego że $f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_1$, $f(\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2$ i $f(\mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_0$. Czy przekształcenie to jest różnowartościowe? Odpowiedź uzasadnij.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14¹⁵ 22 marca 2005.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. a) Forma kwadratowa Φ w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ jest zdefiniowana wzorem

$$\Phi(f) = \int_{-1}^1 f(x)f(-x)\rho(x) dx,$$

w którym ρ oznacza pewną ustaloną funkcję ciągłą. Korzystając z formuły polaryzacyjnej znajdź wzór opisujący formę dwuliniową φ , taką że dla każdego $f \in \mathbb{R}[x]_2$ zachodzi równość $\Phi(f) = \varphi(f, f)$.

b) Przy założeniu, że forma Φ jest określona w sposób podany w punkcie a) przy użyciu funkcji $\rho(x) = x$, znajdź macierz tej formy w bazie potęgowej. Czy forma Φ jest określona i jeśli tak, to w jaki sposób? Odpowiedź uzasadnij.

2. a) Podane niżej punkty

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

są oznaczone odpowiednio symbolami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.
Znajdź macierz $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ i wektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, takie że przekształcenie afiniczne f określone wzorem $f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + \mathbf{t}$ przekształca punkt \mathbf{p}_i na \mathbf{q}_i dla $i = 0, \dots, 3$.

b) Posługując się metodą eliminacji Gaussa oblicz wyznacznik macierzy A . Czy znając wartość tego wyznacznika można stwierdzić, czy przekształcenie f jest różnowartościowe? Odpowiedź uzasadnij.

3. Niech $p(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 4yz + 2x - 2y + 2z$.

Zapisz równanie $p(x, y, z) = 0$ w postaci macierzowej.

Następnie znajdź postać afiniczną kanoniczną tego równania i podaj nazwę zbioru rozwiązań tego równania w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 16⁰⁰ 9 maja 2002.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. Podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^3$ jest zbiorem wektorów $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, których współrzędne spełniają równanie $2x - 2y + z = 0$.

Niech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Znajdź obraz wektora \mathbf{x}

- a) w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń V ,
b) w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń prostopadłą do V ,
c) w odbiciu symetrycznym względem podprzestrzeni V ,
d) w odbiciu symetrycznym względem podprzestrzeni prostopadłej do V .

2. Znajdź bazę ortogonalną w sensie iloczynu skalarnego

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$, stosując procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta i przyjmując za punkt wyjścia bazę $\{x^3, x^2, x, 1\}$, uporządkowaną właśnie w ten sposób.

3. Metodą odbić Householdera dokonaj rozkładu ortogonalno-trójkątnego macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 0 \\ -1 & -15 \\ -1 & -27 \end{bmatrix},$$

przy czym macierz ortogonalną, która jest czynnikiem w tym rozkładzie przedstaw tylko za pomocą wektorów normalnych hiperpłaszczyzn odbić. Następnie rozwiąż liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla układu równań

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ w którym } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -21 \\ -29 \\ 19 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 12⁰⁰ 9 maja 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. Wzór

$$\varphi(f, g) = \sum_{k=-1}^2 kf(k)g(k)$$

określa formę dwuliniową φ w przestrzeni a) $\mathbb{R}[x]_0$, b) $\mathbb{R}[x]_1$, c) $\mathbb{R}[x]_2$.

Sprawdź, dla każdej z tych przestrzeni, czy to jest iloczyn skalarny.

Wskazówka: Do znalezienia odpowiedzi użyj kryterium Sylwestra.

2. a) Metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta znajdź macierze Q i R, takie że

$$QR = A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

a ponadto kolumny macierzy Q są do siebie prostopadłe (w sensie iloczynu skalarnego $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$), zaś macierz R jest trójkątna górna, o współczynnikach diagonalnych równych 1. Sprawdź otrzymany wynik.

b) Na podstawie której macierzy, Q czy R, spełniających warunki podane w punkcie a), nie znając macierzy A i drugiego czynnika jej rozkładu, można by obliczyć objętość równoległościanu, którego krawędzie mają kierunki i długości wektorów — kolumn macierzy A? W jaki sposób można to zrobić? Odpowiedź uzasadnij.

3. Przekształć za pomocą odbić Householdera układ równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

w taki sposób, aby otrzymać układ z macierzą trójkątną, który ma to samo rozwiązanie liniowego zadania najmniejszych kwadratów.

Zapisz wektory reprezentujące zastosowane odbicia. Następnie rozwiąż to zadanie i oblicz normę residuum układu dla znalezionej rozwiązania.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 12⁰⁰ 7 maja 2004.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. Iloczyn skalarny w przestrzeni \mathbb{R}^3 dany jest wzorem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$. Niech

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź obraz wektora \mathbf{v}_1 w odbiciu symetrycznym względem podprzestrzeni rozpiętej przez wektory \mathbf{v}_2 i \mathbf{v}_3 .
- b) Niech dla $k > 3$ \mathbf{v}_k oznacza obraz wektora \mathbf{v}_{k-3} w odbiciu symetrycznym względem podprzestrzeni rozpiętej przez wektory \mathbf{v}_{k-2} i \mathbf{v}_{k-1} . Oblicz objętość równoległościanu

$$\{t_1 \mathbf{v}_{10} + t_2 \mathbf{v}_{11} + t_3 \mathbf{v}_{12} : t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]\}.$$

Podaj uzasadnienie użytego sposobu rozwiązania.

2. Niech V oznacza przestrzeń $\text{lin}\{x, x^2, x^3\}$ z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

- a) Metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta znajdź bazę ortogonalną przestrzeni V.
- b) Znajdź obraz wielomianu x^3 w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń $\text{lin}\{x, x^2\}$.

3. Poniższa tabela zawiera wyniki pomiarów wartości pewnej funkcji:

x	-2	-1	1	2
f(x)	-7	5	2	14

Znajdź współczynniki a_0, a_1 wielomianu $w(x) = a_0 + a_1(x^2 - 4)$, który najlepiej (w sensie najmniejszych kwadratów) pasuje do tych danych. Odpowiednie liniowe zadanie najmniejszych kwadratów rozwiąż metodą odbić Householdera.

Wskazówka: W utworzonym układzie równań zachowaj kolejność punktów pomiarowych.

Kolokwium z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 10 maja 2005.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania rozwiązań zasadnicze znaczenie będzie miał staranny komentarz do wszystkich wykonanych rachunków. Za każde zadanie można dostać od 0 do 10 punktów.

1. Niech

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oblicz objętość czworościanu $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}$, oraz sumę pól jego ścian, przy założeniu, że iloczyn skalarny dany jest wzorem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$.

2. Iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ dany jest wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Niech $f_0(x) = (1-x)^2$, $f_1(x) = x(1-x)$, $f_2(x) = x^2$.

a) Znajdź bazę ortogonalną, stosując procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta do bazy $[f_0, f_1, f_2]$.

b) Znajdź obrazy wektora (wielomianu) f_2 w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń $\text{lin}\{f_0, f_1\}$ oraz w odbiciu symetrycznym względem tej podprzestrzeni.

Wskazówka: $\int_0^1 x^n(1-x)^k dx = \frac{n!k!}{(n+k+1)!}$.

3. Przestrzeń V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni U i W . Udowodnij, że jeśli funkcje $\varphi: U \times U \rightarrow \mathbb{K}$ oraz $\psi: W \times W \rightarrow \mathbb{K}$ są iloczynami skalarnymi w odpowiednich podprzestrzeniach, to funkcja $\theta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ określona wzorem

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W \quad \theta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \psi(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni V .

Czy zamiast założenia, że V jest sumą prostą podprzestrzeni U i W można przyjąć, że przestrzeń V jest sumą algebraiczną tych podprzestrzeni? Odpowiedź uzasadnij.

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 8³⁰ 5 czerwca 2002.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia). Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^4$, który jest zbiorem wszystkich kombinacji afinicznych punktów

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

jest podprzestrzenią afiniczną.

- Znajdź wymiar i bazę afiniczną tej podprzestrzeni.
- Zbadaj, czy zbiór wszystkich kombinacji wypukłych punktów $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ jest sympleksem.

Wskazówka: Możesz zbadać, czy istnieje baza afiniczna złożona z niektórych spośród podanych punktów, taka że wszystkie pozostałe punkty są kombinacjami wypukłymi elementów tej bazy.

Uzasadnij poprawność użytej metody rozwiązania.

- Przy założeniu, że długość wektora swobodnego jest równa jego normie drugiej,

oblicz odległość punktu $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ od podprzestrzeni A .

2. W przestrzeni $V = \text{lin}\{1, x, x^2, \frac{1}{x^3}\}$ przyjmujemy iloczyn skalarny określony wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_1^2 f(x)g(x) dx.$$

- Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni $U = \text{lin}\{1, \frac{1}{x^3}\} \subset V$.
- Wyznacz obraz p funkcji $f: f(x) = x^2$ w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń U .
- Oblicz kąt niezorientowany między wektorami (funkcjami) f i p z poprzedniego punktu.

3. Niech

$$w(x, y, z) = 12y^2 + 15z^2 + 24xy - 12xz - 36yz + 9.$$

- a) Znajdź macierz A , wektor \mathbf{b} i liczbę c , takie że $w(x, y, z) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{v} + c$, gdzie $\mathbf{v} = [x, y, z]^T$.

Zapisz równanie $w(x, y, z) = 0$ w macierzowej postaci jednorodnej.

- b) Wiedząc, że jedną z podprzestrzeni własnych macierzy A jest $\text{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$,

znajdź pozostałe podprzestrzenie własne i wszystkie wartości własne macierzy A .

- c) Znajdź kanoniczną postać izometryczną równania $w(x, y, z) = 0$.

Podaj nazwę powierzchni, która jest zbiorem rozwiązań tego równania.

Podaj postać kanoniczną równania $w(x, y, z) = 0$, przy założeniu, że dowolne kongruencje (nie tylko izometryczne) są dopuszczalne w przejściu do tej postaci.

- d) Sprawdź, czy forma kwadratowa $\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v}$ jest określona (dodatnio, nieujemnie, niedodatnio lub ujemnie) i opisz, czym jest zbiór wektorów izotropowych tej formy.

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 9⁰⁰ 26 maja 2003.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).

Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. a) Niech

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Przypuśćmy, że punkt \mathbf{q}_1 ma w układzie odniesienia punktów $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ współrzędne barycentryczne $1, 1, -1$, a punkt \mathbf{q}_2 ma współrzędne barycentryczne $-1, 0, 2$.

Przy założeniu, że iloczyn skalarny jest określony wzorem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ oblicz długość odcinka $\overline{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}$.

- b) Przypuśćmy, że punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ są w położeniu ogólnym. Udowodnij, że przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest izometrią (w sensie metryki określonej przez normę drugą) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i, j \in \{0, \dots, n\}$ zachodzi równość $\|f(\mathbf{p}_i) - f(\mathbf{p}_j)\|_2 = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_2$. Możesz przyjąć założenie upraszczające (w ogólności zbędne), że wektory $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ są parami prostopadłe.

2. a) Baza przestrzeni rzeczywistej V składa się z wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. O formie kwadratowej Φ w tej przestrzeni wiadomo, że $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{z}) = 1$, $\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = 4$, $\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = 2$.

Zbadaj, czy forma ta jest dodatnio określona.

- b) Znajdź zbiór wszystkich wektorów izotropowych formy kwadratowej w \mathbb{R}^3 , której macierz (w bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) jest równa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Rozpatrujemy przestrzeń $V = \mathbb{R}[x]_3$ z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

- a) Wiedząc, że wielomiany $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ są parami prostopadłe oblicz współczynniki funkcji f , która jest obrazem funkcji x^3 w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń $\mathbb{R}[x]_2$ przestrzeni V .
- b) Oblicz odległość funkcji x^3 od podprzestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.
- c) Oblicz miarę kąta między funkcją x^3 i jej obrazem w rzucie rozpatrywanym w punkcie a).

Czy miara kąta między dowolnym wektorem x i jego obrazem w rzucie prostopadłym na dowolną podprzestrzeń może być większa niż $\frac{\pi}{2}$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Niech $w(x, y, z) = 5x^2 + 36y^2 + 29z^2 - 24yz - 5$.

- a) Zapisz równanie $w(x, y, z) = 0$ w postaci macierzowej i w jednorodnej postaci macierzowej.
- b) Znajdź wszystkie wartości własne i wektory własne macierzy formy kwadratowej występującej w macierzowym zapisie powyższego równania.
- c) Korzystając z wyników otrzymanych w punkcie poprzednim sprowadź to równanie do postaci izometrycznej kanonicznej i napisz, czym jest zbiór jego rozwiązań w \mathbb{R}^3 .

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14³⁰ 28 maja 2004.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia).
Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. Niech

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- a) Oblicz objętość czworościanu, którego wierzchołkami są punkty $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$.
- b) Oblicz odległość punktu \mathbf{p}_0 od płaszczyzny, w której leżą punkty $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ (tj. odległość punktu \mathbf{p}_0 od położonego najbliżej niego punktu tej płaszczyzny).
- c) Oblicz odległość punktu \mathbf{p}_0 od prostej, na której leżą punkty $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź wszystkie wartości własne tej macierzy oraz ich krotności algebraiczne i geometryczne.
- b) Znajdź podprzestrzenie własne macierzy A (tj. wyznacz dowolne bazy tych podprzestrzeni).

3. Niech¹

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^3 xf(x)g(x) dx.$$

- a) W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_1$ forma dwuliniowa φ jest iloczynem skalarnym. Oblicz cosinus kąta między wektorami 1 i x w sensie tego iloczynu.
- b) Zbadaj, czy w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ forma φ jest iloczynem skalarnym.

¹W zadaniu przedstawionym na egzaminie 28 maja 2004 górna granica całkowania była równa 2, przez co pierwszy punkt zadania zawierał nieprawdziwe stwierdzenie (jakie?).

4. Niech

$$w(x, y, z) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 + z^2 - 4.$$

- Przedstaw równanie $w(x, y, z) = 0$ w postaci macierzowej, a następnie sprowadź je do postaci izometrycznej kanonicznej i podaj nazwę zbioru rozwiązań.
- Oblicz wskaźnik uwarunkowania w normie drugiej macierzy występującej w macierzowej postaci równania $w(x, y, z) = 0$.
- Oszacuj (z góry) wskaźnik uwarunkowania w normie drugiej tej macierzy na podstawie twierdzenia Gerszgorina. Spełnienie jakiego warunku przez macierz umożliwia szacowanie wskaźnika uwarunkowania na podstawie tego twierdzenia?

Egzamin z algebry liniowej, I rok Inf.

(Ścisłe tajne przed godz. 14⁰⁰ 30 maja 2005.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Podczas oceniania *nie mniej ważne niż rachunki* będą poprawne uzasadnienia wszystkich odpowiedzi (z powołaniem się na właściwe twierdzenia). Za każdy podpunkt można otrzymać od 0 do 10 punktów.

1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- Metodą odbić Householdera dokonaj rozkładu ortogonalno-trójkątnego macierzy A , przedstawiając czynnik ortogonalny za pomocą wektorów normalnych hiperpłaszczyzn kolejnych odbić.
 - Rozwiąż liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za pomocą wyników z punktu a), a następnie oblicz normę drugą wektora residuum.
 - Napisz układ równań normalnych dla liniowego zadania najmniejszych kwadratów związanego z układem równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Wyjaśnij (tj. sformułuj odpowiednie twierdzenie) związek układu równań normalnych z liniowym zadaniem najmniejszych kwadratów w ogólnym przypadku.
2. a) Punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ w n -wymiarowej przestrzeni afinicznej euklidesowej są w położeniu ogólnym. Podaj (z uzasadnieniem) sposób obliczenia odległości punktu \mathbf{q} tej przestrzeni od podprzestrzeni, której bazą jest zbiór punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$.
- Podaj wzory umożliwiające obliczanie współczynników dowolnego wektora \mathbf{y} w przestrzeni liniowej euklidesowej V w bazie $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ (przy założeniu, że baza sprzężona z X nie jest znana), jeśli baza X jest
 - dowolna,
 - ortogonalna,
 - ortonormalna.
 - Udowodnij, że jeśli zbiór wektorów izotropowych formy kwadratowej Φ jest podprzestrzenią liniową, to forma ta jest nieujemnie lub niedodatnio określona.
- Wskazówka. Powołaj się na twierdzenie Sylwestra.

3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Narysuj koła Gerszgorina macierzy A .
- b) Znajdź wszystkie wartości własne macierzy A i zbadaj ich krotności algebraiczne i geometryczne.
- c) Znajdź bazę przestrzeni własnej macierzy A , przynależnej do wartości własnej o najmniejszej wartości bezwzględnej.
- d) Podaj z uzasadnieniem odpowiedzi na pytania:
 - Czy macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej?
 - Czy istnieje baza ortogonalna (w sensie iloczynu skalarnego $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}^T \mathbf{x}$) przestrzeni \mathbb{R}^5 złożona z wektorów własnych macierzy A ?
 - Czy istnieje taki iloczyn skalarny w \mathbb{R}^5 , że istnieje baza ortogonalna przestrzeni \mathbb{R}^5 w sensie tego iloczynu złożona z wektorów własnych macierzy A ?

Działania

Def. Funkcję $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X$ nazywamy działaniem n-argumentowym.

Def. Działaniem wewnętrznym n-argumentowym w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję

$$f: \underbrace{X \times \dots \times X}_n \rightarrow X.$$

Zbiory X_1, \dots, X_n, X w definicji działania mogą być różne, ale nie muszą. Tak więc działanie wewnętrzne jest to szczególny przypadek działania w sensie tej ogólniejszej definicji, dla $X_1 = \dots = X_n = X$. Słowo „działanie” bywa też stosowane (niezbyt ściśle) na określenie funkcji nie objętych tymi definicjami.

Przykład: Dzielenie liczb *nie jest* działaniem w zbiorze liczb całkowitych dodatnich, \mathbb{Z}_+ , bo nie dla każdej pary takich liczb istnieje liczba całkowita dodatnia, która jest ich ilorazem. Dlatego poprawniej byłoby mówić o „operacji” odwrotnej do mnożenia.

Dzielenie nie jest też działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb wymiernych \mathbb{Q} , bo nie możemy dzielić przez 0. Jest to jednak działanie $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Notacja: Można pisać $f(x_1, \dots, x_n)$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\sin x$, \sqrt{x} itd. Sposób zapisu jest kwestią wygody.

Równości i równania

Wyrażeniem nazywamy dowolny symbol obiektu (elementu ustalonego zbioru albo zmiennej) lub poprawny (tj. zgodny z definicjami działań) opis obiektu za pomocą innych wyrażeń i działań na nich. Jeśli w wyrażeniu nie występują zmienne, to mamy jednoznacznie określoną wartość wyrażenia, czyli element odpowiedniego zbioru. W przeciwnym razie wyrażenie opisuje nam pewną funkcję — podstawiając w miejsce wszystkich zmiennych konkretne obiekty (argumenty) otrzymamy wyrażenie, które opisuje jeden konkretny obiekt (będący wartością funkcji). Z każdą zmienną jest związany zbiór (jeden ze zbiorów X_1, \dots, X_n), którego elementy wolno podstawiać w jej miejsce.

Dwa wyrażenia mogą opisywać ten sam obiekt lub różne obiekty. Zdanie „wyrażenie₁ = wyrażenie₂” oznacza stwierdzenie, że wartością obu wyrażeń jest ten sam obiekt. Takie zdanie nazywamy równością wyrażeń.

Uwaga: Nie należy mieszać symbolu równości, „=”, z symbolem równości przybliżonej, „ \approx ”, który oznacza, że wartości wyrażeń różnią się dostatecznie mało (cokolwiek to znaczy). Pierwszy symbol należy do algebry, a drugi do analizy. Do algebry należy natomiast symbol nierówności „ \neq ”.

Jeśli wyrażenia zawierają zmienne, to ich równość jest stwierdzeniem, że niezależnie od tego, jakie obiekty podstawimy w miejsce zmiennych (można też mówić „jakie wartości nadamy zmiennym”), oba wyrażenia będą opisywać ten sam obiekt. Równością tego typu jest np. zdanie

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}.$$

Jeśli natomiast mamy za zadanie znalezienie obiektów, które podstawione w miejsce zmiennych dadzą nam zdanie prawdziwe (np. „znajdź wszystkie liczby x , takie że $x^2 + 1 = 0$ ”), to mówimy o równaniu. Zbiór rozwiązań równania (czyli obiektów, które podstawivszy otrzymamy zdanie prawdziwe stwierdzające równość otrzymanych wyrażeń) może być pusty i wtedy mówimy, że jest ono sprzeczne (cokolwiek podstawimy w miejsce zmiennych, zdanie stwierdzające równość wyrażeń będzie fałszywe), ale uwaga: sprzeczność równania zależy od zbioru, w którym szukamy rozwiązań. Zbiór liczb dodatnich x spełniających równanie $x + 1 = 0$ jest pusty, ale w zbiorze liczb całkowitych rozwiązanie istnieje.

Struktury algebraiczne

Def. Struktura algebraiczna jest to pewien układ zbiorów X_1, \dots, X_k , w których są określone pewne działania f_1, \dots, f_m ($f_j: X_{j_1} \times \dots \times X_{j_l} \rightarrow X_{j_{l+1}}$) oraz wyróżnione pewne elementy tych zbiorów.

W szczególności struktura algebraiczna może być jednym zbiorem X , w którym są określone pewne działania f_1, \dots, f_m i wyróżnione pewne elementy $x_1, \dots, x_k \in X$.

Konkretną klasę struktur algebraicznych (np. grupy, ciała) definiuje się podając odpowiednie aksjomaty opisujące warunki spełnione przez działania.

Na podstawie aksjomatów można dowodzić twierdzenia orzekające o każdej takiej strukturze.

Mając konkretny układ zbiorów z działaniami możemy sprawdzić, czy są spełnione aksjomaty (i w szczególności, czy istnieją opisane przez nie elementy wyróżnione). Jeśli to się uda, to możemy do tego zbioru z działaniami stosować wszystkie twierdzenia, które pasują.

Grupy

Def. Grupa nazywamy niepusty zbiór X , w którym jest określone działanie dwuargumentowe „ \diamond ” i element wyróżniony e , takie że

G.1: Działanie „ \diamond ” jest łączne, tj.

$$\forall_{x,y,z \in X} (x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$$

Możemy więc pisać $x \diamond y \diamond z$, co pozostaje jednoznaczne.

G.2: Element e jest neutralnym elementem działania „ \diamond ”:

$$\forall_{x \in X} e \diamond x = x \diamond e = x.$$

G.3: Dla każdego $x \in X$ istnieje element prawostronnie odwrotny (albo przeciwny):

$$\forall_{x \in X} \exists_{y \in X} x \diamond y = e.$$

Jeśli dotatkowo spełniony jest warunek

G.4: $\forall_{x,y \in X} x \diamond y = y \diamond x$, czyli działanie „ \diamond ” jest przemienne,

to grupa (X, \diamond, e) nazywa się grupą abelową.

Twierdzenie: Element prawostronnie odwrotny x' dowolnego elementu x w grupie jest tylko jeden. Element ten jest także elementem lewostronnie odwrotnym elementu x .

Dowód: Niech $x \in X$. Na mocy G.3 istnieją $y, z \in X$, takie że $x \diamond y = y \diamond z = e$.

Wtedy

$$\begin{array}{ccccccc} z = e \diamond z = (x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) = x \diamond e = x. & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ \text{G.2} & \text{G.3} & \text{G.1} & \text{G.3} & \text{G.2} & & \end{array}$$

Możemy więc mówić o elemencie odwrotnym do x , bez precyzowania strony.

Twierdzenie (prawostronne prawo skreślenia): Jeśli zbiór X z działaniem „ \diamond ” jest grupą, to

$$\forall_{x,y,z \in X} (x \diamond z = y \diamond z) \Rightarrow (x = y).$$

Dowód: Załóżmy, że $x \diamond z = y \diamond z$. Oznaczmy element odwrotny do z symbolem z' . Wtedy

$$\begin{array}{ccccccccccc} x = x \diamond e = x \diamond (z \diamond z') = (x \diamond z) \diamond z' = (y \diamond z) \diamond z' = y \diamond (z \diamond z') = y \diamond e = y. & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{G.2} & \text{G.3} & \text{G.1} & \text{założenie} & \text{G.1} & \text{G.3} & \text{G.2} & & & & \end{array}$$

Łatwo jest też dowieść lewostronnego prawa skreślenia,

$$\forall_{x,y,z \in X} (x \diamond y = x \diamond z) \Rightarrow (y = z),$$

ale tymczasem się powstrzymamy.

Uwaga: Dla tej samej klasy struktur algebraicznych można przyjmować różne układy aksjomatów. Na przykład mogliśmy sformułować G.3 w bardziej symetryczny sposób:

G.3': $\forall_{x \in X} \exists_{y \in X} x \diamond y = y \diamond x = e$.

Wszystko zależy od tego, kto to robi i w jakim celu (można dążyć do symetrii, albo poszukiwać najsłabszych warunków, z których wynika cała reszta).

O działaniu w grupie najczęściej myślimy jak o mnożeniu (mówimy wtedy: grupa multiplikatywna) i piszemy $a \cdot b$ lub ab zamiast $a \diamond b$. Element odwrotny do x oznaczamy wtedy symbolem x^{-1} , co pasuje do notacji potęgowej:

$$\underbrace{x \cdots x}_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} x^n \quad (\text{w szczególności } x^0 = e.)$$

Możemy też uznać działanie za dodawanie (wtedy jest grupa addytywna — piszemy $a + b$). Element przeciwny (czyli odwrotny w poprzedniej terminologii) do x oznaczamy symbolem $-x$. Mamy wtedy też notację mnożenia elementu przez liczbę całkowitą

$$\underbrace{x + \cdots + x}_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} n \cdot x \quad (\text{w szczególności } 0 \cdot x = e.)$$

Przykłady grup:

- Zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} , z działaniem „+” (dodawaniem) i elementem neutralnym 0.
- Zbiór różnych od 0 liczb rzeczywistych, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, z działaniem „ \cdot ” (mnożeniem) i elementem neutralnym 1.

- Zbiór obrotów płaszczyzny wokół ustalonego punktu, o wielokrotności ustalonego kąta α . Działaniem jest *złożenie obrotów*, a elementem neutralnym obrót o kąt 0.
- Zbiór permutacji; permutacją zbioru n-elementowego nazywamy dowolną funkcję różnowartościową, której dziedziną i zbiorem wartości jest zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$. Działaniem w tej grupie jest złożenie funkcji, a elementem neutralnym jest funkcja identycznościowa. Grupę tę oznaczamy symbolem S_n .

Półgrupy

Def. Półgrupą nazywamy zbiór X , w którym jest określone działanie dwuargumentowe „ \diamond ”, które jest łączne (zobacz aksjomat G.1).

Przykłady półgrup:

- Każda grupa jest półgrupą.
- Zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ z działaniem mnożenia.
- Zbiór napisów, czyli skończonych ciągów symboli ustalonego alfabetu $V = \{a_1, \dots, a_n\}$. Półgrupę otrzymamy przyjmując za działanie konkatenację, tj. połączenie dwóch napisów w jeden. W półgrupie tej mamy element neutralny — napis pusty.

Pierścienie

Def. Pierścieniem nazywamy zbiór X , w którym są określone dwa działania: dodawanie („+”) i mnożenie („ \cdot ”), spełniające następujące warunki:

P.1: Zbiór X z działaniem dodawania jest grupą abelową (jej element neutralny oznaczamy symbolem „0”, czyli zero).

P.2: Zbiór X z działaniem mnożenia jest półgrupą.

Element neutralny tej półgrupy, *jeśli istnieje*, nazywamy jedynką i oznaczamy symbolem „1”. Mamy wtedy pierścień z jedynką.

P.3: Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:

$$\forall_{a,b,c \in X} (a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Twierdzenie: Jeśli $(X, +, \cdot, 0)$ jest pierścieniem, to $\forall_{a \in X} a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$.

Dowód: $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

Na podstawie lewostronnego prawa skreślenia $0 = a \cdot 0$.

Dowód, że $0 \cdot a = 0$ jest podobny. \square

Przykłady pierścieni:

- Zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} , ze „zwykłym” dodawaniem i mnożeniem, oraz elementami wyróżnionymi — liczbami 0 i 1.
- Zbiór $\mathbb{R}[x]$ wielomianów jednej zmiennej (oznaczonej symbolem x). Element neutralny dodawania to wielomian zerowy.

Ciała

Def. Ciałem nazywamy zbiór X z dwoma działaniami (dodawaniem i mnożeniem), taki że

C.1: Zbiór X z działaniem dodawania jest grupą abelową (element neutralny — 0),

C.2: Zbiór $X \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia jest grupą (element neutralny — 1),

C.3: Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania (zobacz aksjomat P.3).

Jak widać, każde ciało ma co najmniej dwa elementy, 0 i 1, i jest pierścieniem z jedynką (uwaga: w pierścieniu jest możliwe $0 = 1$; w ciele jest to wykluczone). Jeśli grupa multiplikatywna ciała jest abelowa, to mamy ciało przemienne, a w przeciwnym razie ciało nieprzemienne (w tym wykładzie nie będzie o nich mowy).

Przykłady ciał:

- Zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} , rzeczywistych \mathbb{R} , albo zespolonych \mathbb{C} .
- Zbiór funkcji wymiernych; mają one postać $f(x) = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}$, gdzie w_1 i w_2 to wielomiany zmiennej x .

Podstruktury

Def. Niech (X, \diamond, e) będzie grupą. Zbiór $A \subset X$, taki że $e \in A$ oraz (A, \diamond, e) jest grupą, nazywamy podgrupą grupy X .

Twierdzenie: Warunek $a, b \in A \Rightarrow ab^{-1} \in A$ (stosujemy notację multiplikatywną) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby niepusty zbiór $A \subset X$ był podgrupą grupy X .

Dowód: Sprawdzamy aksjomat G.2:

$$a \in A \Rightarrow aa^{-1} = e \in A.$$

Sprawdzamy G.3:

$$a \in A \Rightarrow e, a \in A \Rightarrow ea^{-1} = a^{-1} \in A.$$

Pozostaje sprawdzić, czy zbiór A jest zamknięty ze względu na działanie grupy X , ponieważ działanie to po obciążeniu do zbioru A pozostaje oczywiście łączne. Zatem,

$$a, b \in A \Rightarrow a, b, b^{-1} \in A \Rightarrow a(b^{-1})^{-1} = ab \in A \quad \square$$

Pojęcia podpierścienia i podciała definiuje się analogicznie — jest to odpowiednio podzbiór ustalonego pierścienia lub ciała, który jest pierścieniem lub ciałem z tymi samymi działaniami i elementami wyróżnionymi. Na przykład, ciało liczb wymiernych \mathbb{Q} jest podciałem ciała liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Liczby zespolone

Def. Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną (a, b) liczb rzeczywistych.

Liczba a nazywa się częścią rzeczywistą, a liczba b — częścią urojoną liczby zespolonej $z = (a, b)$.

Oznaczamy je symbolami $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy literą \mathbb{C} .

Def. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych określa się według wzorów

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Twierdzenie: Zbiór \mathbb{C} z określonymi wyżej działaniami jest ciałem.

Element neutralny dodawania to $(0, 0)$, a mnożenia $(1, 0)$.

Szkic dowodu: 1. Należy sprawdzić, że $(\mathbb{C}, +, (0, 0))$ jest grupą abelową, na podstawie własności dodawania liczb rzeczywistych,

2. Należy sprawdzić, że $(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot, (1, 0))$ jest grupą abelową; w szczególności

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

3. Dowód kończy sprawdzenie, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Rachunki — na ćwiczeniach.

Formalnie należałoby ciało liczb zespolonych oznaczać symbolem

$(\mathbb{C}, +, \cdot, (0, 0), (1, 0))$, ale w skrócie pisze się po prostu \mathbb{C} . Ta sama uwaga dotyczy ciała liczb wymiernych i rzeczywistych, \mathbb{Q} i \mathbb{R} , a także innych.

Liczbie rzeczywistej a przyporządkujemy liczbę zespoloną $(a, 0)$. Możemy sprawdzić, że zbiór liczb zespolonych o części urojonej równej 0 zawiera zero i jedynkę (tj. liczby $(0, 0)$ i $(1, 0)$), oraz jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie, oraz operacje przeciwne (tj. odejmowanie i dzielenie, z wyjątkiem dzielenia przez $(0, 0)$).

Możemy też sprawdzić, że dodawanie i mnożenie zespolone liczb o zerowej części urojonej zgadza się z dodawaniem i mnożeniem liczb rzeczywistych.

Utożsamiając w ten sposób liczby rzeczywiste z pewnymi liczbami zespolonymi możemy powiedzieć, że ciało liczb rzeczywistych jest podciałem ciała liczb zespolonych. Dlatego możemy (i będziemy) pisać a zamiast $(a, 0)$, i w szczególności 0 zamiast $(0, 0)$ i 1 zamiast $(1, 0)$.

Def. Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną.

Zachodzi równość $i^2 = (-1, 0) = -1$. Korzystając z tego symbolu możemy zapisywać liczby zespolone w postaci $a + bi$ zamiast (a, b) .

Uwaga: Właśnie w tym napisie utożsamiliśmy liczbę rzeczywistą a z $(a, 0)$, b z $(b, 0)$; symbol „+” oznacza dodawanie *zespolone!*

Def. Wartością bezwzględną liczby zespolonej $z = (a, b)$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\sqrt{a^2 + b^2}$. Jest ona zawsze nieujemna, oznacza się ją symbolem $|z|$.

Na wykładzie analizy są definiowane funkcje trygonometryczne $\sin x$, $\cos x$ i funkcja wykładnicza e^x (tu symbol e oznacza liczbę rzeczywistą $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71828 \dots$). Dowodzi się, że

1. Dla dowolnych liczb $c, s \in \mathbb{R}$, takich że $c^2 + s^2 = 1$ istnieje liczba $\varphi \in \mathbb{R}$, taka że $s = \sin \varphi$, $c = \cos \varphi$.
2. Dla dowolnej liczby $\varphi \in \mathbb{R}$ zachodzi równość liczb zespolonych:

$$e^{i\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

W związku z tym dowolną liczbę zespoloną można przedstawić w postaci

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

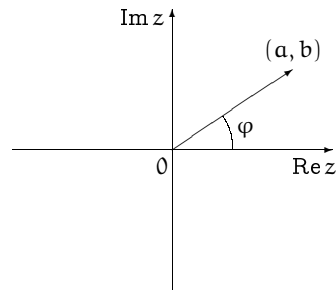
Liczbę φ , która występuje w powyższym przedstawieniu, nazywamy argumentem liczby zespolonej z i oznaczamy symbolem $\arg z$.

Uwaga: Równość $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$ jest uogólnieniem równości $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Czynniki $e^{i \arg z}$ pełni rolę znaku liczby zespolonej.

Jest oczywiste, że jeśli liczba φ jest argumentem pewnej liczby zespolonej z , to jest nim również każda liczba równa $\varphi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Tylko jeden argument liczby z jest elementem przedziału $[0, 2\pi)$. Nazwiemy go argumentem głównym liczby zespolonej z i oznaczmy symbolem $\operatorname{Arg} z$.

Interpretacja geometryczna:

Utożsamiamy zbiór liczb zespolonych z płaszczyzną, w której jest określony kartezjański układ współrzędnych. Wartość bezwzględna liczby $z = (a, b)$ jest odległością odpowiedniego punktu od początku układu (tj. punktu, czyli liczby 0). Argument liczby z jest miarą kąta nachylenia odcinka \overline{Oz} względem osi rzeczywistej (poziomej). Argument liczby 0 jest nieokreślony.



Jeśli liczby z_1 i z_2 przedstawimy w postaci trygonometrycznej, $z_1 = |z_1| \cdot (c_1, s_1)$ i $z_2 = |z_2| \cdot (c_2, s_2)$, to możemy obliczyć

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (c_1 c_2 - s_1 s_2, c_1 s_2 + s_1 c_2) = |z| \cdot (c, s).$$

Rozpoznajemy wyżej wyrażenia opisujące cosinus i sinus sumy kątów i wyciągamy wniosek, że:

1. Wartość bezwzględna iloczynu liczb zespolonych jest iloczynem ich wartości bezwzględnych.
2. Argument iloczynu jest sumą argumentów mnożonych liczb.

Prostą konsekwencją tego spostrzeżenia jest poniższy wzór.

Wzór de Moivre'a: jeśli $z = |z| \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi)$, to

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi, \sin n\varphi).$$

Def. Sprzężeniem nazywamy przyporządkowanie liczbie (a, b) liczby $(a, -b)$. Liczbę zespoloną sprzężoną z z oznaczamy symbolem \bar{z} .

Możemy zauważyć, że

1. $\bar{\bar{z}} = z$,
2. $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$,
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,
4. $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} = -\arg z = \arg \frac{1}{z}$,
5. jeśli symbol „ \diamond ” oznacza dowolne z czterech działań arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie), to $\overline{z_1 \diamond z_2} = \bar{z}_1 \diamond \bar{z}_2$. Wynika stąd, że jeśli $f(z_1, \dots, z_n)$ jest dowolnym wyrażeniem wymiernym, w którym oprócz z_1, \dots, z_n nie występują żadne inne liczby zespolone, to $f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \overline{f(z_1, \dots, z_n)}$.

Wielomiany

Def. Wielomianem zmiennej x nazywamy wyrażenie, w którym oprócz symbolu x pojawiają się dowolne stałe i działania określone w przyjętej strukturze algebraicznej.

Jeśli rozpatrujemy ciało, to możemy mnożyć i dodawać, a zatem każdy wielomian (nad ciałem — o innych nie mówimy) możemy przedstawić w postaci

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (= \sum_{k=0}^n a_k x^k),$$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $a_n \neq 0$, to liczba n nazywa się stopniem wielomianu w (umawiamy się, że stopień wielomianu zerowego, $w(x) = 0$, jest równy $-\infty$). Liczby a_0, \dots, a_n to współczynniki wielomianu w .

Jednym z podstawowych historycznych zadań algebry jest rozwiązywanie równań, tj. znajdowanie liczb x (pierwiastków wielomianu), takich że $w(x) = 0$.

Twierdzenie zasadnicze algebry (Gauss, 1799): Ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte, tj. każdy wielomian stopnia większego niż 0 o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

Dowód pomijamy. Nie można go przeprowadzić na gruncie samej algebry, bo gdyby można było, to ten sam dowód można by zastosować do dowolnego ciała, a nie wszystkie ciała są algebraicznie domknięte.

Konsekwencją zasadniczego twierdzenia algebry jest istnienie rozkładu wielomianu stopnia n o współczynnikach zespolonych a_0, \dots, a_n na czynniki pierwszego

stopnia:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Zbiór liczb zespolonych x_1, \dots, x_n — pierwiastków wielomianu — jest określony przez współczynniki a_0, \dots, a_n jednoznacznie.

Na przykład, pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^n - 1$ są liczby $x_k = (\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n})$ dla $k = 0, \dots, n-1$, co łatwo jest uzasadnić na podstawie wzoru de Moivre'a. Liczby te nazywamy pierwiastkami stopnia n z jedynki. W ogólnym przypadku znalezienie pierwiastków wielomianu jest trudne.

Zadania i problemy na ćwiczenia i do domu

1. Udowodnij, że z założenia, że w zbiorze X istnieje element prawostronnie neutralny e i element lewostronnie neutralny e' działania dwuargumentowego „ \diamond ” wynika, że $e = e'$ i jest tylko jeden element neutralny tego działania.
2. Zbadaj, czy zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} z działaniem „ \diamond ” określonym wzorem $a \diamond b = a + ab + b$ jest grupą.
3. Zbadaj, czy zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} , z działaniem „ \diamond ” określonym wzorem takim jak w poprzednim zadaniu, jest grupą.
4. Udowodnij, że zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, dla $n > 1$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo n jest pierścieniem z jedynką. Dla jakich n pierścień ten jest ciałem?
5. Udowodnij, że zbiór liczb rzeczywistych o postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest podciałem ciała \mathbb{R} . Skorzystaj w dowodzie z twierdzenia opisującego warunek konieczny i dostateczny tego, aby podzbiór grupy był podgrupą.
6. Czy można koszulkę (tzw. *T-shirt*) założyć jednocześnie tył na przód, prawa ręka w lewym rękawie a lewa w prawym, tak, aby wewnętrzna strona była na zewnątrz? (zakładamy, że talia nie mieści się w dekolcie). Należy znaleźć ściśle uzasadnienie odpowiedzi.
7. Def. Niech $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Transpozycją nazywamy taką permutację T_{ij} zbioru n -elementowego, że $T_{ij}(i) = j$, $T_{ij}(j) = i$ oraz $T_{ij}(k) = k$ dla $k \notin \{i, j\}$.
Def. Nieporządkiem permutacji σ nazywamy parę liczb i, j , taką że $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Udowodnij, że liczba nieporządków permutacji σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba nieporządków permutacji $T_{ij} \circ \sigma$ jest nieparzysta.

8. Def. Zbiór generatorów grupy jest to taki podzbiór grupy, że każdy element grupy można przedstawić w postaci wyrażenia, w którym występują tylko elementy tego zbioru (generatory) i ich elementów odwrotnych.

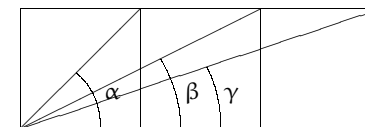
Rozważmy dwa zbiory generatorów grupy S_n .

Pierwszy to $\{T_{12}, T_{23}, \dots, T_{n-1,n}\}$, a drugi to $\{T_{12}, T_{13}, \dots, T_{1n}\}$.

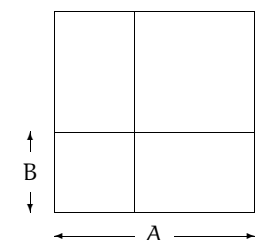
Ile transpozycji z pierwszego zbioru wystarczy złożyć, aby przedstawić dowolną permutację? A ile transpozycji z drugiego zbioru?

9. Oblicz liczbę $z = (1, -2)^7$ wykonując jak najmniej mnożeń.

10. Figura geometryczna na rysunku obok jest skonstruowana w oparciu o trzy kwadraty. Udowodnij, że suma kątów α , β i γ jest kątem prostym.



11. Napisz wzór wyrażający $\sin 4\alpha$ w zależności od $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.
12. Udowodnij, że zbiór wielomianów trygonometrycznych, tj. funkcji o postaci $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, z działaniami dodawania i mnożenia funkcji, jest pierścieniem.
13. Wskaż wszystkie pierwiastki (zespolone) wielomianu $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$.
14. Wyprowadź wzory, pozwalające obliczyć część rzeczywistą i urojoną pierwiastka kwadratowego z liczby zespolonej, za pomocą działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych i pierwiastka kwadratowego z liczby rzeczywistej.
15. Geometryczne wyprowadzenie wzorów opisujących rozwiązanie równania algebraicznego drugiego stopnia $x^2 + ax = b$ (wg. *Wykładów z historii matematyki* M. Kordosa): Rozważmy kwadrat podzielony na kwadraty i prostokąty jak na rysunku. Mamy $A^2 = x^2 + 2Bx + B^2$, czyli $x^2 + 2Bx = A^2 - B^2$. Jeśli przyjmiemy $a = 2B$ oraz $b = A^2 - B^2$, to dostaniemy równanie wyjściowe. Aby obliczyć x wystarczy znaleźć



liczby A i B . Oczywiście $B = \frac{a}{2}$, zaś $A^2 = b + B^2$,
czyli $A = \sqrt{b + B^2}$.

Opisany sposób rozwiązywania jest arabski.

Średniowieczni Arabowie nie znali liczb ujemnych
(ani tym bardziej zespolonych), więc nie wiedzieli, że
można wziąć też $A = -\sqrt{b + B^2}$.

16. Geometryczne rozwiązanie równania trzeciego
stopnia $x^3 + ax = b$ (Tartaglia, 1535, *op. cit.*):
Sześcian o boku A dzielimy na sześcian o boku B ,
sześcian o boku x , takim że $A = B + x$ i trzy
prostokąty o bokach A , B , x . Zatem
 $A^3 = x^3 + 3ABx + B^3$, skąd $x^3 + 3ABx = A^3 - B^3$.
Równanie rozwiążemy, jeśli znajdziemy takie liczby A
i B , że $3AB = a$ i $A^3 - B^3 = b$.

Oznaczamy $p = A^3$, $q = B^3$ i stąd $p - q = \frac{a^3}{27}$, $p - q = b$.
Podstawiając $p = b + q$ do pierwszego równania
dostajemy równanie kwadratowe $q^2 + bq = \frac{a^3}{27}$ i dalej
każdy umie.

17. Udowodnij, że podana niżej procedura dla dowolnej
liczby naturalnej b oblicza $z = a^b$. Działanie `div` to
dzielenie całkowite z odrzuceniem reszty.

```
x := a;  e := b;  z := 1;
repeat
  if nieparzyste(e) then z := z * x
  e := e div 2;
  if e = 0 then goto 1;
  x := x2;
until false;
1:
```

Określ liczbę mnożeń wykonywaną przez tę procedurę
(podnoszenie do kwadratu to też jedno mnożenie).

Macierze

Def. Macierzą liczbową o wymiarach $m \times n$ nazywamy układ liczb a_{ij} dla $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Liczby te nazywamy współczynnikami macierzy.

Często macierz przedstawia się w postaci prostokątnej tabeli:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

w związku z czym liczba m jest liczbą wierszy, a n jest liczbą kolumn macierzy.

Krótszy zapis, którego będziemy używali gdy skądinąd znamy wymiary macierzy, to $[a_{ij}]_{i,j}$ (po nawiasie pierwsza litera określa indeks wiersza, a druga — kolumny). Macierze będziemy też oznaczać dużymi literami, np. A, B .

Macierze można tworzyć nie tylko z liczb, ale także z funkcji, zbiorów i innych obiektów. Będziemy wykonywać na współczynnikach macierzy działania — dodawanie, odejmowanie, mnożenie (czasem także dzielenie), a zatem założymy co najmniej, że współczynniki należą do pewnego pierścienia lub ciała. Na razie rozpatrujemy tylko macierze liczbowe.

Jeśli ciało, do którego należą współczynniki, oznaczymy literą \mathbb{K} , to zbiór wszystkich macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczymy symbolem $\mathbb{K}^{m,n}$.

Jeśli $n = 1$, czyli macierz ma tylko jedną kolumnę, to będziemy ją nazywać macierzą kolumnową, albo wektorem (pojęcie wektora później uogólnimy). Zbiór wszystkich macierzy kolumnowych o m wierszach oznaczymy symbolem \mathbb{K}^m . Wektory będą też symbolizowane przez małe tłuste litery, np. \mathbf{a}, \mathbf{b} .

Dla $m = 1$ mamy macierz wierszową.

Jeśli $m = n = 1$, czyli macierz ma tylko 1 współczynnik, to utożsamiamy ją z tym współczynnikiem. Zatem, $\mathbb{K}^{1,1} = \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. Transpozycja macierzy jest to przekształcenie $\mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{n,m}$, które macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j}$ przyporządkowuje macierz $A^T = [a_{ij}]_{j,i}$. Macierz A^T nazywa się macierzą transponowaną do A .

Na przykład

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Def. Sprzężenie hermitowskie jest przekształceniem $\mathbb{C}^{m,n} \rightarrow \mathbb{C}^{n,m}$, które macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j}$ przyporządkowuje macierz $A^H = [\bar{a}_{ij}]_{j,i}$.

Oczywiste są tożsamości $(A^T)^T = A$, $(A^H)^H = A$.

Jeśli zbiory \mathbb{Q} i \mathbb{R} traktujemy jak podzbiory \mathbb{C} , czyli zbiory $\mathbb{Q}^{m,n}$ i $\mathbb{R}^{m,n}$ jak podzbiory $\mathbb{C}^{m,n}$, to sprzężenie hermitowskie w tych podzbiorach jest identyczne z transpozycją.

Działania dwuargumentowe w $\mathbb{K}^{m,n}$: dodawanie i odejmowanie macierzy, są określone wzorami

$$[a_{ij}]_{i,j} + [b_{ij}]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{i,j},$$

$$[a_{ij}]_{i,j} - [b_{ij}]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} - b_{ij}]_{i,j}.$$

Zbiór $\mathbb{K}^{m,n}$ z działaniem dodawania jest grupą abelową, której elementem neutralnym jest macierz zerowa $0 = [0]_{i,j}$.

Element przeciwny do $A = [a_{ij}]_{i,j}$ to macierz $-A = [-a_{ij}]_{i,j}$.

Ponadto, mamy $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$, $(A \pm B)^H = A^H \pm B^H$.

Operacja mnożenia macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{n,l}$ jest określona w następujący sposób: Iloczynem macierzy A i B jest macierz $C = [c_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,l}$, której współczynniki są równe

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

W przyswojeniu sobie tego wzoru może pomóc taki schemat:

$$A \rightarrow \begin{matrix} B \\ \downarrow \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Własności algebraiczne mnożenia macierzy

1. Jeśli $m = n = l$, a zatem rozpatrujemy macierze kwadratowe, to mnożenie macierzy jest działaniem dwuargumentowym wewnętrznym w zbiorze $\mathbb{K}^{n,n}$. W ogólności jest to działanie nieprzemienne, np.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Mnożenie macierzy jest łącznie.

Dowód: Dodawanie współczynników jest łączne i przemienne, mnożenie współczynników jest łączne i rozdzielne względem dodawania. Możemy zatem przyjąć $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B = [b_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{n,l}$ i $C = [c_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{l,s}$ i obliczyć

$$(AB)C = [d_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,s}: d_{ij} = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{t=1}^n a_{it} \cdot b_{tk} \right) \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^l \sum_{t=1}^n a_{it} \cdot b_{tk} \cdot c_{kj},$$

$$A(BC) = [e_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,s}: e_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} \cdot \left(\sum_{k=1}^l b_{tk} \cdot c_{kj} \right) = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^l a_{it} \cdot b_{tk} \cdot c_{kj}.$$

Ponieważ $d_{ij} = e_{ij}$ dla każdego i, j , więc $(AB)C = A(BC)$. Zauważmy, że w dowodzie nie trzeba zakładać, że mnożenie współczynników jest przemienne. \square
Uwaga: Wyrażenie ABC , dla ustalonych macierzy A, B i C , opisuje ten sam wynik niezależnie od kolejności wykonywania działań. W każdym przypadku inne są wyniki pośrednie i może być ogromna różnica w ilości działań, które trzeba wykonać. Na przykład, jeśli $A \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{1,n}$ i $C \in \mathbb{R}^n$, to obliczanie $(AB)C$ wymaga wykonania $2n^2$ mnożeń, podczas gdy obliczając $A(BC)$ wykonamy tylko $2n$ mnożeń.

3. Niech I_n oznacza macierz jednostkową $n \times n$; $I_n = [\delta_{ij}]_{i,j}$.

Użyty w tym określeniu symbol Kroneckera δ_{ij} oznacza 0 dla $i \neq j$ i 1 jeśli $i = j$.

Macierz I_n jest prawostronnie neutralnym argumentem mnożenia, tj. dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ zachodzi równość $AI_n = A$.

Podobnie, macierz I_m jest argumentem lewostronnie neutralnym, tj. $I_m A = A$. Żadna inna macierz w $\mathbb{K}^{n,n}$ ani w $\mathbb{K}^{m,m}$ nie ma tej własności (ale istnieją macierze A oraz B i C inne niż jednostkowe, takie że $AB = A$ i $CA = A$).

Zbiór macierzy kwadratowych, $\mathbb{K}^{n,n}$, z działaniem mnożenia, jest półgrupą, której elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_n .

4. Mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania, tj.

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Powyższe własności działań na macierzach oznaczają, że zbiór macierzy kwadratowych $\mathbb{K}^{n,n}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem. Jego elementy wyróżnione to macierz zerowa (zero) i macierz jednostkowa (jedyńka).

5. Transpozycja i sprzężenie hermitowskie iloczynu macierzy wyrażają się wzorami

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^H = B^H A^H,$$

Trzeba przy tym założyć przemienność mnożenia współczynników macierzy. Aby to uzasadnić, zamiast wykonywać rachunki, „odbijemy” schemat mnożenia macierzy względem diagonali wyniku, tj. linii ukośnej, na której leżą współczynniki c_{ii} .

$$B^T \rightarrow \begin{bmatrix} b_{1j} \dots b_{nj} \end{bmatrix} \xrightarrow{A^T} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{ij} \dots \end{bmatrix} \rightarrow C^T$$

Aby dokończyć dowód drugiego wzoru wystarczy przypomnieć, że jeśli $f(x_1, \dots, x_n)$ jest dowolnym wyrażeniem wymiernym, w którym oprócz zmiennych x_1, \dots, x_n nie występują żadne inne liczby zespolone, to $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$.

6. Jeśli argumenty są macierzami 1×1 , to dodawanie i mnożenie macierzy jest zgodne z dodawaniem i mnożeniem odpowiadających im liczb, co usprawiedliwia utożsamienie $\mathbb{K}^{1,1} = \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Transpozycja macierzy 1×1 jest przekształceniem identycznościowym, a sprzężenie hermitowskie jest sprzężeniem zespolonym.

Def. Mnożenie macierzy przez liczbę jest działaniem $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{m,n}$, określonym wzorem

$$a \cdot [a_{ij}]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} [a \cdot a_{ij}]_{i,j}.$$

Jeśli ciało \mathbb{K} jest przemienne, to czynniki, tj. liczbę a i macierz A możemy pisać w dowolnej kolejności, a więc $aA = Aa$. Ponadto prawdziwe są równości:

$$(a + b)A = aA + bA, \quad a(A + B) = aA + aB,$$

$$(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A),$$

$$(aA)^T = aA^T, \quad (aA)^H = \bar{a}A^H.$$

Podział blokowy macierzy

W wielu sytuacjach wygodnie jest wyróżnić w macierzy bloki, czyli macierze, które powstają przez odrzucenie pewnej liczby początkowych i końcowych wierszy i kolumn.

Macierz blokowa jest to macierz, której współczynnikami są macierze (bloki), takie że

- w każdym wierszu wszystkie bloki mają tyle samo wierszy,
- w każdej kolumnie wszystkie bloki mają tyle samo kolumn.

Będziemy pisać $A = [A_{ij}]_{i,j}$. Na przykład

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{itd.}$$

Wszystkie bloki w szczególności mogą, ale nie muszą, mieć te same wymiary. „Zwykle” macierze to macierze blokowe z wszystkimi blokami 1×1 .

Dowolną macierz A możemy przedstawić w postaci blokowo-kolumnowej,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad \text{albo } \text{blokowo-wierszowej}, \quad A = [A_1, \dots, A_n].$$

Jeśli macierze A i B o takich samych wymiarach podzielimy w identyczny sposób na bloki, to możemy napisać wzór na dodawanie macierzy w postaci blokowej:

$$[A_{ij}]_{i,j} + [B_{ij}]_{i,j} = [A_{ij} + B_{ij}]_{i,j}.$$

Poniższy wzór opisujący mnożenie macierzy obowiązuje wtedy, gdy wymiary odpowiednich bloków umożliwiają ich mnożenie:

$$[A_{ij}]_{i,j} \cdot [B_{ij}]_{i,j} = [C_{ij}]_{i,j}, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} \cdot B_{kj}.$$

Liczba p jest liczbą bloków w wierszu macierzy A i w kolumnie B . Nietrudno jest udowodnić, że powyższy wzór jest równoważny podanemu wcześniej wzorowi na „pojedynczy” współczynnik iloczynu macierzy.

Możemy na nowo zinterpretować „zwykle” mnożenie macierzy. Macierz A przedstawimy jako blokowo-kolumnową (z blokami o jednym wierszu), a macierz B

jako blokowo-wierszową (z blokami o jednej kolumnie). Wtedy

$$A \rightarrow \begin{matrix} B \\ \downarrow \\ C \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{c} A_i \\ \vdots \\ \dots \\ c_{ij} \dots \\ \vdots \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} B_j \\ \vdots \\ \dots \\ c_{ij} \dots \\ \vdots \end{array} \right] \quad c_{ij} = A_i B_j.$$

Szczególne klasy macierzy

Def. Macierz trójkątna górna jest to macierz $[a_{ij}]_{i,j}$ spełniająca warunek $a_{ij} = 0$ dla $i > j$.

Def. Macierz trójkątna dolna jest to macierz $[a_{ij}]_{i,j}$, której współczynniki spełniają warunek $a_{ij} = 0$ dla $i < j$.

Def. Macierz diagonalna jest to macierz $[a_{ij}]_{i,j}$, której współczynniki a_{ij} dla $i \neq j$ są równe 0.

Macierz diagonalna jest więc zarówno macierzą trójkątną górną, jak i dolną. Będziemy ją oznaczać symbolem $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{kk})$ albo $\text{diag}(a_1, \dots, a_k)$, gdzie $k = \min(m, n)$.

Łatwo jest dowieść (na ćwiczeniach), że suma i iloczyn dwóch macierzy trójkątnych górnych jest macierzą trójkątną górną. Takie samo stwierdzenie dotyczy macierzy trójkątnych dolnych, a także macierzy diagonalnych.

Przyjmijmy oznaczenia e_1, \dots, e_n dla wektorów (macierzy kolumnowych), takich że $e_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$.

↑
pozycja k

Macierz diagonalną możemy przedstawić w postaci blokowo-wierszowej, $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = [a_1 e_1, \dots, a_n e_n]$, albo blokowo-kolumnowej,

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 e_1^T \\ \vdots \\ a_n e_n^T \end{bmatrix}.$$

W szczególności wektory e_1, \dots, e_n są kolumnami macierzy jednostkowej I_n .

Def. Macierz permutacji jest to macierz kwadratowa $n \times n$, która w każdym wierszu, a także w każdej kolumnie, ma jeden współczynnik równy 1,

oraz wektor prawej strony i wektor niewiadomych

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

to układ równań liniowych możemy przedstawić w postaci macierzowej:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Zanim udowodnimy ogólne twierdzenia dotyczące rozwiązań układów równań liniowych, będziemy takie układy rozwiązywali „na piechotę”. Zauważmy, że jeśli macierz A jest kwadratowa $n \times n$ i nieosobliwa, to mnożąc stronami równanie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ przez A^{-1} otrzymujemy $A^{-1}\mathbf{b} = A^{-1}A\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$. To przekształcenie często stosuje się w rachunkach symbolicznych (i w dowodach twierdzeń), ale praktyczne metody numeryczne rozwiązywania układów równań *nie polegają* na wyznaczaniu odwrotności macierzy A .

Zadania i problemy na ćwiczenia i do domu

1. Udowodnij, że jeśli P_1 i P_2 są macierzami permutacji σ_1 i σ_2 , to macierz P_1P_2 jest macierzą permutacji $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
2. Udowodnij, że jeśli P jest macierzą permutacji, to $P^{-1} = P^T$.
3. Udowodnij, że odwrotność kwadratowej macierzy trójkątnej górnej (jeśli istnieje) jest macierzą trójkątną górną i podaj warunek konieczny i dostateczny istnienia odwrotności.

Zrób to samo zadanie po zmienienu słów „górną” i „górną” na „dolną” i „dolną”.

4. Def. Śladem macierzy kwadratowej A nazywamy liczbę, która jest sumą współczynników na diagonalu tej macierzy. Ślad macierzy oznaczamy symbolem $\text{tr } A$.

Niech $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$. Udowodnij, że $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B A^T)$.

5. Zbadaj, jaki skutek ma pomnożenie dowolnej macierzy A przez macierz diagonalną, a także przez macierz permutacji.

Wskazówka: Jeśli macierz diagonalna lub macierz permutacji jest czynnikiem z lewej strony, to przedstaw macierz A w postaci blokowo-kolumnowej. W przeciwnym razie przedstaw ją w postaci blokowo-wierszowej.

6. Udowodnij, że zbiór macierzy rzeczywistych 2×2 , o postaci $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, z działaniami dodawania i mnożenia, jest ciałem.

Def. Homomorfizmem struktur algebraicznych X_1 i X_2 nazywamy funkcję φ , której dziedziną jest zbiór elementów struktury X_1 , której wartości są elementami struktury X_2 i która dla każdego działania f określonego w X_1 spełnia warunek $\varphi(f(a_1, \dots, a_k)) = g(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k))$, gdzie g oznacza działanie w X_2 odpowiadające działaniu f w X_1 .

Na przykład homomorfizm pierścieni X_1 i X_2 oznacza spełnienie warunków $\forall a, b \in X_1$ $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Def. Izomorfizmem struktur algebraicznych X_1 i X_2 jest to bijekcja (odwzorowanie różnowartościowe i „na”), która jest homomorfizmem.

Wskaż inne ciało izomorficzne z ciałem macierzy 2×2 o podanej wyżej strukturze. Wskaż jakieś jego podciała.

7. Oblicz macierz $A^2 - 5A - 2I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Użyj w tym celu schematu Hornera: $(A - 5I_2)A - 2I_2$.

8. Znajdź zbiory rozwiązań układów równań liniowych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{bmatrix} (-1, 1) & (0, 2) \\ (0, 0) & (2, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5, -1) \\ (-1, 2) \end{bmatrix},$$

10. Udowodnij, że dowolną macierz kwadratową A można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej (uwaga: zakładamy, że współczynniki macierzy są elementami pewnego ciała, które nie może mieć tzw. charakterystyki równej 2, czyli nie może w tym ciele być $1 + 1 = 0$; charakterystyka ciał liczbowych \mathbb{Q} , \mathbb{R} i \mathbb{C} jest równa 0). Przedstaw macierz A^T za pomocą tych macierzy.

11. Def. Macierz kwadratowa A nazywa się macierzą stochastyczną, jeśli jej współczynniki są nieujemne i suma współczynników w każdym wierszu jest równa 1. Wykaż, że jeśli macierze $A = [a_{ij}]_{i,j}$ i $B = [b_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{n,n}$ są stochastyczne, to ich iloczyn też.

Wskazówka: Zbadaj, czym jest wektor $A\mathbf{z}$, jeśli macierz A jest stochastyczna, a $\mathbf{z} = [1, \dots, 1]^T$.

Czy zbiór macierzy stochastycznych $n \times n$ z działaniem mnożenia jest grupą?

12. Niech A będzie macierzą nieosobliwą $n \times n$. Wzór Shermana-Morrisona stwierdza, że jeśli $B = A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ i macierz B jest nieosobliwa, to

$$B^{-1} = A^{-1} - \alpha A^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1},$$

dla pewnego α . Znajdź α .

Rozwiązanie: Jeśli wzór jest prawdziwy, to

$$I_n = (A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)(A^{-1} - \alpha A^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1}) = I_n + ((1 - \alpha)I_n - \alpha \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1}) \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1}$$

i równanie to powinno dać się rozwiązać ze względu na α . Możemy przyjąć, że $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, bo w przeciwnym razie $A = B$ i wzór jest oczywiście prawdziwy. Jeśli wzór jest prawdziwy, to wyrażenie

$$((1 - \alpha)I_n - \alpha \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1}) \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1} = \mathbf{u}((1 - \alpha) - \alpha \mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{v}^T A^{-1} \quad (*)$$

musi być macierzą zerową w $\mathbb{R}^{n,n}$. Wartościami wyrażeń $\mathbf{u}^T \mathbf{u}$ i $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ są liczby dodatnie. Możemy zatem pomnożyć wyrażenie (*) z lewej strony przez $\frac{1}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \mathbf{u}^T$ i z prawej strony przez $A \frac{1}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v}$. Po uproszczeniu otrzymamy wyrażenie, którego wartością musi być liczba 0:

$$(1 - \alpha) - \alpha \mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u} = 0.$$

Stąd łatwo wynika, że $\alpha = 1/(1 + \mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u})$.

Wzór S.-M. opisuje odwrotność macierzy B , jeśli $\mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u} \neq -1$.

13. Oblicz macierz B i na podstawie wzoru Shermana-Morrisona macierz B^{-1} , jeśli

$$B = A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

14. Udowodnij podany niżej wzór Shermana-Morrisona-Woodbury'ego: jeśli $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,m}$ i macierze $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ oraz $(I_m + \mathbf{V}^T A^{-1} \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{m,m}$ są nieosobliwe, to

$$(A + \mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} \mathbf{U} (I_m + \mathbf{V}^T A^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T A^{-1}.$$

Przestrzenie liniowe

Określenie przestrzeni liniowej

Def. Ustalmy dowolne ciało \mathbb{K} ; jego elementy będziemy nazywać skalarami. Wektorami nazywamy obiekty, które możemy dodawać (chodzi o dwuargumentowe działanie wewnętrzne w ustalonym zbiorze wektorów, które jest określone w sposób zależny od tych obiektów) i mnożyć przez skalary.

Def. Zbiór V wektorów nazywamy przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} , jeśli spełnia on następujące warunki:

S.1: Zbiór V z działaniem dodawania wektorów jest grupą abelową. Element neutralny tej grupy nazywamy wektorem zerowym i oznaczamy symbolem 0 .

S.2: Zbiór V jest zamknięty ze względu na mnożenie wektorów przez skalary.

S.3: Działanie mnożenia skalarów i wektorów jest rozdzielne względem dodawania wektorów, a także dodawania skalarów:

$$\forall_{a \in \mathbb{K}, x, y \in V} a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y,$$

$$\forall_{a, b \in \mathbb{K}, x \in V} (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x.$$

S.4: Zachodzi łączność mnożenia skalarów i wektorów:

$$\forall_{a, b \in \mathbb{K}, x \in V} (ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x),$$

S.5: $\forall_{x \in V} 1 \cdot x = x$.

Formalnie przestrzeń liniowa jest piątką spełniających powyższe aksjomaty elementów, $(V, \mathbb{K}, +, \cdot, 0)$, którymi są zbiór wektorów V , ciało skalarów \mathbb{K} , działanie dodawania wektorów „+”, działanie mnożenia skalarów i wektora „·” i wektor zerowy 0 .

Mówiąc o elemencie ustalonej przestrzeni liniowej mamy na myśli wektor (element zbioru V).

Przykłady:

- Dowolne ciało \mathbb{K} jest przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} , a także nad dowolnym swoim podciałem (uwaga: dla każdego podciała otrzymujemy *inną* przestrzeń liniową!).
- Zbiór macierzy liczbowych o ustalonych wymiarach, $\mathbb{K}^{m,n}$, z działaniami dodawania i mnożenia przez liczbę określonymi w poprzednim wykładzie. W szczególności zbiór macierzy kolumnowych \mathbb{K}^m jest przestrzenią liniową, o na tyle ważnym znaczeniu, że przez słowo „wektor” bywa rozumiany domyślnie element tej przestrzeni.

- Zbiór przesunięć płaszczyzny (wektorem jest operacja przesunięcia w danym kierunku na określoną odległość, a dodawaniem wektorów jest operacja złożenia takich przekształceń).
- Zbiór wszystkich równań liniowych wiążących określone niewiadome.
- Zbiór funkcji rzeczywistych określonych w ustalonej dziedzinie, z działaniami określonymi w „naturalny” sposób.
- Zbiór $\mathbb{R}[x]_n$ wielomianów stopnia nie większego niż ustalone n z działaniami j.w. (uwaga: zbiór wielomianów ustalonego stopnia $n \in \mathbb{N}$ *nie jest* przestrzenią liniową).

Def. Podzbiór X przestrzeni liniowej V nazywamy podprzestrzenią liniową, jeśli jest on przestrzenią liniową (nad tym samym ciałem, z działaniami otrzymanymi z obciążenia działań w przestrzeni V).

W dowolnej przestrzeni liniowej V możemy natychmiast wskazać dwie podprzestrzenie: podprzestrzeń zerową, której jedynym elementem jest wektor zerowy, i podprzestrzeń niewłaściwą, czyli całą przestrzeń V .

Def. Kombinacją liniową wektorów $x_1, \dots, x_k \in V$ o współczynnikach $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ nazywamy wektor $a_1x_1 + \dots + a_kx_k$.

Def. Przestrzenią rozpiętą przez zbiór wektorów $\{x_1, \dots, x_k\}$ nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych tych wektorów. Oznaczamy ją symbolem $\text{lin}\{x_1, \dots, x_k\}$ albo $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$.

Łatwo jest sprawdzić, że przestrzeń rozpięta przez dowolny zbiór wektorów w ustalonej przestrzeni V jest jej podprzestrzenią liniową. Jest też oczywiste, że jeśli $X = \text{lin}\{x_1, \dots, x_k\}$ i $Y = \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$, to zbiór X jest podprzestrzenią (nie wiadomo, czy właściwą) przestrzeni Y .

Baza i wymiar przestrzeni liniowej

Def. Ustalony układ wektorów x_1, \dots, x_k jest liniowo niezależny, jeśli z równości $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0$ wynika $a_1 = \dots = a_k = 0$.

Jeśli istnieją skalary a_1, \dots, a_k , nie wszystkie równe 0, takie że $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0$, to układ $\{x_1, \dots, x_k\}$ jest liniowo zależny.

Przykład: Układ wektorów $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ i $x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ w przestrzeni \mathbb{R}^2 jest liniowo zależny, bo np. $2x_1 + 1x_2 = 0$.

Układ wektorów $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ jest liniowo niezależny, bo

$$a_1 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix},$$

i dalej, z równości $a_1 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ wynika $a_1 + a_2 = 0$, $2a_2 = 0$, czyli $a_1 = a_2 = 0$.

Uwaga: W definicji występuje słowo „układ”, które można by zastąpić słowem „zbiór”. Jednak nie zakładamy, że poszczególne wektory są parami różne, a ponadto będziemy potrzebować ich uporządkowania (aby wiązać wektory z odpowiednimi współczynnikami kombinacji liniowych). Jest oczywiste, że jeśli w danym układzie pewien wektor \mathbf{x}_i występuje więcej niż raz, to układ ten jest liniowo zależny.

Stwierdzenie: Dowolny podzbiór zbioru liniowo niezależnego jest liniowo niezależny (w szczególności zbiór pusty jest liniowo niezależnym zbiorem wektorów). Dowolny zbiór, który zawiera zbiór liniowo zależny, jest liniowo zależny. W szczególności dowolny zbiór, który zawiera wektor zerowy, jest liniowo zależny.

Def. Układ wektorów w przestrzeni V , który spełnia następujące warunki:

1. jest liniowo niezależny,
 2. rozszerzenie go o dowolny wektor daje w wyniku układ liniowo zależny,
- nazywa się bazą przestrzeni V .

Twierdzenie: Jeśli układ wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jest bazą przestrzeni V , to każdy wektor $\mathbf{y} \in V$ można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$\mathbf{y} = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n.$$

Dowód: Układ wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ jest liniowo zależny, a zatem istnieją skalary $b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{K}$, nie wszystkie równe 0, takie że

$$b_1 \mathbf{x}_1 + \dots + b_n \mathbf{x}_n + c \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ wynika, że $c \neq 0$. Mnożąc powyższą równość przez c^{-1} i stosując prawo skreśleń otrzymujemy

$$\mathbf{y} = \frac{-b_1}{c} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{-b_n}{c} \mathbf{x}_n.$$

Gdyby istniały dwie różne kombinacje liniowe elementów bazy równe \mathbf{y} , np.

$$\mathbf{y} = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = a'_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a'_n \mathbf{x}_n,$$

to otrzymalibyśmy równość

$$(a_1 - a'_1) \mathbf{x}_1 + \dots + (a_n - a'_n) \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Warunek $a_i \neq a'_i$ jest dla każdego i sprzeczny z liniową niezależnością bazy. \square

Twierdzenie o istnieniu bazy: Dowolny liniowo niezależny układ wektorów w przestrzeni V można rozszerzyć tak, aby otrzymać bazę tej przestrzeni. W szczególności, każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód tego twierdzenia opiera się na pewniku wyboru, pod postacią lematu Kuratowskiego-Zorna. Pominiemy go, ograniczając się do stwierdzenia, że użycie tego pewnika w dowodzie umożliwia wykazanie istnienia pewnego obiektu (w naszym przypadku bazy), ale nie daje żadnej efektywnej metody znalezienia tego obiektu. Na przykład nie umiemy wskazać żadnej bazy przestrzeni \mathbb{R} nad ciałem \mathbb{Q} . Dowody oparte na pewniku wyboru noszą miano niekonstruktorywnych. Dla wielu przestrzeni liniowych umiemy jednak wskazać bazy. Jak się przekonamy, umiejętność ta umożliwia sprowadzenie do działań na liczbach (skalarach) wielu rachunków na wektorach (które mogą być bardzo „dziwnymi” obiektami) i ich zbiorach.

Przykłady baz:

- Układ wektorów (macierzy) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jest bazą przestrzeni \mathbb{K}^n .
- Układ wektorów (ciągów nieskończonych) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$, takich że k -ty wyraz ciągu \mathbf{e}_k jest równy 1, a wszystkie pozostałe — 0 jest bazą przestrzeni \mathbb{K}^∞ (które elementami są nieskończone ciągi elementów ciała \mathbb{K} , z których co najwyżej skończenie wiele jest różnych od 0).
- Układ wektorów (wielomianów) $1, x, x^2, \dots, x^n$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$ wielomianów jednej zmiennej stopnia co najwyżej n (jest to tak zwana baza potęgowa).
- Układ wektorów (równań) $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, 0 = 1$ jest bazą przestrzeni równań liniowych z niewiadomymi x_1, \dots, x_n .

Twierdzenie Steinitza o wymianie: Niech $X = \text{lin}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, przy czym układ wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jest liniowo niezależny. Niech $X \subset Y = \text{lin}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$. Wówczas $n \leq m$ i n spośród elementów zbioru $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ można zastąpić przez wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, otrzymując zbiór wektorów, który rozpiną tę samą przestrzeń Y .

Dowód: Twierdzenie jest oczywiście prawdziwe dla $n = 0$. Przyjmujemy założenie indukcyjne, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$ (gdzie $n > 0$). Mamy więc

$n - 1 \leq m$, a przy odpowiednim uporządkowaniu wektorów $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ jest

$$\mathbf{x}_n \in Y = \text{lin}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_m\} \supset \text{lin}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_m\}.$$

Wektor \mathbf{x}_n jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_m$, ale nie jest on kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ (bo zbiór $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ jest liniowo niezależny). Musi więc być $n \leq m$, a ponadto istnieją skalary a_1, \dots, a_m , takie że

$$\mathbf{x}_n = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} + a_n \mathbf{y}_n + \dots + a_m \mathbf{y}_m,$$

przy czym $a_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{n, \dots, m\}$. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a_n \neq 0$. Wtedy

$$\mathbf{y}_n = \frac{-a_1}{a_n} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{-a_{n-1}}{a_n} \mathbf{x}_{n-1} + \frac{1}{a_n} \mathbf{x}_n + \frac{-a_{n+1}}{a_n} \mathbf{y}_{n+1} + \dots + \frac{-a_m}{a_n} \mathbf{y}_m.$$

Dla dowolnego wektora $\mathbf{z} \in Y$, istnieją skalary b_1, \dots, b_m , takie że

$$\mathbf{z} = b_1 \mathbf{x}_1 + \dots + b_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} + b_n \mathbf{y}_n + \dots + b_m \mathbf{y}_m.$$

Podstawiając w miejsce \mathbf{y}_n otrzymane wcześniej wyrażenie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = & \left(b_1 - \frac{b_n a_1}{a_n}\right) \mathbf{x}_1 + \dots + \left(b_{n-1} - \frac{b_n a_{n-1}}{a_n}\right) \mathbf{x}_{n-1} + \frac{b_n}{a_n} \mathbf{x}_n + \\ & \left(b_{n+1} - \frac{b_n a_{n+1}}{a_n}\right) \mathbf{y}_{n+1} + \dots + \left(b_m - \frac{b_n a_m}{a_n}\right) \mathbf{y}_m, \end{aligned}$$

a zatem $\mathbf{z} \in \text{lin}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_m\}$, czyli $Y \subset \text{lin}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_m\}$. \square

Wniosek: Jeśli n -elementowy układ wektorów jest bazą przestrzeni V , to każda baza tej przestrzeni składa się z n wektorów.

Dowód: Niech $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ i $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ będą dwiema bazami przestrzeni V . Na podstawie twierdzenia Steinitza, $n \leq m$, ale także $m \leq n$, czyli $n = m$. \square

Można udowodnić mocniejsze twierdzenie: wszystkie bazy dowolnej przestrzeni liniowej V są równoliczne (a zatem dotyczy to także przestrzeni, które mają bazy złożone z nieskończenie wielu wektorów).

Def. Wymiarem przestrzeni liniowej V nazywamy liczbę elementów jej bazy (ogólniej — moc zbioru elementów bazy).

Wymiar przestrzeni V oznaczamy symbolem $\dim V$ (z angielskiego *dimension* — wymiar).

Wnioskiem z twierdzenia o istnieniu bazy i twierdzenia o równoliczności wszystkich baz danej przestrzeni jest

Stwierdzenie: Jeśli przestrzeń X jest podprzestrzenią przestrzeni Y , to $\dim X \leq \dim Y$, przy czym jeśli wymiary są skończone i równe, to $X = Y$.

Suma algebraiczna podprzestrzeni liniowych

Def. Niech Y i Z będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej X .

Sumą algebraiczną podprzestrzeni Y i Z nazywamy zbiór

$$Y + Z \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} + \mathbf{z} : \mathbf{y} \in Y, \mathbf{z} \in Z\}.$$

Przecięciem (albo **częścią wspólną**) podprzestrzeni Y i Z nazywamy zbiór

$$Y \cap Z = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in Y, \mathbf{x} \in Z\}.$$

Jeśli przecięcie podprzestrzeni Y i Z ma tylko jeden element — wektor zerowy, to sumę algebraiczną tych podprzestrzeni nazywamy **sumą prostą** i oznaczamy symbolem $Y \oplus Z$.

Łatwo jest udowodnić, że zarówno przecięcie jak i suma algebraiczna (w tym prosta) podprzestrzeni przestrzeni liniowej jest podprzestrzenią liniową. Zachodzą następujące, oczywiste lub łatwe do udowodnienia relacje:

$$0 \leq \dim(Y \cap Z) \leq \min(\dim Y, \dim Z),$$

$$\max(\dim Y, \dim Z) \leq \dim(Y + Z) \leq \min(\dim X, \dim Y + \dim Z),$$

$$\dim Y + \dim Z = \dim(Y + Z) + \dim(Y \cap Z),$$

a stąd w szczególności $\dim(Y \oplus Z) = \dim Y + \dim Z$ (bo $\dim\{0\} = 0$).

Pojęcia sumy algebraicznej i sumy prostej możemy uogólnić na przypadek większej liczby składników. Sumą algebraiczną s podprzestrzeni Y_1, \dots, Y_s przestrzeni X jest zbiór

$$\{\mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{y}_s : \forall_j \mathbf{y}_j \in Y_j\} = Y_1 + \dots + Y_s \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{j=1}^s Y_j.$$

Jeśli Y_1, \dots, Y_s są podprzestrzeniami przestrzeni X , takimi że

$$X = \{\mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{y}_s : \mathbf{y}_j \in Y_j\}, \quad \text{oraz}$$

$$Y_i \cap \left(\sum_{\substack{j \in \{1, \dots, s\} \\ j \neq i}} Y_j \right) = \{0\} \quad \text{dla } i = 1, \dots, s,$$

to suma algebraiczna tych podprzestrzeni jest sumą prostą. W zapisie symbolicznym

$$X = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_s = \bigoplus_{j=1}^s Y_j.$$

Wtedy przedstawienie dowolnego wektora $x \in X$ w postaci sumy $y_1 + \dots + y_s$ wektorów takich że $\forall_{j \in \{1, \dots, s\}} y_j \in Y_j$ jest jednoznaczne.

Istotnie, dla $s = 2$, biorąc $x = y_1 + y_2 = y'_1 + y'_2$, otrzymujemy $y_1 - y'_1 = y'_2 - y_2$, ale $y_1 - y'_1 \in Y_1$, $y'_2 - y_2 \in Y_2$, a jedynym elementem przecięcia przestrzeni Y_1 i Y_2 jest 0 . Zatem, $y_1 = y'_1$, $y_2 = y'_2$. Przez indukcję przenosi się to na przypadek dowolnego s . \square

Def. Wektory $y_1 \in Y_1, \dots, y_s \in Y_s$, przypisane jednoznacznie wektorowi $x \in X = \bigoplus_{j=1}^s Y_j$, nazywamy składowymi wektora x względem wskazanego rozkładu przestrzeni X na sumę prostą.

Przykład. Przestrzeń $\mathbb{R}[x]_n$ wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej stopnia co najwyżej n możemy przedstawić w postaci sumy prostej podprzestrzeni wielomianów parzystych i nieparzystych. Dla n parzystego

$$\mathbb{R}[x]_n = \text{lin}\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n\} = \text{lin}\{1, x^2, x^4, \dots, x^n\} \oplus \text{lin}\{x, x^3, \dots, x^{n-1}\}.$$

Na przykład wielomian $1 - 2x - 3x^2 + 4x^5 + x^6$ jest sumą $1 - 3x^2 + x^6$ (składowa parzysta) i $-2x + 4x^5$ (składowa nieparzysta).

W szczególności, jeśli układ wektorów x_1, \dots, x_n jest bazą przestrzeni X , to przestrzeń tę możemy przedstawić jako sumę prostą podprzestrzeni jednowymiarowych:

$$X = \text{lin}\{x_1\} \oplus \dots \oplus \text{lin}\{x_n\},$$

a zatem możemy przedstawić dowolny wektor $z \in X$ w postaci kombinacji liniowej:

$$z = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

W ten sposób (prawie) dowiedliśmy ponownie, że współczynniki $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tej kombinacji są określone jednoznacznie.

Przekształcenia liniowe

Def. Niech V_1 i V_2 będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem \mathbb{K} . Funkcja $f: V_1 \rightarrow V_2$ jest przekształceniem liniowym, jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in V_1} \forall_{a_1, a_2 \in \mathbb{K}} f(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2).$$

Łatwy dowód indukcyjny uzasadnia stwierdzenie, że przekształcenie liniowe zachowuje dowolne kombinacje liniowe. Wynikają stąd następujące własności takich przekształceń:

- Obrazem wektora zerowego $0_1 \in V_1$ jest wektor zerowy $0_2 \in V_2$.
- Jeśli układ wektorów $y_1, \dots, y_k \in V_1$ jest liniowo zależny, to układ $f(y_1), \dots, f(y_k) \in V_2$ jest liniowo zależny. Jeśli więc układ wektorów $f(y_1), \dots, f(y_k)$ jest liniowo niezależny, to układ y_1, \dots, y_k też jest liniowo niezależny.
- Jeśli określimy sumę przekształceń f_1 i f_2 ustalonej przestrzeni V_1 w V_2 wzorem

$$\forall_{z \in V_1} (f_1 + f_2)(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

oraz iloczyn przekształcenia f i liczby a wzorem

$$\forall_{z \in V_1} (a \cdot f)(z) = a \cdot f(z),$$

to możemy łatwo przekonać się, że

zbiór przekształceń liniowych ustalonych przestrzeni liniowych nad ciałem \mathbb{K} z określonymi wyżej działaniami jest przestrzenią liniową nad \mathbb{K} .

Przestrzeń tę oznaczmy symbolem $L(V_1; V_2)$. Jej wektorem zerowym jest przekształcenie zerowe, które każdemu wektorowi $z \in V_1$ przyporządkowuje wektor $0_2 \in V_2$.

- Jeśli funkcje $f: V_1 \rightarrow V_2$ i $g: V_2 \rightarrow V_3$ są przekształceniami liniowymi, to przekształcenie złożone $g \circ f: V_1 \rightarrow V_3$ jest przekształceniem liniowym. Ogólnie, złożenie dowolnego skończonego ciągu przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Def. Izomorfizmem przestrzeni liniowych V_1 i V_2 (nad tym samym ciałem \mathbb{K}) nazywamy przekształcenie liniowe $f: V_1 \rightarrow V_2$, które jest bijekcją.

Izomorfizm f przestrzeni liniowych ma przekształcenie odwrotne, $f^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$, które też jest izomorfizmem. O przestrzeniach V_1 i V_2 mówimy wtedy, że są izomorficzne. Z definicji izomorfizmu wynika, że

- Izomorfizm zachowuje liniową zależność albo liniową niezależność dowolnego układu wektorów. W szczególności izomorfizm przekształca bazę przestrzeni V_1 na bazę przestrzeni V_2 , a więc zachowuje wymiar przestrzeni.
- Warunek istnienia izomorfizmu między przestrzeniami określa relację, która jest zwrotna (każda przestrzeń jest izomorficzna ze sobą), symetryczna (jeśli V_1 jest izomorficzna z V_2 , to V_2 jest izomorficzna z V_1) i przechodnia (jeśli V_1 jest izomorficzna z V_2 , a V_2 z V_3 , to V_1 jest izomorficzna z V_3). Jest to więc relacja równoważności; klasa przestrzeni liniowych nad ustalonym ciałem dzieli się na klasy przestrzeni izomorficznych.

Wspólną cechą przestrzeni izomorficznych jest ich wymiar; dowolna przestrzeń V o wymiarze n nad ciałem \mathbb{K} jest więc izomorficzna z przestrzenią \mathbb{K}^n .

Mając ustaloną bazę x_1, \dots, x_n przestrzeni V możemy określić izomorfizm, który wektorowi $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ przyporządkowuje wektor (macierz kolumnową) $f(z) = [c_1, \dots, c_n]^T$. Izomorfizm odwrotny jest to przyporządkowanie układowi współczynników c_1, \dots, c_n wektora z , który jest kombinacją liniową wektorów bazy z tymi współczynnikami. Na dalszych wykładach będzie podany bardziej systematyczny sposób konstruowania tych izomorfizmów.

Wiemy, że jeśli $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ oraz $x \in \mathbb{K}^n$, to $Ax \in \mathbb{K}^m$. Na podstawie znanych własności mnożenia macierzy możemy stwierdzić, że przekształcenie przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^m , polegające na mnożeniu ustalonej macierzy i wektora, jest liniowe. Macierz liczbowa $m \times n$ możemy więc utożsamiać z przekształceniem $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Ustalmy bazę x_1, \dots, x_n przestrzeni V_1 i bazę y_1, \dots, y_m przestrzeni V_2 . Obrazem wektora x_j w dowolnym przekształceniu liniowym f jest pewna kombinacja liniowa $a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m$ wektorów bazy przestrzeni V_2 . Przypuśćmy teraz, że $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. Wtedy

$$f(z) = \sum_{j=1}^n c_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right) y_i.$$

Współczynnikami w bazie y_1, \dots, y_m obrazu wektora z w przekształceniu f są więc liczby $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$. Możemy je obliczyć wykonując mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Z tego spostrzeżenia wnioskujemy, że mając dowolne przekształcenie liniowe $f: V_1 \rightarrow V_2$, dla ustalonych baz przestrzeni V_1 o wymiarze n i V_2 o wymiarze m możemy wskazać jednoznacznie określoną macierz $[a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$, która reprezentuje to przekształcenie (tj. pozwala obliczyć współczynniki wektora $f(z)$ na podstawie współczynników wektora z , za pomocą mnożenia macierzy).

Z drugiej strony, dowolnej macierzy $[a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$ odpowiada przekształcenie liniowe, które „przekształca współczynniki w bazach” w opisany sposób. Dlatego przestrzeń przekształceń liniowych przestrzeni n -wymiarowej V_1 w przestrzeń V_2 o wymiarze m jest izomorficzna z przestrzenią macierzy $\mathbb{K}^{m,n}$. Wymiar tej przestrzeni (a więc także przestrzeni $L(V_1; V_2)$) jest równy mn .

Dzięki istnieniu tego izomorfizmu (a właściwie całej klasy izomorfizmów, ponieważ możemy dowolnie wybierać bazy), badanie przekształceń liniowych możemy sprowadzić do badania własności macierzy. Co też uczynimy niebawem.

Zadania i problemy na ćwiczenia i do domu

1. Udowodnij, że jeśli V jest przestrzenią liniową, to $\forall x \in V \ 0 \cdot x = 0$.
2. Wskaż wymiar i dowolną bazę przestrzeni $\mathbb{K}^{m,n}$.
3. Wskaż bazę przestrzeni $\mathbb{C}[x_1, x_2]_2$ (zbioru wielomianów zespolonych dwóch zmiennych stopnia co najwyżej 2) nad ciałem \mathbb{C} .
4. Wskaż bazę przestrzeni $\mathbb{C}[x_1, x_2]_2$ nad ciałem \mathbb{R} .
5. Znajdź wymiar przestrzeni równań algebraicznych n zmiennych m -tego stopnia nad ciałem \mathbb{C} (na przykład dla $m = n = 2$ to są równania o postaci $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, ze współczynnikami zespolonymi a, \dots, f). Wskaż bazę tej przestrzeni.
6. Czy podane niżej zbiory macierzy $n \times n$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{K}^{n,n}$?
 - a) Zbiór macierzy permutacji.
 - b) Zbiór macierzy trójkątnych.
 - c) Zbiór macierzy trójkątnych górnych.
 - d) Zbiór macierzy stochastycznych (których suma współczynników w każdym wierszu jest równa 1).
 - e) Zbiór macierzy nieosobliwych.
 - f) Zbiór macierzy osobliwych.
 - g) Zbiór macierzy hermitowskich (zbadaj osobno przypadki gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
 - h) Zbiór macierzy antysymetrycznych.

i) Zbiór macierzy diagonalnie dominujących (takich, że dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi nierówność $|a_{ii}| > \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} |a_{ij}|$).

W każdym przypadku podaj uzasadnienie i jeśli odpowiedź jest twierdząca, to wskaż wymiar i bazę.
7. Udowodnij, że zbiór \mathbb{R}_+ (zbiór liczb rzeczywistych dodatnich) z działaniem dodawania „+” określonym wzorem $x + 'y = xy$ (rozważane dodawanie jest „zwykłym” mnożeniem liczb rzeczywistych) i działaniem mnożenia przez liczbę rzeczywistą a „'” określonym wzorem $a \cdot 'x = x^a$, jest rzeczywistą przestrzenią liniową. Znajdź wektor zerowy, wymiar i bazę tej przestrzeni.

Czy zbiór \mathbb{Q}_+ z działaniami określonymi za pomocą tych samych wzorów jest przestrzenią liniową?
8. Zbadaj, czy zbiór $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ (z działaniem dodawania wektorów tożsamym z dodawaniem liczb) jest przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{Q} . Jeśli tak, to znajdź jakąś bazę i wymiar tej przestrzeni.

9. Które z podanych niżej podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^3 są podprzestrzeniami liniowymi?

$$\begin{aligned} \{(x, y, z): x + y - z = a\} & \quad \text{dla ustalonego } a \in \mathbb{R}, \\ \{(x, y, z): x^n = 0\} & \quad \text{dla ustalonego } n \in \mathbb{N}, \\ \{(x, y, z): x^2 + y^2 > s\} & \quad \text{dla ustalonego } s \in \mathbb{Q}, \\ \{(x, y, z): (x + y)^n = sz^n\} & \quad \text{dla ustalonego } n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Q}, \\ \{(x, y, z): xy = 0\}. & \end{aligned}$$

10. Def. Trójkątą rodziną wielomianów nazywamy układ wielomianów w_0, \dots, w_n , takich że dla każdego k stopień wielomianu w_k jest równy k .

Udowodnij, że dowolna trójkątna rodzina wielomianów w_0, \dots, w_n o współczynnikach rzeczywistych jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

11. Udowodnij podane na stronie 3.6 relacje między wymiarami podprzestrzeni Y , $Z, Y + Z$ i $Y \cap Z$ przestrzeni X .

12. Niech przestrzenie X, Y i Z będą podprzestrzeniami przestrzeni V i niech $\dim X = 3, \dim Y = 4, \dim Z = 2$ i $\dim V = 7$. Jakie mogą być wymiary przestrzeni $(Y + Z) \cap X$ i $(X \cap Y) + Z$?

13. Udowodnij, że dwie przestrzenie, V_1 i V_2 nad ciałem \mathbb{K} są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_1 = \dim V_2$.

14. Zbadaj, czy układ wektorów

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest liniowo zależny

- a) nad ciałem \mathbb{R} ,
- b) nad ciałem \mathbb{Q} .

15. Znajdź macierz przekształcenia liniowego $d: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$, określonego wzorem $d(w) = w'$, odpowiadającą bazie potęgowej $1, x, x^2, x^3$ (w tej bazie reprezentujemy zarówno argument przekształcenia d , jak i wynik).

16. Udowodnij, że jeśli przekształcenia liniowe $f: V_1 \rightarrow V_2$ i $g: V_2 \rightarrow V_3$ są reprezentowane w bazach x_1, \dots, x_n przestrzeni V_1 , y_1, \dots, y_m przestrzeni V_2 i z_1, \dots, z_k przestrzeni V_3 odpowiednio przez macierze A i B , to macierzą złożenia $g \circ f: V_1 \rightarrow V_3$ tych przekształceń w bazach x_1, \dots, x_n i z_1, \dots, z_k jest macierz BA .

17. Znajdź macierze przekształceń $d_n: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$, określonych wzorem $d_n(w) = \frac{d^n}{dx^n} w$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, w bazie potęgowej $1, x, x^2, x^3$. Skorzystaj w tym celu z rozwiązań poprzednich dwóch zadań.

Obraz i jądro przekształcenia liniowego i macierzy

Równoważne układy równań liniowych

Def. Dwa układy równań liniowych o tych samych niewiadomych są równoważne, jeśli każde równanie z pierwszego układu równań jest kombinacją liniową równań drugiego układu i na odwrót.

Twierdzenie: Zbiory rozwiązań układów równoważnych są identyczne.

Dowód: Rozważmy dwa układy równań liniowych:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

oraz

$$c_{i1}x_1 + \dots + c_{in}x_n = d_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Wystarczy dowieść, że jeśli układy te są równoważne, to każde rozwiązanie pierwszego układu jest także rozwiązaniem drugiego.

Jeśli układy są równoważne, to i -te równanie drugiego układu jest kombinacją liniową równań pierwszego układu o pewnych współczynnikach s_{i1}, \dots, s_{im} .

Zatem, i -te równanie drugiego układu można przedstawić w postaci

$$\sum_{k=1}^m s_{ik}(a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n) = \sum_{k=1}^m s_{ik}b_k,$$

przy czym $c_{ij} = \sum_{k=1}^m s_{ik}a_{kj}$ oraz $d_i = \sum_{k=1}^m s_{ik}b_k$. Podstawiając dowolne rozwiązanie x_1, \dots, x_n pierwszego układu otrzymujemy równość

$\sum_{k=1}^m s_{ik}b_k = \sum_{k=1}^m s_{ik}b_k$, z której wynika, że jest to także rozwiązanie i -tego (czyli każdego, bo i może być dowolne) równania drugiego układu. \square

Uwaga: Układy możemy przedstawić w postaci macierzowej, $Ax = b$ i $Cx = d$, gdzie $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$, $b \in \mathbb{K}^m$, $C = [c_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{l,n}$ i $d \in \mathbb{K}^l$. Drugi układ otrzymamy z pierwszego przez pomnożenie jego stron z lewej strony przez macierz $S = [s_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{l,m}$. Mamy więc $C = SA$, $d = Sb$.

Rozwiązania układu równań liniowych są rozwiązaniami dowolnego układu, który możemy otrzymać mnożąc strony przez macierz, ale taki układ może mieć więcej rozwiązań. Na przykład, mnożąc strony przez macierz zerową otrzymamy układ, którego rozwiązaniem jest każdy wektor $x \in \mathbb{K}^n$.

Układ równań liniowych $Ax = b$ możemy przedstawić w postaci

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

gdzie wektory $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ są kolumnami macierzy A . Odpowiada to przedstawieniu macierzy A w postaci blokowo-wierszowej. Interpretację rozwiązania x_1, \dots, x_n jako współczynników kombinacji liniowej kolumn macierzy A , która to kombinacja jest równa wektorowi prawej strony, będziemy eksploatować dalej. Tymczasem możemy zauważyć, że jednorodny układ równań, który otrzymamy biorąc $b = 0$, ma rozwiązanie różne od 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory a_1, \dots, a_n są liniowo zależne. Jest tak zawsze dla $n > m$.

Rząd macierzy

Def. Rząd kolumnowy macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ jest to wymiar rozpiętej przez kolumny tej macierzy podprzestrzeni przestrzeni \mathbb{K}^m .

Rząd wierszowy macierzy A jest to wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{K}^{1,n}$ rozpiętej przez wiersze macierzy A .

Inaczej mówiąc, rząd kolumnowy macierzy A jest maksymalną liczbą niezależnych liniowo kolumn tej macierzy, a rząd wierszowy macierzy jest maksymalną liczbą jej niezależnych liniowo wierszy.

Twierdzenie: Rząd kolumnowy dowolnej macierzy jest równy jej rzędowi wierszowemu.

Dowód: Oznaczmy rząd kolumnowy macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ literą k , a jej rząd wierszowy literą w . Symbolem A_1 oznaczmy macierz $m \times k$, której kolumny są liniowo niezależnymi kolumnami macierzy A . Rząd wierszowy macierzy A_1 oznaczmy w_1 ; jest jasne, że rząd kolumnowy macierzy A_1 jest równy k , a $w_1 \leq w$. Niech A_2 oznacza macierz $w_1 \times k$, otrzymaną z A_1 przez wybranie w_1 niezależnych liniowo wierszy.

Przypuśćmy, że $k > w_1$. Wtedy układ równań $A_2x = 0$ ma rozwiązanie $x \neq 0$ (bo kolumny macierzy A_2 są wektorami w \mathbb{K}^{w_1} , więc gdy jest ich więcej niż w_1 , to są liniowo zależne). Ale ponieważ wektor x jest także rozwiązaniem układu $A_1x = 0$ (oba układy równań są równoważne), więc to oznacza liniową zależność kolumn macierzy A_1 . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $k \leq w_1$.

Mamy zatem $k \leq w$. Aby dowieść, że również $w \leq k$ wystarczy rozważyć macierz A^T . Jej rząd kolumnowy jest równy w , a wierszowy — k . \square

Def. Rzędem macierzy A nazywamy liczbę, która jest jej rzędem kolumnowym i jednocześnie wierszowym. Będziemy oznaczać go symbolem $\text{rank } A$. Macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, której kolumny są liniowo niezależne (tj. $\text{rank } A = n$) nazywamy macierzą kolumnowo regularną. Macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, której wiersze są liniowo niezależne (tj. $\text{rank } A = m$) nazywamy macierzą wierszowo regularną.

Macierze kolumnowo regularne i wierszowo regularne będziemy określać wspólnym mianem macierzy pełnego rzędu, a pozostałe to macierze niepełnego rzędu.

Jest oczywiste, że $\text{rank } A^T = \text{rank } A$. Łatwo jest również pokazać (zostawiam to na ćwiczenia), że dla macierzy $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ jest $\text{rank } A^H = \text{rank } A$.

Obraz i jądro macierzy

Def. Obrazem macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ jest przestrzeń rozpięta przez kolumny tej macierzy. Jej wymiar jest równy rzędowi macierzy A . Do oznaczenia tej przestrzeni użyjemy symbolu $\text{im } A$. (ang. *image* — obraz)

Jądrem (albo przestrzenią zerową) macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ nazywamy zbiór wektorów $\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Zbiór ten jest podprzestrzenią liniową przestrzeni \mathbb{K}^n ; będziemy go oznaczać symbolem $\ker A$ (ang. *kernel* — jądro).

Mając dowolną macierz A możemy łatwo znaleźć bazę jej obrazu; wystarczy wybrać liniowo niezależne kolumny. Nieco trudniejsze jest znalezienie bazy jądra; w tym celu zauważmy, że wymiar jądra nie zmienia się, jeśli poprzestawiamy kolumny.

Możemy tak poprzestawiać kolumny, aby pierwsze $r = \text{rank } A$ kolumn otrzymanej macierzy \hat{A} było niezależne liniowo. Macierz \hat{A} przedstawimy w postaci blokowej, $[A_1, A_2]$, z blokiem A_1 pełnego rzędu o wymiarach $m \times r$ i blokiem A_2 , którego kolumny są kombinacjami liniowymi kolumn bloku A_1 . Wobec tego istnieje macierz $B \in \mathbb{K}^{r,n-r}$ (utworzona ze współczynników tych kombinacji), taka że $A_2 = A_1 B$. Niech $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$. Wektor ten możemy przedstawić w postaci blokowej, $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$, dla $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{K}^r$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{K}^{n-r}$. Wektor $\hat{\mathbf{x}}$ jest elementem przestrzeni $\ker \hat{A}$ wtedy, gdy

$$\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = A_1(\mathbf{x}_1 + B\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}.$$

Macierz A_1 jest kolumnowo regularna, z czego natychmiast wynika, że jej jądro jest podprzestrzenią zerową. Wobec tego musi być $\mathbf{x}_1 + B\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, a zatem $\mathbf{x}_1 = -B\mathbf{x}_2$. Mamy stąd

$$\ker \hat{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -B \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2: \mathbf{x}_2 \in \mathbb{K}^{n-r} \right\}.$$

Ponieważ wektor $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{K}^{n-r}$ można wybrać dowolnie, więc bazę przestrzeni $\ker \hat{A}$ otrzymamy biorąc np. wektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-r} \in \mathbb{K}^{n-r}$. Wtedy otrzymamy bazę

złożoną z wektorów

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{n-r} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{n-r} \\ \mathbf{e}_{n-r} \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{b}_i jest i -tą kolumną macierzy B . Bazę przestrzeni $\ker A$ otrzymamy przedstawiając odpowiednio współczynniki wektorów $\hat{\mathbf{x}}_i$. Wymiar tej przestrzeni, jak się przekonaaliśmy, jest równy $n - r = n - \text{rank } A$. Natychmiast wynika stąd

Stwierdzenie: Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ zachodzi równość

$$n = \dim \ker A + \dim \text{im } A.$$

Twierdzenie: Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ zachodzą równości

$$\mathbb{C}^m = \text{im } A \oplus \ker A^H, \quad \mathbb{C}^n = \text{im } A^H \oplus \ker A$$

(dla $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ lub $A \in \mathbb{Q}^{m,n}$ sprzężenie hermitowskie macierzy zastępujemy przez transpozycję).

Dowód: Wystarczy udowodnić pierwszą z tych równości. Obie przestrzenie, $\text{im } A$ i $\ker A^H$, są podprzestrzeniami przestrzeni \mathbb{C}^m . Jeśli $\mathbf{y} \in \text{im } A$, to istnieje wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, taki że $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Jeśli równocześnie $\mathbf{y} \in \ker A^H$, czyli $A^H\mathbf{y} = \mathbf{0}$, to $\mathbf{y}^H\mathbf{y} = \mathbf{x}^H A^H A \mathbf{x} = 0$, ale $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$ (dla pewnych liczb zespolonych y_1, \dots, y_m), a zatem $\mathbf{y}^H\mathbf{y} = \sum_{k=1}^m |y_k|^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $y_1 = \dots = y_m = 0$, czyli $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Tak więc $\text{im } A \cap \ker A^H = \{\mathbf{0}\}$, czyli suma algebraiczna tych przestrzeni jest sumą prostą. Wymiar tej sumy jest więc równy

$$\dim(\text{im } A \oplus \ker A^H) = \dim \text{im } A + \dim \ker A^H = \text{rank } A + (m - \text{rank } A^H) = m,$$

co kończy dowód, bo jeśli wymiar podprzestrzeni jest skończony i równy wymiarowi przestrzeni, to ta podprzestrzeń jest niewłaściwa. \square

Uwaga: Twierdzenie to dotyczy macierzy o współczynnikach zespolonych, rzeczywistych lub wymiernych, ale nie można go uogólnić na przypadek współczynników należących do dowolnego ciała. Istotnie, w dowodzie skorzystaliśmy z pojęcia wartości bezwzględnej i uporządkowania liczb rzeczywistych przez relację „ \leq ”.

Interpretacja iloczynu macierzy

Niech $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{K}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{n,l}$. Mamy

$$AB = \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k b_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k b_{kl} \right].$$

Kolumny iloczynu są więc kombinacjami liniowymi kolumn macierzy A , a zatem $\text{im}(AB) \subset \text{im} A$, skąd wynika

$$\text{rank}(AB) = \dim \text{im}(AB) \leq \text{rank} A.$$

Podobnie, wiersze iloczynu macierzy są kombinacjami wierszy drugiego czynnika (macierzy B); możemy stąd wywnioskować, że $\text{im}(AB)^T \subset \text{im} B^T$, a stąd $\text{rank}(AB) \leq \text{rank} B$. Ostatecznie, $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank} A, \text{rank} B)$.

Przykład: Rząd obu macierzy,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

jest równy 2. Ich iloczyn jest macierzą zerową 2×2 , a zatem jego rząd jest równy 0. Z drugiej strony, rząd iloczynu kwadratowych macierzy $n \times n$ pełnego rzędu jest równy n .

Dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{K}^1$ mamy $(AB)x = A(Bx)$, jako że mnożenie macierzy jest łączne. Ponieważ $ABx \in \mathbb{K}^m$, więc macierz $C = AB$ opisuje przekształcenie liniowe, które jest złożeniem przekształcenia $\mathbb{K}^1 \rightarrow \mathbb{K}^n$ reprezentowanego przez macierz B i przekształcenia $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ reprezentowanego przez A .

Stwierdzenie, że rząd iloczynu macierzy jest nie większy niż rząd któregośkolwiek czynnika możemy też uzasadnić geometrycznie, zauważając, że obraz dowolnej podprzestrzeni $X \in \mathbb{K}^n$ w przekształceniu liniowym $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ jest podprzestrzenią $Y \in \mathbb{K}^m$, której wymiar nie może być większy niż $\dim X$.

Macierze nieosobliwe

Dowolna macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ określa przekształcenie przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^n . Pokażemy, że macierz jest nieosobliwa (czyli istnieje jej odwrotność) wtedy i tylko wtedy, gdy jest pełnego rzędu. Istotnie, kolumny a_1, \dots, a_n macierzy pełnego rzędu są liniowo niezależne i jest ich n , czyli rozpięta przez nie podprzestrzeń $\text{im} A$ przestrzeni \mathbb{K}^n jest niewłaściwa. Kolumny macierzy A stanowią bazę przestrzeni \mathbb{K}^n , a więc dowolny wektor $y \in \mathbb{K}^n$ można przedstawić w postaci $y = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$, przy czym układ współczynników x_1, \dots, x_n spełniających tę równość jest tylko jeden. Istnieje zatem przekształcenie odwrotne do A , które dowolnemu wektorowi $y \in \mathbb{K}^n$ przyporządkowuje wektor $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{K}^n$. Przekształcenie to jest oczywiście liniowe, a więc istnieje macierz $B \in \mathbb{K}^{n,n}$, która reprezentuje to przekształcenie. Iloczyn BA tych macierzy reprezentuje złożenie

obu tych przekształceń; przekształcenie to jest przekształceniem tożsamościowym przestrzeni \mathbb{K}^n i jego macierz jest jednostkowa.

Z drugiej strony, jeśli kolumny macierzy A są liniowo zależne, to reprezentowane przez nią przekształcenie nie jest różnowartościowe. Gdyby istniała odwrotność macierzy A , to reprezentowałaby przekształcenie odwrotne, które nie istnieje. \square

Funkcjonały liniowe i przestrzeń sprzężona

Def. Funkcjonałem liniowym w przestrzeni liniowej V nad ciałem \mathbb{K} nazywamy każde przekształcenie liniowe $V \rightarrow \mathbb{K}$ (przypominam, że zbiór \mathbb{K} jest przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K}).

Def. Zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych w ustalonej przestrzeni V nad ciałem \mathbb{K} (z odpowiednio określonymi działaniami) jest przestrzenią liniową nad \mathbb{K} . Przestrzeń tę nazywamy przestrzenią sprzężoną (albo dualną) z V i oznaczamy symbolem V^* (który jest równoważny oznaczeniu $L(V; \mathbb{K})$, ale krótszy).

Def. Funkcjonał zerowy jest to funkcjonał, który każdemu wektorowi $x \in V$ przyporządkowuje 0. Funkcjonał ten jest wektorem zerowym przestrzeni V^* .

Wymiary przestrzeni V i V^* są równe (co wynika z wcześniejszych ustaleń na temat wymiaru przestrzeni $L(V_1; V_2)$). Zauważmy, że zarówno elementy przestrzeni V^* są funkcjonałami liniowymi w przestrzeni V , jak i odwrotnie — dowolny element x przestrzeni V określa pewien funkcjonał liniowy x w przestrzeni V^* , za pomocą wzoru

$$\forall \varphi \in V^* \quad x(\varphi) = \varphi(x).$$

Przestrzeń $L(V^*; \mathbb{K}) = V^{**}$ funkcjonałów liniowych na V^* możemy więc utożsamić z przestrzenią V (na jednym z dalszych wykładów wrócimy do tego). Cecha pary przestrzeni V i V^* , która pozwala na „symetryczne” ich traktowanie, nazywa się dualnością.

Def. Niech układ wektorów x_1, \dots, x_n będzie bazą przestrzeni V . Układ wektorów $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ nazywamy bazą dualną do x_1, \dots, x_n jeśli spełnione są równania

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} , przypominam, to symbol Kroneckera, 1 dla $i = j$ i 0 w przeciwnym razie).

Natychmiast zauważamy, że wybór bazy przestrzeni V określa bazę dualną jednoznacznie.

Ponadto, jeśli układ $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ jest bazą dualną bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ przestrzeni V , to baza $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jest dualna względem bazy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Przykłady

1. Przestrzeń sprzężona z \mathbb{K}^n to $\mathbb{K}^{1,n}$. Baza sprzężona z bazą $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ to układ wektorów (macierzy wierszowych) $\mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{e}_n^T$.
2. Elementy przestrzeni sprzężonej z $\mathbb{R}[x]_n$ (przestrzenia wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n ; wymiar tej przestrzeni jest równy $n + 1$) są funkcjami przyporządkowującymi dowolnemu wielomianowi stopnia co najwyżej n pewną liczbę rzeczywistą.

Znajdziemy bazę sprzężoną z bazą potęgową, której elementami są wektory (wielomiany) $1, x, x^2, \dots, x^n$. Łatwo jest przekonać się, że jeśli przyjmiemy funkcjonal φ_0 określony wzorem $\varphi_0(w) = w(0)$, oraz funkcjonały $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, takie że $\varphi_k(w) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} w(x)|_{x=0}$, to otrzymamy bazę dualną.

Niech x_0, \dots, x_n będą ustalonymi, parami różnymi liczbami. Układ funkcjonałów ψ_0, \dots, ψ_n , określonych wzorami $\psi_i(w) = w(x_i)$ jest bazą przestrzeni sprzężonej z $\mathbb{R}[x]_n$. Łatwo jest znaleźć dualną do niej bazę przestrzeni wielomianów. Jej elementami są wielomiany w_0, \dots, w_n , takie że

$$w_j(x) = \prod_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Istotnie, wszystkie te funkcje są wielomianami stopnia n , oraz $w_j(x_i) = \delta_{ij}$.

Obraz i jądro przekształcenia liniowego

Rozszerzymy pojęcie macierzy, dopuszczając, aby jej elementami były wektory i funkcjonały (czyli też wektory, z przestrzeni sprzężonej). W zasadzie jest to uogólnienie wcześniejszych rozważań na temat macierzy blokowych. Dodawanie takich macierzy polega na dodaniu odpowiednich wektorów (albo funkcjonałów). Mnożenie takiej macierzy przez skalar, a także przez macierz, której współczynnikami są skalary, jest określone za pomocą tych samych wzorów co mnożenie macierzy liczbowych (tylko, że symbole mnożenia i dodawania współczynników mają inne znaczenie).

Macierz, której współczynnikami są funkcjonałami możemy pomnożyć przez macierz, której współczynnikami są wektorami, przy czym „mnożenie” funkcjonału φ i wektora \mathbf{x} polega na obliczeniu skalaru — wartości wyrażenia $\varphi(\mathbf{x})$.

Uwaga: to mnożenie *nie jest* przemienne, tj. iloczyn $\mathbf{x}\varphi$, w którym taka kolejność czynników wynika z kolejności mnożonych macierzy, opisuje pewne przekształcenie liniowe; możemy je „pomnożyć” z prawej strony przez wektor \mathbf{y} (współczynnik kolejnej macierzy, jeśli taka występuje w rozpatrywanym wyrażeniu) i otrzymać wektor $\mathbf{x}\varphi(\mathbf{y})$ (iloczyn wektora \mathbf{x} i liczby $\varphi(\mathbf{y})$), który jest obrazem wektora \mathbf{y} w tym przekształceniu liniowym.

Łatwo jest sprawdzić, że wymienione działania na macierzach, których współczynnikami są wektorami i funkcjonałami, mają podobne własności algebraiczne jak dodawanie i mnożenie macierzy liczbowych (w tym łączność, rozdzielność), możemy zatem w podobny sposób przekształcać wzory z takimi macierzami.

Niech V_1 i V_2 będą ustalonymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem \mathbb{K} , o wymiarach odpowiednio n i m . Przestrzeń V_1 jest więc izomorficzna z \mathbb{K}^n , a V_2 jest izomorficzna z \mathbb{K}^m . Ustalmy bazę $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ przestrzeni V_1 i ustawmy jej elementy w macierz wierszową $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$. Podobnie, z elementów $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

bazy dualnej ustawimy macierz kolumnową $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$.

Podobnie, biorąc elementy $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ bazy przestrzeni V_2 i elementy jej bazy

dualnej ψ_1, \dots, ψ_m , określimy macierze $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m]$ i $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}$.

Możemy teraz zapisać formalnie wiele operacji, o których dotychczas mogliśmy tylko gestykulować. Weźmy dowolny wektor $\mathbf{z} \in V_1$. Wyrażenie

$$\Phi \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

jest wektorem w przestrzeni \mathbb{K}^n (tj. liczbową macierzą kolumnową), której współczynniki odpowiadają przedstawieniu wektora \mathbf{z} w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Istotnie,

$$\varphi_i(c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n) = c_1 \varphi_i(\mathbf{x}_1) + \dots + c_n \varphi_i(\mathbf{x}_n) = c_i.$$

Podobnie, mając dowolny wektor $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{K}^n$ możemy wyrazić kombinację liniową wektorów bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ o współczynnikach c_1, \dots, c_n w postaci iloczynu macierzy $X\mathbf{c}$.

Macierze X i Φ są swoimi odwrotnościami, w tym sensie, że iloczyn $X\Phi$ reprezentuje przekształcenie tożsamościowe przestrzeni V_1 ; dla dowolnego wektora $\mathbf{z} \in V_1$ wyrażenie $X\Phi \mathbf{z}$ jest równe \mathbf{z} .

Podobnie, iloczyn ΦX jest przekształceniem tożsamościowym przestrzeni \mathbb{K}^n . Dla dowolnego wektora (macierzy kolumnowej) $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^n$ zachodzi równość $\Phi X \mathbf{c} = \mathbf{c}$, a zatem możemy stwierdzić, że iloczyn ΦX jest macierzą jednostkową I_n (która reprezentuje tożsamościowe przekształcenie przestrzeni \mathbb{K}^n). Możemy więc napisać $\Phi = X^{-1}$, albo $X = \Phi^{-1}$, rozumiejąc to w ten sposób, że jeśli np. macierz X jest przekształceniem liniowym $\mathbb{K}^n \rightarrow V_1$, to Φ opisuje przekształcenie odwrotne.

Tak więc mnożenie przez opisane wyżej macierze, które utożsamimy z bazami odpowiednich przestrzeni, określa izomorfizmy przestrzeni V_1 z \mathbb{K}^n i V_2 z \mathbb{K}^m . Weźmy teraz dowolną macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Określa ona pewne przekształcenie liniowe przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^m (polega ono na pomnożeniu macierzy A i przekształcanego wektora $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^n$). Wyrażenie $YA\Phi$ opisuje pewne przekształcenie liniowe g przestrzeni V_1 w V_2 . Jeśli obliczamy obraz w tym przekształceniu wektora $\mathbf{z} \in V_1$, to $\Phi \mathbf{z}$ jest macierzą współczynników wektora \mathbf{z} w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, zaś $A\Phi \mathbf{z}$ jest macierzą współczynników wektora $g(\mathbf{z})$ w bazie $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$. Wreszcie, $g(\mathbf{z}) = YA\Phi \mathbf{z}$.

Z wcześniejszych rozważań wynika, że jeśli ustalimy bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$, to każdemu przekształceniu liniowemu $g: V_1 \rightarrow V_2$ odpowiada jednoznacznie określona macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Wybierając bazy przestrzeni V_1 i V_2 ustaliliśmy więc izomorfizm przestrzeni przekształceń, $L(V_1; V_2)$ i przestrzeni macierzy, $\mathbb{K}^{m,n}$.

Def. Jądrem przekształcenia liniowego $g: V_1 \rightarrow V_2$ nazywamy zbiór $\{\mathbf{x} \in V_1: g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Jest ono podprzestrzenią liniową przestrzeni V_1 , oznaczamy je symbolem $\ker g$.

Obrazem przekształcenia g jest zbiór $\{\mathbf{y} \in V_2: \exists \mathbf{x} \in V_1 \mathbf{y} = g(\mathbf{x})\}$.

Jest to podprzestrzeń liniowa przestrzeni V_2 , którą oznaczamy symbolem $\operatorname{im} g$.

Możemy teraz poszukiwać obrazu i jądra dowolnego przekształcenia liniowego $g: V_1 \rightarrow V_2$. Jest jasne, że wymiary obrazu i jądra przekształcenia g są takie same jak wymiary obrazu i jądra macierzy A , reprezentującej to przekształcenie w jakichkolwiek bazach X i Y . Mając te bazy i macierz A , możemy wyznaczyć bazę przestrzeni $\operatorname{im} A$ (przez wybranie niezależnych liniowo kolumn, oznaczymy je symbolami $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$, liczba r jest rzędem macierzy A) i mamy

$$\operatorname{im} g = \operatorname{lin}\{Y\mathbf{a}_{i_1}\} \oplus \dots \oplus \operatorname{lin}\{Y\mathbf{a}_{i_r}\}$$

i podobnie, mając bazę przestrzeni $\ker A$ złożoną z wektorów $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-r}$ (sposób ich znalezienia znamy, choć nie do końca; polega on na rozwiązaniu układów równań liniowych, o czym będzie mowa później), mamy

$$\ker g = \operatorname{lin}\{X\mathbf{c}_1\} \oplus \dots \oplus \operatorname{lin}\{X\mathbf{c}_{n-r}\}.$$

Niech układ wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ będzie bazą pewnej przestrzeni V nad \mathbb{K} . Niech macierz X reprezentuje tę bazę, a macierz Φ jej bazę dualną. Wtedy dowolne przekształcenie $g: V \rightarrow V$ możemy przedstawić w postaci $g = XA\Phi$, gdzie A jest pewną macierzą kwadratową. Macierz tę (inaczej: macierz przekształcenia g w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$) możemy przedstawić w postaci $\Phi g X$.

Możemy również przyjąć *dwie* bazy przestrzeni V , reprezentowane odpowiednio przez macierze X i Y . Bazy dualne będą reprezentowane odpowiednio przez macierze Φ i Ψ . Przypuśćmy, że znamy współczynniki dowolnego wektora $\mathbf{z} \in V$ w bazie X . Współczynniki tego wektora w bazie Y możemy obliczyć przez pomnożenie wektora współczynników w bazie X przez macierz zmiany bazy B . Wyraża się ona wzorem $B = \Psi X$.

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że rząd macierzy nie zmienia się wskutek wykonania żadnej z wymienionych niżej operacji:

- pomnożenie kolumny albo wiersza przez dowolny skalar różny od 0,
- dodanie do kolumny (albo wiersza) innej kolumny (albo wiersza) pomnożonej (pomnożonego) przez dowolny skalar,
- przestawienie kolumn (albo wierszy).

2. Udowodnij, że macierze A i A^H mają ten sam rząd.

3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oblicz macierz $F = ABCDE$.

4. Zbadaj, jaki jest rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 7 & -2 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Niech $n \geq 4$ i niech wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ będą niezależne liniowo. Znajdź jądro macierzy $A = [\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y}]$ (macierz jest tu przedstawiona w postaci blokowej, tak aby uwidocznić kolumny).
- Znajdź jądro i obraz przekształcenia liniowego $f: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ określonego wzorem $f(w) = x^2 w''$.
- Wyznacz współczynniki macierzy przekształcenia f z poprzedniego zadania, w bazie potęgowej $1, x, x^2, \dots, x^n$.
- Niech $n > 1$ i niech przekształcenie $g: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_{n-2}$ będzie określone wzorem $g(w) = w''$, a przekształcenie $h: \mathbb{R}[x]_{n-2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ wzorem $h(w) = x^2 w$. Wyznacz macierze tych przekształceń w bazach potęgowych przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$ i $\mathbb{R}[x]_{n-2}$ i oblicz iloczyn tych macierzy (to jest alternatywny sposób rozwiązania poprzedniego zadania).
- Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$ każdy funkcjonal liniowy jest kombinacją liniową wartości funkcji w ustalonych punktach.
- Niech $V = \mathbb{R}[x]_2$. Ponieważ $\dim V^* = \dim V = 3$, więc dowolny funkcjonal liniowy φ w przestrzeni V można przedstawić w postaci $\varphi(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$, czyli $\varphi = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$, gdzie $\varphi_i(f) = f(x_i)$. Znajdź współczynniki w bazie $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ funkcjonału $\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx$.
- Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V , przy czym $n = \dim U < m = \dim V$. Dowolny funkcjonal liniowy $\varphi \in V^*$ jest funkcjonalem liniowym określonym w podprzestrzeni U , czyli $\varphi \in U^*$, a zatem $V^* \subset U^*$. Ale wtedy $m = \dim V^* \leq n = \dim U^*$, a więc mamy sprzeczność. Wyjaśnij, gdzie tu jest błąd i na czym on polega.

Ćwiczenia potwórkowe

- Niech $z = (1, \sqrt{3})$. Oblicz z^{-12} .
- Zbadaj, czy zbiór macierzy zespolonych 2×2 , o postaci

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Jeśli tak, to czy jest to grupa abelowa?

- Oblicz macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{12}.$$

- Oblicz macierz $B = A^3 - 3A^2 + 3A - I_4$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Znajdź zbiór rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{bmatrix} (1, 2) & (2, -1) & (3, 4) & (5, 3) \\ (0, 1) & (1, 0) & (0, 5) & (1, 5) \\ (1, 0) & (0, -1) & (4, 3) & (4, 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (13, 11) \\ (5, 13) \\ (14, 2) \end{bmatrix}.$$

- Znajdź rząd oraz bazę jądra i obrazu macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 5 & -7 \\ -4 & 5 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

- Wskaż wymiar i bazę podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}[x]_4$, składającej się z wielomianów w spełniających warunki $w(-1) = w(1)$ i $w'(0) = 0$.
- Oblicz współczynniki funkcjonału φ w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, danego wzorem

$$\varphi(w) = \int_0^1 w(x) dx,$$

w bazie dualnej do bazy w_0, w_1, w_2 , gdzie $w_0(x) = x(x - a)$, $w_1(x) = x(x + a)$, $w_2(x) = x^2 - a^2$, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Zaproponuj inny (niż z użyciem podanego wyżej wzoru) sposób obliczania wartości $\varphi(w)$ dla ustalonego wielomianu w .

Układy równań liniowych

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi możemy zapisać w czterech równoważnych postaciach. Pierwsza z nich jest „pełna”:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Druga to postać macierzowa,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

z macierzą współczynników $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$, wektorem niewiadomym $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ i wektorem prawej strony $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$. Rozwiązanie układu w tej postaci interpretujemy jak znalezienie wektora (lub zbioru wektorów) \mathbf{x} , którego obrazem w przekształceniu A jest wektor \mathbf{b} .

Trzecia postać polega na przedstawieniu wektora \mathbf{b} jako kombinacji liniowej kolumn macierzy $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ ze współczynnikami x_1, \dots, x_n :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \mathbf{b}.$$

Rozwiązanie układu polega na znalezieniu tych współczynników.

Wreszcie, czwarta postać wygląda następująco:

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) = b_1, \\ \dots \\ \varphi_m(\mathbf{x}) = b_m. \end{cases}$$

Funkcjonał liniowy $\varphi_i \in (\mathbb{K}^n)^*$ dla $i \in \{1, \dots, m\}$ jest tu określony wzorem

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_n]^T) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n.$$

Każde równanie liniowe jest kombinacją liniową równań $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ i $0 = 1$.

Pierwsze n z nich możemy zapisać w postaci $\mathbf{e}_1^H \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{e}_n^H \mathbf{x} = 0$ (macierze $\mathbf{e}_1^H, \dots, \mathbf{e}_n^H$ reprezentują elementy bazy dualnej do $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$), a ostatnie z nich w postaci $0\mathbf{x} = 1$ (macierz zerowa, $0 \in \mathbb{K}^{1,n}$ reprezentuje funkcjonał zerowy, czyli wektor zerowy przestrzeni sprzężonej). Tak więc w i -tym równaniu występuje funkcjonal $\varphi_i = a_{i1}\mathbf{e}_1^H + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n^H$. Rozwiązanie układu polega na znalezieniu takiego wektora \mathbf{x} , dla którego funkcjonały te przyjmują podane wartości.

Na podstawie poznanych dotychczas faktów możemy podać warunek istnienia rozwiązań dowolnego układu równań liniowych oraz zbadać, czym jest zbiór rozwiązań. Macierz $[A, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}]$, otrzymaną przez dołączenie wektora \mathbf{b} jako dodatkowej kolumny do macierzy współczynników nazwiemy macierzą uzupełnioną.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego: Układ m równań liniowych z n niewiadomymi, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej $[A, \mathbf{b}]$. Ponadto, jeśli wektor \mathbf{x} jest rozwiązaniem układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a $\mathbf{z} \in \ker A$, to wektor $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ też jest rozwiązaniem. Każde rozwiązanie można przedstawić w postaci sumy dowolnego innego rozwiązania i pewnego wektora należącego do jądra macierzy A .

Dowód: Lewa strona układu (przedstawiona w drugiej z wymienionych wyżej postaci), po podstawieniu dowolnych liczb x_1, \dots, x_n , reprezentuje pewną kombinację liniową kolumn macierzy A . Wektor prawej strony, równy takiej kombinacji, musi zatem być elementem przestrzeni rozpiętej przez kolumny macierzy A , tj. $\text{im } A$.

Jeśli rząd macierzy uzupełnionej jest większy niż rząd macierzy A , to $\mathbf{b} \notin \text{im } A$, a zatem wektor \mathbf{b} nie jest kombinacją liniową kolumn macierzy A .

Spośród kolumn macierzy A można wybrać bazę przestrzeni $\text{im } A$.

Wektor $\mathbf{b} \in \text{im } A$ ma w tej bazie jednoznacznie określone współczynniki.

Rozwiązanie układu otrzymujemy wstawiając do tego ciągu współczynników zera w miejscach odpowiadających kolumnom nie należącym do bazy.

Jeśli wektor \mathbf{x} jest rozwiązaniem, a $\mathbf{z} \in \ker A$, to $A(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$.

Przypuśćmy, że wektory \mathbf{x} i \mathbf{x}' są rozwiązaniami.

Wtedy $\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}' - A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$, a zatem $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \in \ker A$. \square

Znając pewne rozwiązanie \mathbf{x} układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, możemy przedstawić zbiór wszystkich rozwiązań w postaci sumy algebraicznej zbioru jednoelementowego i podprzestrzeni:

$$\{\mathbf{x}\} + \ker A = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}, A\mathbf{z} = \mathbf{0}\}.$$

O wektorze \mathbf{x} (i każdym innym elemencie tego zbioru) mówimy, że jest to rozwiązanie szczególne układu równań.

Rozwiązanie ogólne układu jest to wyrażenie o postaci

$$\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{n-r} c_k \mathbf{y}_k,$$

w którym wektor \mathbf{x} jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym układu, a układ wektorów $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-r}$ jest bazą przestrzeni $\ker A$. Wartość tego wyrażenia dla dowolnych liczb c_1, \dots, c_{n-r} jest rozwiązaniem szczególnym, każdemu rozwiązaniu szczególnemu odpowiada inny układ liczb c_1, \dots, c_{n-r} i nie ma żadnych innych rozwiązań.

Metoda rozwiązywania układów równań liniowych

W wyznaczaniu zbioru rozwiązań można wyróżnić dwa cele: sprawdzenie, czy układ jest niesprzeczny oraz znalezienie dowolnego rozwiązania szczególnego i przestrzeni $\ker A$. Ogólna metoda rozwiązywania układu równań polega na takim jego przekształcaniu, aby otrzymać układ *równoważny* (z dokładnością do uporządkowania niewiadomych), łatwiejszy do rozwiązania. Celem jest otrzymanie układu dostatecznie prostego, aby łatwo było wskazać zbiór jego rozwiązań (a w szczególności przekonać się, czy jest on niepusty).

Przedstawiona niżej metoda rozwiązywania układów równań liniowych znana jest pod nazwą **eliminacji Gaussa**, choć była używana znacznie wcześniej niż Gauss mógł się nią zajmować (ponoć jedna z chińskich ksiąg z czasów dynastii Han zawiera opis rozwiązywania układów dwóch i trzech równań).

Układ możemy reprezentować za pomocą macierzy A i wektora \mathbf{b} , albo za pomocą macierzy uzupełnionej, $[A, \mathbf{b}]$, o wymiarach $m \times n + 1$. Przekształcając układ będziemy wykonywać następujące czynności:

- zmianę kolejności równań układu (odpowiada to przestawianiu wierszy macierzy $[A, \mathbf{b}]$),
- zmianę kolejności niewiadomych (odpowiada to przestawianiu kolumn macierzy A ; kolejno wykonane przestawienia trzeba zapamiętać, aby po obliczeniu niewiadomych odpowiednio je uporządkować),
- dodanie do wiersza macierzy $[A, \mathbf{b}]$ innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę.

Przekształcenie układu wymaga wykonania $r = \text{rank } A \leq \min(m, n)$ kroków. Przed wykonaniem k -tego kroku mamy macierz $A^{(k-1)}$ i wektor prawej strony $\mathbf{b}^{(k-1)}$, które przedstawiamy w postaci

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{R}^{(k-1)} & & & \\ \hline & \mathbf{T}^{(k-1)} & & \\ \hline & \mathbf{a}_{kk}^{(k-1)} & \mathbf{a}_{k,k+1}^{(k-1)} & \dots & \mathbf{a}_{kn}^{(k-1)} \\ & \mathbf{a}_{k+1,k}^{(k-1)} & \mathbf{a}_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \dots & \mathbf{a}_{k+1,n}^{(k-1)} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \mathbf{a}_{mk}^{(k-1)} & \mathbf{a}_{m,k+1}^{(k-1)} & \dots & \mathbf{a}_{mn}^{(k-1)} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1^{(k-1)} \\ \mathbf{b}_k^{(k-1)} \\ \mathbf{b}_{k+1}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^{(k-1)} \end{array} \right].$$

Blok $\mathbf{R}^{(k-1)}$ o wymiarach $k-1 \times k-1$ jest macierzą trójkątną górną, a pod nim znajduje się (zaznaczony symbolem 0) blok złożony z samych zer. Przed pierwszym krokiem ($k=1$) mamy macierz $A^{(0)} = A$ z pustym blokiem $\mathbf{R}^{(0)}$ i wektor $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$ (na początku którego mamy pusty blok $\mathbf{b}_1^{(0)}$).

Jeśli wszystkie współczynniki macierzy $A^{(k-1)}$ w wierszach k, \dots, m są równe 0, to $r = k-1$ i praca polegająca na przekształcaniu układu została zakończona. W przeciwnym razie, jeśli $\mathbf{a}_{kk}^{(k-1)} = \mathbf{a}_{k+1,k}^{(k-1)} = \dots = \mathbf{a}_{mk}^{(k-1)} = 0$, to musimy k -tą kolumnę macierzy $A^{(k)}$ zamienić miejscami z inną kolumną, która w k -tym wierszu lub niżej ma różny od zera współczynnik (a zatem zmieniamy kolejność niewiadomych).

Jeśli po ewentualnym przestawieniu kolumn współczynnik na diagonalu w k -tej kolumnie jest równy 0, to wyszukujemy w tej kolumnie poniżej diagonalu współczynnik różny od zera. Jeśli znajdziemy go w wierszu j -tym, to przestawiamy wiersze k i j i zamieniamy odpowiednie współrzędne wektora prawej strony.

W ten sposób zapewniliśmy, że $\mathbf{a}_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ (**uwaga:** powinienem ten współczynnik oznaczyć inaczej, ale nadmierna liczba różnych symboli może być groźniejsza niż drobna nieścisłość). Możemy więc wykonać następujące przekształcenie: dla $i = k+1, \dots, m$ obliczamy $l_{ik} = \mathbf{a}_{ik}^{(k-1)} / \mathbf{a}_{kk}^{(k-1)}$ i przypisujemy $\mathbf{a}_{ij}^{(k)} := \mathbf{a}_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} \mathbf{a}_{kj}^{(k-1)}$ dla $j = 1, \dots, n$ (w szczególności wynika stąd $\mathbf{a}_{ij}^{(k)} = 0$ dla $j \leq k$, nie musimy tego obliczać) oraz $\mathbf{b}_i^{(k)} := \mathbf{b}_i^{(k-1)} - l_{ik} \mathbf{b}_k^{(k-1)}$.

W ten sposób w k -tej kolumnie pod diagonalą pojawiają się zera, a przekształcona macierz $A^{(k)}$ i wektor prawej strony $\mathbf{b}^{(k)}$ reprezentują równoważny układ równań liniowych.

Po wykonaniu r takich kroków otrzymamy macierz uzupełnioną $[A^{(r)}, \mathbf{b}^{(r)}]$, która reprezentuje układ równań liniowych równoważny układowi wyjściowemu. Macierz ta ma następującą postać blokową:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{R}^{(r)} & \mathbf{T}^{(r)} & \mathbf{b}_1^{(r)} \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{b}_2^{(r)} \end{array} \right].$$

Blok $\mathbf{R}^{(r)}$ o wymiarach $r \times r$ jest macierzą trójkątną górną. Ponieważ wszystkie współczynniki na diagonalu tego bloku są różne od 0, więc jest to macierz nieosobliwa.

Blok $\mathbf{T}^{(r)}$ ma wymiary $n-r \times r$ i w ogólności może mieć dowolne współczynniki. Poniżej bloków $\mathbf{R}^{(r)}$ i $\mathbf{T}^{(r)}$ mamy bloki z wszystkimi współczynnikami równymi 0. Bloki $\mathbf{b}_1^{(r)} \in \mathbb{K}^r$ i $\mathbf{b}_2^{(r)} \in \mathbb{K}^{m-r}$ powstają z podziału przekształconego wektora prawej strony. Otrzymany układ równań można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(r)} \mathbf{x}_1 + \mathbf{T}^{(r)} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1^{(r)}, \\ 0 \mathbf{x}_1 + 0 \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2^{(r)}. \end{cases}$$

Przeprowadzimy dyskusję możliwych rozwiązań układu o tej szczególnej postaci.

Macierz $\widehat{L}_k^{-1} = I_m - \widehat{l}_k e_k^T$ jest więc macierzą trójkątną dolną, która poza diagonalą i k -tą kolumną ma wszystkie współczynniki równe 0. Zatem, macierz $L^{-1} = \widehat{L}_r^{-1} \dots \widehat{L}_1^{-1}$ jest trójkątna dolna. Mamy więc

$$R = L^{-1}PAQ^{-1}, \quad \text{czyli} \quad PAQ^{-1} = LR.$$

Macierze P i Q są macierzami permutacji. W wyniku eliminacji otrzymaliśmy więc czynniki L i R rozkładu trójkątnego macierzy powstałej z A przez przestawienie wierszy i kolumn.

Twierdzenie: Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ rzędu r istnieją macierze permutacji $P \in \mathbb{K}^{m,m}$ i $Q \in \mathbb{K}^{n,n}$, oraz macierz trójkątna dolna $L \in \mathbb{K}^{m,m}$ i macierz trójkątna górna $R \in \mathbb{K}^{m,n}$, takie że

$$PAQ^{-1} = LR$$

przy czym współczynniki na diagonalu macierzy L są równe 1 i w kolumnach $r+1, \dots, m$ tej macierzy wszystkie inne współczynniki są równe 0.

Dla ustalonych macierzy P i Q rozkład ten (o ile istnieje) jest jednoznaczny.

Dowód: Istnienie opisanych w twierdzeniu macierzy wynika z wykonalności procedury eliminacji i z rachunków przeprowadzonych przed chwilą. Pozostało zatem udowodnienie jednoznaczności rozkładu, jeśli macierze P i Q są ustalone. Oznaczmy $\widehat{A} = PAQ^{-1}$. Macierz tę przedstawimy w postaci blokowej,

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

z blokiem A_{11} o wymiarach $r \times r$ ($r = \text{rank } A$), A_{12} $r \times n - r$, A_{21} $m - r \times r$ i A_{22} $m - r \times n - r$. Jeśli $r = m$ lub $r = n$, to odpowiednie bloki będą puste. Blok A_{11} jest macierzą nieosobliwą.

Macierze L i R również przedstawimy w postaci

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

z blokami L_{11} i R_{11} nieosobliwymi o wymiarach $r \times r$. Mamy wtedy $A_{11} = L_{11}R_{11}$. Gdyby istniały również inne macierze $r \times r$, takie że $A_{11} = \widehat{L}_{11}\widehat{R}_{11}$, to mielibyśmy równość

$$L_{11}R_{11} = \widehat{L}_{11}\widehat{R}_{11}, \quad \text{czyli} \quad \widehat{L}_{11}^{-1}L_{11} = \widehat{R}_{11}R_{11}^{-1},$$

przy czym macierz $\widehat{L}_{11}^{-1}L_{11}$ jest trójkątna dolna, macierz $\widehat{R}_{11}R_{11}^{-1}$ jest trójkątna górna, a więc obie te macierze są diagonalne. Ponieważ wszystkie współczynniki

na diagonalu macierzy \widehat{L}_{11}^{-1} i L_{11} są równe 1, więc iloczyn tych macierzy jest macierzą jednostkową $r \times r$. Stąd

$$\widehat{L}_{11}^{-1}L_{11} = I_r = \widehat{R}_{11}R_{11}^{-1}, \quad \text{a zatem} \quad \widehat{L}_{11} = L_{11}, \quad \widehat{R}_{11} = R_{11}.$$

Pozostałe bloki macierzy L i R znajdujemy tak: $A_{21} = L_{21}R_{11}$, czyli $L_{21} = A_{21}R_{11}^{-1}$. Z założeń twierdzenia wynika, że $L_{22} = I_{m-r}$. Musi też być $R_{12} = L_{11}^{-1}A_{21}$. Tak więc wszystkie bloki macierzy L i R są określone jednoznacznie. \square

Uwaga: Jeśli macierz A nie jest kwadratowa nieosobliwa, to macierz P lub Q w rozkładzie $PAQ^{-1} = LR$ może nie być określona jednoznacznie. Istotnie, jeśli po zakończeniu eliminacji zostaną wiersze lub kolumny z wszystkimi współczynnikami równymi 0, to możemy je przestawiać dowolnie. Jeśli $r < m$, to blok L_{22} macierzy L jest niepusty. Możemy zauważyć, że wybierając dowolne współczynniki w tym bloku zawsze będziemy mieli równość $\widehat{A} = LR$.

Koszt metody eliminacji Gaussa

Eliminacja Gaussa jest użyteczną i dzięki prostocie popularną metodą numeryczną rozwiązywania układów równań liniowych. Sposób jej zaprogramowania będzie przedstawiony później, a teraz zbadamy jej koszt.

Czas działania dowolnej procedury jest proporcjonalny do liczby wykonanych działań. Ponieważ różne komputery wykonują te działania z różną prędkością (i wciąż są ulepszane), więc bardziej obiektywny od mierzenia czasu obliczeń sposób oceniania jakości algorytmów polega na obliczeniu lub oszacowaniu liczby działań. Prawie nigdy nie liczy się *wszystkich* działań, tylko wyróżnione działania dominujące, to znaczy takie, których wykonanie zawsze trwa dłużej niż czas wykonywania pozostałych działań pomnożony przez pewien czynnik stały.

Wygodną jednostką do tych obliczeń jest IOPMS, tj. suma czasu jednego mnożenia i jednego dodawania lub odejmowania współczynników macierzy (które są najczęściej reprezentowane jako liczby zmiennopozycyjne). Taka para operacji jest działaniem dominującym w większości algorytmów numerycznej algebry liniowej. Obliczymy koszt (w tych jednostkach) wykonania rozkładu macierzy metodą eliminacji Gaussa, bez przestawiania wierszy i kolumn (które nie wymaga wykonywania działań zmiennopozycyjnych).

Uwaga: Nie obliczamy tu całego kosztu rozwiązywania układu równań, bo nie zajmiemy się przekształcaniem wektora prawej strony (to na ćwiczeniach).

Załóżmy, że macierz rzeczywista A ma wymiary $m \times n$, a jej rząd jest równy r . Musimy zatem wykonać r kroków eliminacji. Blok macierzy A , który przetwarzamy w k -tym kroku ma wymiary $s \times t$, gdzie $s = m - k + 1$, $t = n - k + 1$. Przetwarzając ten blok wykonujemy $s - 1$ dzieleni (w celu obliczenia współczynników $l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$), a następnie $(s - 1)(t - 1)$ mnożeń i odejmowań (podczas obliczania $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} * a_{kj}^{(k-1)}$ dla $i = k + 1, \dots, m$, $j = k + 1, \dots, n$). Czas dzielenia przyjmujemy równy 1OPMS. Zatem na działania zmiennopozycyjne zużyjemy w k -tym kroku $(s - 1)t$ OPMS, czyli $(n - k + 1)(m - k)$ OPMS.

Koszt (sumę liczb operacji zmiennopozycyjnych wykonanych w poszczególnych krokach) znalezienia rozkładu trójkątnego macierzy obliczamy tak:

$$\sum_{k=1}^r (n - k + 1)(m - k) = \sum_{k=1}^r ((n + 1)m - (n + m + 1)k + k^2) =$$

$$rm(n + 1) - (m + n + 1) \sum_{k=1}^r k + \sum_{k=1}^r k^2.$$

Korzystając z tożsamości

$$\sum_{k=1}^r k = \frac{1}{2}r(r + 1), \quad \sum_{k=1}^r k^2 = \frac{1}{6}r(r + 1)(2r + 1),$$

po uporządkowaniu otrzymujemy

$$K(n, m, r) = r \left(m(n + 1) + (r + 1) \left(\frac{1}{6}(2r + 1) - \frac{1}{2}(m + n + 1) \right) \right) \text{OPMS}.$$

W szczególnym przypadku, gdy rozkładana macierz jest kwadratowa i nieosobliwa ($r = m = n$), otrzymamy koszt

$$K(n) = \frac{1}{3}(n^3 - n) \text{OPMS}.$$

Bardzo często w zadaniach praktycznych występują układy równań z tzw. macierzami rzadkimi, których większość współczynników jest równa 0. W takiej sytuacji często można (i zawsze warto, a czasem koniecznie trzeba) zastosować specjalny wariant eliminacji, który nie wykonuje działań zbędnych, dzięki czemu zabiera znacznie mniej czasu. Na przykład, jeśli macierz jest trójdzielna (tj. $a_{ij} = 0$ dla $|i - j| > 1$), to można przeprowadzić eliminację kosztem rzędu n działań.

Konstrukcja obrazu i jądra macierzy

Niech macierze $L \in \mathbb{K}^{m,m}$ i $R \in \mathbb{K}^{m,n}$ będą czynnikami rozkładu trójkątnego macierzy $\hat{A} = PAQ^{-1}$. Znając te czynniki oraz permutacje P i Q możemy łatwo znaleźć bazę obrazu i jądra macierzy A .

Działanie przekształcenia opisanego przez macierz Q^{-1} polega na takim przestawieniu kolumn macierzy A , że pierwsze $r = \text{rank } A$ kolumn macierzy AQ^{-1} jest liniowo niezależnych. Kolumny te stanowią bazę przestrzeni macierzy $\text{im } A$.

Ponieważ macierz L jest nieosobliwa, więc jądro macierzy $\hat{A} = LR$ jest jądrem macierzy R . Macierz ta ma ostatnie $m - r$ wierszy z samymi zerami, a więc jej jądro jest również jądrem macierzy $[R_{11}, R_{12}]$ otrzymanej po odrzuceniu tych wierszy (bloki R_{11} i R_{12} są te same, co wcześniej). Jądro przestrzeni $\ker R$ składa się z wektorów $\hat{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$, takich że

$$R_{11}\mathbf{y} + R_{12}\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{czyli} \quad R_{11}\mathbf{y} = -R_{12}\mathbf{z}.$$

Macierz R_{11} jest nieosobliwa, a zatem dla każdego wektora \mathbf{z} powyższy układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie. Podstawiając zamiast \mathbf{z} wektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^{n-r}$ otrzymujemy po prawej stronie wektor równy i -tej kolumnie macierzy R_{12} pomnożonej przez -1 . Rozwiązując takie układy dla $i = 1, \dots, n - r$ otrzymamy $n - r$ liniowo niezależnych wektorów $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-r}$, które stanowią bazę przestrzeni $\ker R$. Mając tę bazę, możemy wskazać bazę przestrzeni $\ker A$; składa się ona z wektorów $\mathbf{x}_1 = Q^{-1}\hat{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-r} = Q^{-1}\hat{x}_{n-r}$. Istotnie,

$$A\mathbf{x}_i = P^{-1}LRQ\mathbf{x}_i = P^{-1}LRQQ^{-1}\hat{x}_i = P^{-1}LR\hat{x}_i = \mathbf{0}.$$

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że

- układ równań jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $0\mathbf{x} = 1$ nie jest kombinacją liniową równań układu,
- dwa niesprzeczne układy równań liniowych są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań (na wykładzie był dowód wynikania tylko w jedną stronę).

Wskazówka: Wybierz z każdego układu maksymalny podukład, który składa się z równań liniowo niezależnych, i udowodnij, że te podukłady są równoważne. Spróbuj użyć w dowodzie pojęcia przestrzeni sprzężonej do \mathbb{K}^n .

2. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź wynik.

3. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} (0,0) & (1,0) & (2,1) \\ (1,0) & (0,1) & (-1,2) \\ (1,0) & (0,2) & (-2,4) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} (1,1) \\ (0,1) \\ (-1,2) \end{bmatrix}.$$

Sprawdź wynik.

4. Udowodnij, że jeśli macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ jest kolumnowo regularna, to podczas rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$ nie trzeba przestawiać kolumn, a co najwyżej tylko wiersze.

5. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ a^2 \end{bmatrix},$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$. Sprawdź wynik.

6. Udowodnij, że jeśli macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest nieosobliwa, to następujące postępowanie:

- Przyjmij macierz $M_0 = [A, I_n] \in \mathbb{K}^{n,2n}$,
- Niech dla $k > 0$ macierz M_k powstaje przez wykonanie jednej z następujących operacji: pomnożenie wiersza przez stałą, przestawienie wierszy lub dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez dowolną stałą (z takich operacji składa się eliminacja Gaussa bez przestawiania kolumn, ale dopuszczamy dowolne takie działania w dowolnej kolejności),

spowoduje, że jeśli w macierzy M_k w miejscu bloku A pojawi się macierz jednostkowa $n \times n$, to w miejscu bloku I_n pojawi się macierz A^{-1} .

7. Znajdź czynniki trójkątne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 10 & 54 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź wynik.

8. Dokonaj rozkładu macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

na czynniki trójkątne oraz odpowiednie macierze permutacji. Sprawdź wynik.

9. Oblicz koszt rozwiązywania układu równań liniowych $Rx = b$ z nieosobliwą macierzą trójkątną górną R .

10. Def. Macierz $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$ nazywa się macierzą wstęgową, jeśli istnieją stałe $k \leq m$ oraz $l \leq n$, takie że jeśli $i - j > l$ lub $j - i > k$, to $a_{ij} = 0$ (w świetle tej definicji każda macierz jest wstęgowa, ale nie to).

Liczbę l nazwiemy dolną szerokością wstęgi, a k górną szerokością wstęgi macierzy A .

Udowodnij, że jeśli macierz wstęgowa A , której dolna szerokość wstęgi jest równa l , a górna szerokość wstęgi jest równa k , jest iloczynem macierzy trójkątnej dolnej $L = [l_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,m}$ i trójkątnej górnej $R = [r_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$, to macierze te są wstęgowe, przy czym dolna szerokość wstęgi macierzy L jest równa l , a górna szerokość wstęgi macierzy R jest równa k .

11. Oblicz koszt znalezienia metodą eliminacji Gaussa (bez przestawień) czynników rozkładu kwadratowej macierzy wstęgowej.

12. Napisz w Pascalu lub C fragment programu, który oblicza iloczyn macierzy hermitowskiej $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i wektora $x \in \mathbb{C}^n$. Zakładamy, że macierz A jest przechowywana w tablicy zmiennych rzeczywistych a , $n \times n$, w taki sposób, że $a[i, j] = \operatorname{Re} a_{ij} = \operatorname{Re} a_{ji}$ dla $i \leq j$ oraz $a[i, j] = \operatorname{Im} a_{ij} = -\operatorname{Im} a_{ji}$ dla $i > j$, natomiast części rzeczywiste i urojone współczynników wektora x są przechowywane w osobnych tablicach liczb rzeczywistych o długości n .

Podprzestrzenie, warstwy i przestrzeń ilorazowa

Zasada abstrakcji

Def. Niech \sim oznacza relację dwuargumentową w pewnym zbiorze X . Relację tę nazywamy równoważnością, jeśli ma ona następujące własności:

- zwrotność, tj. $\forall x \in X \ x \sim x$,
- symetrię, tj. $\forall x, y \in X \ x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
- przechodniość, tj. $\forall x, y, z \in X \ x \sim y$ oraz $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Twierdzenie (zasada abstrakcji): Relacja równoważności dzieli zbiór X na rozłączne zbiory X_j , takie że jeśli $x \in X_j$ to $y \in X_j \Leftrightarrow x \sim y$.

Dowód jest prostym ćwiczeniem, więc go na wykładzie pominiemy.

Def. Niech X oznacza zbiór, w którym jest określona relacja równoważności \sim .

Klasą abstrakcji elementu $x \in X$ nazywamy zbiór X_j wszystkich elementów y zbioru X , takich że $x \sim y$.

Dowolny element x klasy abstrakcji X_j nazywamy reprezentantem tej klasy.

Przykłady:

- W zbiorze \mathbb{Z} dla dowolnego $n > 0$ określamy następującą relację \sim :
 $x \sim y \Leftrightarrow (x - y) \bmod n = 0$. Jest to relacja równoważności, która dzieli zbiór \mathbb{Z} na n klas abstrakcji (jakich?).
- W zbiorze wielomianów zespolonych stopnia co najwyżej n określamy relację \sim warunkiem: $w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow (w_1(x) = 0 \Leftrightarrow w_2(x) = 0)$.

Wiele różnych konstrukcji w matematyce (a zwłaszcza w algebrze) polega na rozpatrywaniu klas abstrakcji jako indywidualnych obiektów. Przypomnijmy na przykład, że aby formalnie zdefiniować liczby całkowite, określa się w zbiorze par liczb naturalnych następującą relację „ \sim ”: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ (w tej definicji występuje tylko dodawanie liczb naturalnych). Liczby całkowite to klasy abstrakcji tej relacji. Podanie innych przykładów to problem do zastanowienia.

Warstwy przestrzeni liniowej

Niech X będzie ustaloną podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V nad ciałem \mathbb{K} . Wprowadzimy następującą relację w przestrzeni V :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in X.$$

Możemy sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Istotnie, $x - x = 0 \in X$, a więc relacja jest zwrotna. Jeśli $x - y = z \in X$, to $y - x = -z \in X$, czyli relacja \sim jest symetryczna. Wreszcie, jeśli $x - y \in X$ oraz $y - z \in X$, to $x - z = (x - y) + (y - z) \in X$, a zatem jest to również relacja przechodnia.

Def. Klasy abstrakcji relacji \sim określonej wyżej nazwiemy warstwami przestrzeni V równoległymi do podprzestrzeni X . Klasę abstrakcji wektora $x \in V$ oznaczmy symbolem $[x]$ (trudno, będziemy starać się nie mylić tego symbolu z zapisem macierzy). W szczególności warstwa zerowa, $[0]$, jest zbiorem elementów podprzestrzeni X .

Jeśli podprzestrzeń X jest podprzestrzenią zerową, to wszystkie warstwy do niej równoległe są zbiorami jednoelementowymi. Podobnie łatwo jest sprawdzić, że jeśli podprzestrzeń X jest niewłaściwa, tj. $X = V$, to jest tylko jedna warstwa — zbiór wszystkich elementów przestrzeni V . Między tymi przypadkami skrajnymi może być wiele innych możliwości.

Wszystkie warstwy przestrzeni V równoległe do podprzestrzeni X są równoliczne. Aby tego dowiedzieć, wystarczy pokazać, że każda warstwa jest równoliczna z podprzestrzenią X . Jest to łatwe — jeśli ustalimy dowolny wektor $x \in [x]$, to możemy określić przekształcenie $f: X \rightarrow [x]$ wzorem $\forall z \in X \ f(z) = x + z$ i sprawdzić, że jest to bijekcja.

Mając wektor $x \in V$ oraz bazę y_1, \dots, y_l podprzestrzeni X , możemy warstwę $[x]$ przedstawić w następującej postaci:

$$[x] = \left\{ y : y = x + \sum_{k=1}^l a_k y_k, a_1, \dots, a_l \in \mathbb{K} \right\}.$$

Możemy też napisać $[x] = x + X$ (albo ściślej $[x] = \{x\} + X$), rozumiejąc, że symbol „ $+$ ” oznacza tu sumę algebraiczną.

Wymiar warstwy równoległej do podprzestrzeni X jest to liczba $\dim X$.

Możemy zauważyć następujący fakt: w takiej samej postaci jak warstwę powyżej przedstawiliśmy rozwiązanie ogólne dowolnego niesprzecznego układu równań liniowych. Mamy stąd wniosek, że zbiór rozwiązań niesprzecznego układu m równań liniowych z n niewiadomymi, $Ax = b$, jest warstwą równoległą do podprzestrzeni $\ker A \subset \mathbb{K}^n$.

Jest też prawdziwe stwierdzenie odwrotne: każda warstwa przestrzeni \mathbb{K}^n jest zbiorem rozwiązań pewnego układu równań liniowych. Teraz to udowodnimy.

Def. Hiperpłaszczyzna w przestrzeni liniowej V o wymiarze n nazywamy jej dowolną podprzestrzeń liniową o wymiarze $n - 1$.

Stwierdzenie: Każda hiperpłaszczyzna w przestrzeni \mathbb{K}^n jest zbiorem rozwiązań pewnego jednorodnego równania liniowego $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

Dowód: Niech z_1, \dots, z_{n-1} będzie bazą danej hiperpłaszczyzny. Można tę bazę rozszerzyć o 1 wektor, otrzymując bazę z_1, \dots, z_n przestrzeni \mathbb{K}^n . Funkcjonał, o którym mowa w stwierdzeniu, to element φ_n bazy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dualnej do bazy z_1, \dots, z_n (funkcjonał ten zależy od z_n , ale to nie szkodzi). \square

Twierdzenie: Dowolna podprzestrzeń k -wymiarowa X przestrzeni n wymiarowej V jest przecięciem $n - k$ lub większej liczby hiperpłaszczyzn.

Dowód: Wystarczy dowieść tezy dla przestrzeni \mathbb{K}^n . Podobnie jak w poprzednim stwierdzeniu, bazę z_1, \dots, z_k podprzestrzeni X możemy rozszerzyć do bazy z_1, \dots, z_n przestrzeni \mathbb{K}^n , a następnie znaleźć bazę dualną $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Zbiorem rozwiązań równania $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ jest hiperpłaszczyzna, którą oznaczymy symbolem π_i . Zbiór rozwiązań układu $\varphi_{k+1}(\mathbf{x}) = 0, \dots, \varphi_n(\mathbf{x}) = 0$ jest przecięciem hiperpłaszczyzn π_{k+1}, \dots, π_n . Zbiorem tym jest podprzestrzeń X o wymiarze k , którą w ten sposób przedstawiśmy w postaci przecięcia $n - k$ hiperpłaszczyzn. Pokażemy, że wymiar przestrzeni, która jest przecięciem $n - k$ hiperpłaszczyzn, jest nie mniejszy niż k . Przestrzeń ta jest zbiorem rozwiązań pewnego układu $n - k$ równań (każde równanie określa jedną z hiperpłaszczyzn). Rząd macierzy współczynników tego układu jest nie większy niż $n - k$, a zatem wymiar jej jądra jest nie mniejszy niż $n - (n - k) = k$. \square

Twierdzenie: Dowolna warstwa k -wymiarowa przestrzeni \mathbb{K}^n jest zbiorem rozwiązań pewnego układu równań liniowych, który składa się co najmniej z $n - k$ równań.

Dowód: Ustalmy dowolną warstwę $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{K}^n$ równoległą do podprzestrzeni k -wymiarowej X . Na podstawie poprzedniego twierdzenia możemy skonstruować macierz A o wymiarach $n - k \times n$, której jądrem jest podprzestrzeń X (i nie umiemy skonstruować takiej macierzy o mniejszej liczbie wierszy).

Jeśli wektor \mathbf{y} jest reprezentantem warstwy $[\mathbf{x}]$ (można przyjąć $\mathbf{y} = \mathbf{x}$), to układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest warstwa $[\mathbf{x}]$ otrzymamy biorąc macierz współczynników A i wektor prawej strony $\mathbf{b} = A\mathbf{y}$. \square

Przestrzenie ilorazowe

Niech X oznacza ustaloną podprzestrzeń liniową przestrzeni V nad \mathbb{K} . Zbiór elementów przestrzeni V jest sumą warstw równoległych do X . Rozważmy zbiór

tych warstw. Możemy w nim określić dodawanie warstw, wzorem

$$[\mathbf{x}] + [\mathbf{y}] \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{x} + \mathbf{y}],$$

oraz mnożenie warstwy przez skalar $a \in \mathbb{K}$, wzorem

$$a[\mathbf{x}] \stackrel{\text{def}}{=} [a\mathbf{x}].$$

Musimy jednak przekonać się, że powyższe działania są dobrze określone, co oznacza, że wynik każdego z tych działań jest warstwą równoległą do X i nie zależy od wyboru reprezentantów. To pierwsze jest oczywiste: dla dowolnego wektora $z \in V$ możemy skonstruować warstwę równoległą do X , której z jest reprezentantem, a suma wektorów $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ i iloczyn $a\mathbf{x}$ są wektorami.

Dowód, że wyniki działań nie zależą od wyboru reprezentantów jest też prosty.

Niech $\mathbf{x}' \in [\mathbf{x}]$, tj. $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = z \in X$, oraz $\mathbf{y}' \in [\mathbf{y}]$, czyli $\mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{w} \in X$.

Jeśli $\mathbf{a} \in [\mathbf{x} + \mathbf{y}]$, czyli $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{a} = \mathbf{b} \in X$, to

$$(\mathbf{x}' + \mathbf{y}') - \mathbf{a} = (\mathbf{x} - z) + (\mathbf{y} - \mathbf{w}) - \mathbf{a} = \mathbf{b} - z - \mathbf{w} \in X,$$

a zatem $\mathbf{a} \in [\mathbf{x}' + \mathbf{y}']$, co dowodzi, że $[\mathbf{x}' + \mathbf{y}'] = [\mathbf{x} + \mathbf{y}]$.

Dowód, że jeśli $\mathbf{x}' \in [\mathbf{x}]$ to $a[\mathbf{x}'] = a[\mathbf{x}]$ pozostawiam na ćwiczenia.

Zbiór warstw przestrzeni V równoległych do podprzestrzeni X oznaczymy symbolem V/X . Zbiór ten z działaniem dodawania warstw jest grupą abelową, której elementem neutralnym jest warstwa $[0]$. Mnożenie warstwy przez skalar jest rozdzielne względem dodawania warstw, a także dodawania skalarów:

$$\begin{aligned} \forall_{a \in \mathbb{K}, [\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \in V/X} a([\mathbf{x}] + [\mathbf{y}]) &= a[\mathbf{x}] + a[\mathbf{y}], \\ \forall_{a, b \in \mathbb{K}, [\mathbf{x}] \in V/X} (a + b)[\mathbf{x}] &= a[\mathbf{x}] + b[\mathbf{x}]. \end{aligned}$$

Wreszcie, prawdziwe są warunki

$$\forall_{a, b \in \mathbb{K}, [\mathbf{x}] \in V/X} (ab)[\mathbf{x}] = a(b[\mathbf{x}]), \quad \forall_{[\mathbf{x}] \in V/X} 1[\mathbf{x}] = [\mathbf{x}],$$

a zatem zbiór V/X z działaniem dodawania warstw i mnożenia warstw przez skalar jest przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} . Przestrzeń tę nazywamy przestrzenią ilorazową.

Podstawowe pytania, jakie należy zadać mając do czynienia z dowolną przestrzenią liniową, to jaki jest jej wymiar i jak znaleźć jej bazę (jeśli można to zrobić).

Aby odpowiedzieć na te pytania, założmy, że $\dim X = k \leq \dim V = n$ i weźmy bazę $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ podprzestrzeni X . Dołączając do niej pewne wektory $\mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n$

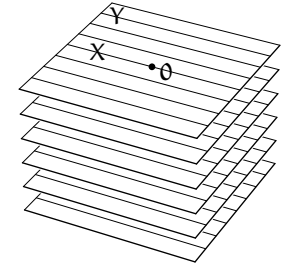
możemy otrzymać bazę przestrzeni V . Udowodnimy, że układ warstw $[x_{k+1}], \dots, [x_n]$ jest bazą przestrzeni ilorazowej V/X , której wymiar jest w związku z tym równy $n - k$.

Przypuśćmy, że $a_{k+1}[x_{k+1}] + \dots + a_n[x_n] = [0]$, a zatem istnieje wektor $z \in X$, taki że $a_{k+1}x_{k+1} + \dots + a_nx_n + z = 0$. Wektor z jest kombinacją liniową wektorów x_1, \dots, x_k , a zatem wyrażenie po lewej stronie powyższej równości można przedstawić w postaci $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Ponieważ układ wektorów x_1, \dots, x_n jest bazą, więc wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej, w tym a_{k+1}, \dots, a_n , są równe 0.

Układ warstw $[x_{k+1}], \dots, [x_n]$ jest więc liniowo niezależny. Pozostaje dowieść, że jest to maksymalny układ liniowo niezależny, tj. dołączenie do niego dowolnej warstwy $[y]$ spowoduje powstanie układu liniowo zależnego. Weźmy dowolny wektor $y \in V$, $y \notin X$; istnieją liczby $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, takie że $y = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ i co najmniej jedna z liczb b_{k+1}, \dots, b_n jest różna od 0. Rozważmy równanie $a_{k+1}[x_{k+1}] + \dots + a_n[x_n] - [y] = [0]$. Jeśli jest ono spełnione przez pewne liczby a_{k+1}, \dots, a_n , to istnieje wektor $z \in X$, taki że $a_{k+1}x_{k+1} + \dots + a_nx_n - y + z = 0$. Ale równanie to możemy przedstawić w postaci $(a_1 - b_1)x_1 + \dots + (a_n - b_n)x_n = 0$ i spełniają je współczynniki $a_i = b_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Co najmniej jedna z liczb a_{k+1}, \dots, a_n jest różna od 0, tak więc układ warstw $[x_{k+1}], \dots, [x_n], [y]$ jest liniowo zależny. \square

Rozważmy podprzestrzenie liniowe X i Y przestrzeni V , takie że $X \subset Y \subset V$. Możemy określić przestrzenie ilorazowe V/X i Y/X . Przestrzeń Y/X jest zbiorem warstw przestrzeni V , równoległych do X i zawartych w Y . Jest to więc podzbiór przestrzeni V/X , a ponieważ jest to przestrzeń liniowa, jest ona więc podprzestrzenią liniową przestrzeni V/X . Możemy zatem określić przestrzeń ilorazową $(V/X)/(Y/X)$. Zbadamy jej związek z przestrzenią V/Y . Przede wszystkim, łatwo jest sprawdzić, że $\dim V/Y = \dim(V/X)/(Y/X)$, a więc przestrzenie te są izomorficzne. Elementami przestrzeni V/Y są warstwy przestrzeni V równoległe do Y . Elementami przestrzeni $(V/X)/(Y/X)$ są warstwy przestrzeni V/X , równoległe do podprzestrzeni Y/X , która jest zbiorem warstw przestrzeni Y równoległych do X . Ponieważ przestrzeń Y jest sumą (teoriomnogościową) swoich warstw równoległych do X , więc każdy element $[x] = x + Y$ (tu suma algebraiczna) przestrzeni V/Y jest również sumą (teoriomnogościową) pewnych warstw przestrzeni V równoległych do X (czyli elementów przestrzeni V/X).

Przykład. Rozważmy przestrzeń trójwymiarową V , jej podprzestrzeń dwuwymiarową Y (łatwo ją sobie wyobrazić jako płaszczyznę zawierającą punkt przyjęty za wektor 0) i jednowymiarową podprzestrzeń X zawartą w Y (wyobrażamy ją sobie jako prostą w płaszczyźnie Y , przechodzącą przez 0).



Przestrzeń Y/X jest zbiorem prostych równoległych do X , które leżą w płaszczyźnie Y . Przestrzeń V/X jest zbiorem wszystkich prostych w przestrzeni V równoległych do X . Przestrzeń V/Y jest zbiorem płaszczyzn równoległych do Y . Każdą taką płaszczyznę można przedstawić w postaci sumy położonych w niej prostych równoległych do X . Tak więc elementy przestrzeni V/Y są płaszczyznami (które możemy interpretować jako zbiory punktów), a elementy przestrzeni $(V/X)/(Y/X)$ to te same płaszczyzny, które interpretujemy jako zbiory prostych równoległych do X .

Układy współrzędnych w przestrzeni liniowej

Def. Układem współrzędnych w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f: X \rightarrow \mathbb{K}^n$. Przy ustalonym f przestrzeń \mathbb{K}^n nazywa się przestrzenią współrzędnych zbioru X .

Znając współrzędne dowolnego elementu $a \in X$ w zasadzie możemy znaleźć ten element; definicja nie wyklucza jednak możliwości, że pewien wektor $v \in \mathbb{K}^n$ nie jest wartością funkcji f dla żadnego $a \in X$, ani nie podpowiada sposobu znajdowania $a = f^{-1}(v)$. W przypadku n -wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem \mathbb{K} szczególnie wygodne jest posługiwanie się układem współrzędnych, który jest izomorfizmem przestrzeni V i \mathbb{K}^n .

Dowolny izomorfizm przestrzeni V i \mathbb{K}^n możemy skonstruować biorąc pewną bazę x_1, \dots, x_n przestrzeni X i przyjmując, że jeśli $z = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, to $f(z) = [a_1, \dots, a_n]^T$. Liczby a_1, \dots, a_n nazywamy współrzędnymi wektora x

w bazie x_1, \dots, x_n i możemy je otrzymać obliczając wyrażenie $\begin{bmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_n(z) \end{bmatrix}$, które

zapisujemy krócej Φz . Macierz Φ reprezentuje bazę sprzężoną z bazą x_1, \dots, x_n , której elementy ustawimy w macierz X .

Podobnie, możemy ustalić inną (albo i tę samą) bazę $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ i jej bazę sprzężoną ψ_1, \dots, ψ_n i przedstawić je w postaci macierzy Y i Ψ . Wtedy macierz $C = (c_{ij})_{i,j} = \Phi Y$, o współczynnikach $c_{ij} = \varphi_i(\mathbf{y}_j)$, jest macierzą zmiany bazy (to już było, tu jest tylko powtórzenie). Macierz ta opisuje zmiianę układu współrzędnych, tj. umożliwia obliczenie współrzędnych dowolnego wektora \mathbf{z} w układzie, którego układem odniesienia jest baza $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, na podstawie współrzędnych tego wektora w bazie $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$.

Macierze zmiany bazy mają następujące własności:

- Są jednoznacznie określone przez odpowiednie bazy.
- Jeśli A jest macierzą przejścia od bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ do $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, a B jest macierzą przejścia od $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ do $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, to macierz przejścia od $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ do $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ jest równa BA .
- Są nieosobliwe; mając dane dowolne bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ możemy znaleźć macierz A przejścia od pierwszej z nich do drugiej, a także od drugiej do pierwszej, czyli A^{-1} .
- Macierzą przejścia od bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ do $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jest macierz jednostkowa I_n .
- Dowolna macierz nieosobliwa jest macierzą zmiany bazy. Mianowicie, macierz A jest macierzą przejścia od bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ do bazy, której elementami są współczynniki macierzy $Y = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]A^{-1}$.

Udowodnimy to. Oznaczmy współczynniki macierzy Y symbolami $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Są to wektory liniowo niezależne, bo $YA = X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, a więc możemy otrzymać bazę wyjściową wybierając odpowiednie kombinacje liniowe wektorów $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, zatem wektory te rozpinają przestrzeń V . Dowolnemu wektorowi $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ odpowiada wektor $\mathbf{x} = X\mathbf{a} \in V$. Podstawiając $X = YA$ mamy $\mathbf{x} = YA\mathbf{a} = Y\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{b} = A\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ jest wektorem współrzędnych wektora \mathbf{x} w bazie $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$.

Dowolny funkcjonal liniowy ξ możemy reprezentować za pomocą pewnego wektora $\mathbf{g} \in \mathbb{K}^n$ w ten sposób, że jeśli $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ jest wektorem współrzędnych wektora $\mathbf{z} \in V$ w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, to $\xi(\mathbf{z}) = \mathbf{g}^T \mathbf{a}$.

Uwaga: Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to we wzorach powyżej i poniżej występuje sprzężenie hermitowskie, a w innych przypadkach zwykła transpozycja macierzy. Powód sięgania po liczby sprzężone ze współczynnikami zespolonymi wyjaśni się na jednym z dalszych wykładów (było go widać w dowodzie twierdzenia na str. 4.4).

Zbadajmy, jak przy zmianie bazy zmienia się baza sprzężona. Niech C oznacza macierz przejścia od bazy $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ do $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Niech teraz $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ będzie wektorem współrzędnych wektora \mathbf{x} w bazie $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Mamy zatem $\mathbf{a} = C\mathbf{b}$,

czyli $\mathbf{b} = C^{-1}\mathbf{a}$. Ten sam funkcjonal ξ w bazie sprzężonej z bazą $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ jest reprezentowany przez wektor $\mathbf{h} = C^T \mathbf{g}$; istotnie, $\mathbf{h}^T \mathbf{b} = \mathbf{g}^T C C^{-1} \mathbf{a}$.

Jeśli więc dokonujemy zmiany bazy przestrzeni V i macierzą zmiany bazy jest C^{-1} , to baza sprzężona podlega zmianie opisanej za pomocą macierzy C . W związku z tym elementy przestrzeni V^* , czyli funkcjonały liniowe na V określa się mianem wektorów kowariantnych (bardziej po polsku: współzmiennicznych), a elementy przestrzeni V (czyli „zwykłe” wektory) noszą miano wektorów kontrawariantnych (przeciwzmiennicznych). Ponieważ role przestrzeni V i V^* można zamienić, więc ta terminologia ma charakter umowy.

Z powyższych uwag na temat przestrzeni V i V^* wynika, że choć są to przestrzenie izomorficzne (bo mają ten sam wymiar), nie istnieje żaden „naturalny” izomorfizm, który byłby niezmienniczy względem wyboru baz. Istotnie, gdybyśmy utożsamili elementy pewnej bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ przestrzeni V z elementami $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bazy sprzężonej, to utożsamienie to nie dotyczy innych baz sprzężonych ze sobą; zauważmy, że w \mathbb{K}^n na ogół $A^T \mathbf{x} \neq A^{-1} \mathbf{x}$.

Przestrzeń V^{**} , tj. przestrzeń funkcjonałów określonych w przestrzeni V^* jest jednak łatwo utożsamić w rozpatrywanym sensie z przestrzenią V . Wystarczy wziąć dowolną bazę $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ przestrzeni V , bazę z nią sprzężoną $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ przestrzeni V^* i bazę f_1, \dots, f_n przestrzeni V^{**} sprzężoną z tą ostatnią bazą. Utożsamiamy funkcjonal f_i z wektorem \mathbf{x}_i i sprawdzamy, że dowolna zmiana bazy przestrzeni V i odpowiadająca jej zmiana bazy przestrzeni V^{**} są opisane za pomocą tej samej macierzy.

Transformacje macierzy przekształceń liniowych

Weźmy teraz dwie bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ przestrzeni V , ich bazy sprzężone $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ i ψ_1, \dots, ψ_n , a także dwie bazy $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ przestrzeni W i bazy z nimi sprzężone $\omega_1, \dots, \omega_m$ i $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Bazy te będziemy reprezentowali przez macierze odpowiednio X, Y, Φ, Ψ , oraz U, V, Ω i Γ . Interpretując te macierze jako przekształcenia, otrzymujemy zależności $\Phi = X^{-1}$, $\Psi = Y^{-1}$, $U = \Omega^{-1}$ i $V = \Gamma^{-1}$. Dodatkowo oznaczmy macierz $C = \Phi Y$, która jest macierzą przejścia od bazy $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ do $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i macierz $D = \Omega V$, która jest macierzą przejścia od bazy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ do $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$.

Niech A oznacza macierz pewnego przekształcenia liniowego $f: V \rightarrow W$ w bazach $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$. Macierz B tego przekształcenia w bazach $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ jest równa $D^{-1}AC$. Istotnie, jeśli współczynniki wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ są

współrzędnymi wektora \mathbf{x} w bazie $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, to współczynniki wektora $C\mathbf{b}$ są współrzędnymi wektora \mathbf{x} w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, współczynniki wektora $AC\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ są współrzędnymi wektora $f(\mathbf{x})$ w bazie $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ i wreszcie wektor $B\mathbf{b} = D^{-1}AC\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ składa się ze współczynników $f(\mathbf{x})$ w bazie $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$.

Jeśli macierz A reprezentuje przekształcenie liniowe $f: V \rightarrow W$ w bazach $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$, to reprezentuje ona również pewne przekształcenie przestrzeni W^* w V^* w bazach $\omega_1, \dots, \omega_m$ i $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Przekształcenie to nazwiemy przekształceniem sprzężonym z f i oznaczymy symbolem f^* . Przekształcenie to będziemy zapisywać nieco innym wzorem niż f ; mając wektor $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ współrzędnych wektora $\mathbf{x} \in V$ w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, możemy obliczyć wektor $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ współrzędnych wektora $f(\mathbf{x})$ ze wzoru $\mathbf{b} = A\mathbf{a}$. Przypuśćmy, że dany funkcjonal $\beta \in W^*$ możemy przedstawić w postaci $\beta = \bar{c}_1\omega_1 + \dots + \bar{c}_m\omega_m$ (czyli współczynniki macierzy $\mathbf{c}^H = [\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m] \in \mathbb{K}^{1,m}$ są współrzędnymi funkcjonału β w bazie $\omega_1, \dots, \omega_m$). Wtedy macierz $\mathbf{d}^H = [\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n] \in \mathbb{K}^{1,n}$ współrzędnych funkcjonału $f^*(\beta)$ otrzymamy ze wzoru $\mathbf{d}^H = \mathbf{c}^HA$. Równoważnie możemy pisać $\mathbf{d} = A^H\mathbf{c}$.

Przypomnijmy, że już rozpatrywaliśmy przekształcenia sprzężone (str. 4.4); dowolnemu przekształceniu liniowemu $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ odpowiada pewna macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Macierz $A^H \in \mathbb{K}^{n,m}$ reprezentuje przekształcenie $f^*: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ sprzężone z f , przy czym przestrzeń sprzężona z \mathbb{K}^n to \mathbb{K}^n , a sprzężona z \mathbb{K}^m to \mathbb{K}^m . Jeśli wektor $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ uznamy za funkcjonał, to jego wartość dla wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ jest równa $\mathbf{y}^H\mathbf{x}$.

Podobnie, jak w przypadku przekształcenia f , znajdziemy macierz reprezentującą przekształcenie f^* w bazach $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ i ψ_1, \dots, ψ_n . Ponieważ to są bazy sprzężone z bazami $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ i $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, a macierzą przekształcenia f w tych bazach jest $B = D^{-1}AC$, więc jest to również poszukiwana macierz przekształcenia f^* . Jeśli chcemy reprezentować funkcjonały za pomocą macierzy kolumnowych, to macierz przekształcenia f^* jest równa $B^H = C^HA^HD^{-H}$.

W szczególnym przypadku weźmy $V = W$ i $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{y}_i$, $\omega_i = \varphi_i$ oraz $\gamma_i = \psi_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Macierz przejścia od bazy $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ do $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ oznaczmy literą C . Jeśli macierz A reprezentuje przekształcenie f w bazie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ (tj. zarówno argument przekształcenia jak i jego obraz reprezentujemy za pomocą współczynników w tej samej bazie), to macierzą przekształcenia f w bazie $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ jest macierz $B = C^{-1}AC$, a jeśli chcemy funkcjonały reprezentować za pomocą macierzy kolumnowych, to macierzą przekształcenia f^* jest macierz $B^H = C^HA^HC^{-H}$.

Jeśli dla ustalonych dwóch macierzy, A i B , istnieje macierz C , taka że $B = C^{-1}AC$, to macierze te opisują to samo przekształcenie liniowe w dwóch różnych bazach. Macierze o takiej własności nazywamy macierzami podobnymi.

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że działanie na liczbach całkowitych, tj. klasach abstrakcji opisanej w wykładzie relacji równoważności w zbiorze par liczb naturalnych, zdefiniowane wzorem

$$[(a, b)] \diamond [(c, d)] \stackrel{\text{def}}{=} [(a + c, b + d)]$$

nie zależy od wyboru reprezentantów (to działanie jest dodawaniem liczb całkowitych).

Określ mnożenie liczb całkowitych przez znalezienie wzoru, który umożliwia znalezienie reprezentanta wyniku na podstawie danych reprezentantów argumentów. Udowodnij, że to działanie nie zależy od wyboru reprezentantów.

2. Użyj zasady abstrakcji w zbiorze par liczb całkowitych do zdefiniowania liczb wymiernych. Określ dodawanie i mnożenie tych liczb za pomocą odpowiednich działań na reprezentantach.
3. Wskaż wszystkie klasy abstrakcji określone przez relację \sim w zbiorze $\mathbb{C}[x]_n$, zdefiniowaną wzorem $w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow (w_1(x) = 0 \Leftrightarrow w_2(x) = 0)$. Czy te klasy abstrakcji są równoliczne?
4. Relacja „ \sim ” w zbiorze $\mathbb{R}[x]_n$ jest zdefiniowana warunkiem $w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow (w_1(x) = 0 \Leftrightarrow w_2(x) = 0)$, natomiast relacja „ \sim' ” warunkiem $w_1 \sim' w_2 \Leftrightarrow (w_1 = aw_2(x))$ dla pewnego $a \neq 0$. Czy relacje te są identyczne?
5. Pierścień wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej, $\mathbb{R}[x]$, zawiera podpierścień wielomianów podzielnych przez wielomian $x^2 + 1$. Wprowadzimy w $\mathbb{R}[x]$ relację równoważności „ \sim ”, spełnioną przez dwa wielomiany, a i b , jeśli wielomian $a - b$ jest podzielny przez $x^2 + 1$. Zbiór klas abstrakcji takiej relacji jest tzw. pierścieniem ilorazowym. Dowolną klasę abstrakcji można reprezentować za pomocą reszty z dzielenia przez $x^2 + 1$ dowolnego wielomianu należącego do tej klasy. Reszta jest wielomianem stopnia co najwyżej 1, a więc ten pierścień ilorazowy można utożsamić ze zbiorem (pierścieniem) wielomianów, w którym mnożenie odbywa się modulo $x^2 + 1$. Dodawanie klas abstrakcji jest równoważne dodawaniu reprezentantów tych klas (czyli jest realizowane przez „zwykłe” dodawanie wielomianów).
 - a) Udowodnij, że reprezentantem stopnia co najwyżej 1 klasy abstrakcji wielomianu $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ jest wielomian $p(x) = (a_0 - a_2 + a_4 - \dots) + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots)x$.

b) Sprawdź, że $((a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x)) \bmod (x^2 + 1) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x$
 oraz $((a_1 + b_1x)(a_1 + b_2x)) \bmod (x^2 + 1) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)x$.

Jeśli zamiast x napiszesz i , to otrzymasz wzory definiujące mnożenie liczb zespolonych. Jest to więc inny sposób ich określenia. Zwróć uwagę, że ten pierścień ilorazowy jest ciałem.

6. Udowodnij, że jeśli $x' \in [x]$ to $a[x'] = a[x]$.
7. Udowodnij, że jeśli macierze A i B są podobne, to mają ten sam rząd.
8. Jaki jest rząd macierzy przekształcenia przekształcenia $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, danego wzorem $f(w) = aw''x^2 + bw'x + w$, w zależności od parametrów a i b ?
9. Zbadaj, czy jeśli macierze A i B są podobne, oraz macierz A jest hermitowska (tj. $A^H = A$) i macierz C podobieństwa macierzy A i B (taka, że $B = C^{-1}AC$) jest hermitowska, to macierz B jest hermitowska.
10. Niech f oznacza przekształcenie przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, określone wzorem $f(w) = w'' + w' + w$.
 Znajdź macierz tego przekształcenia w bazie potęgowej $1, x, x^2$.
 Znajdź macierz C przejścia do bazy Newtona, $1, x - 1, (x - 1)(x - 2)$.
 Oblicz macierz B przekształcenia f w tej bazie Newtona.

Normy wektorów

Pojęcie normy wektora

Def. Niech V oznacza przestrzeń liniową nad ciałem \mathbb{K} , które jest jednym z ciał liczbowych, \mathbb{Q} , \mathbb{R} lub \mathbb{C} . Normą w tej przestrzeni nazywamy dowolną funkcję $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, o następujących własnościach:

N.1: $\forall_{\mathbf{x} \in V} \|\mathbf{x}\| \geq 0$, oraz $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Norma jest więc funkcją nieujemną, a jedynym jej miejscem zerowym jest wektor $\mathbf{0}$.

N.2: $\forall_{a \in \mathbb{K}, \mathbf{x} \in V} \|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$.

Własność ta bywa nazywana półliniowością, przy czym „pół” związane jest z ignorowaniem znaku liczby a .

N.3: $\forall_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Powyższa nierówność nazywa się nierównością trójkąta.

Def. Normą wektora \mathbf{x} nazywamy liczbę $\|\mathbf{x}\|$.

Def. Przestrzeń unormowana jest to przestrzeń liniowa V , w której jest określona ustalona norma $\|\cdot\|$.

Warto podkreślić, że w przestrzeni, której wymiar jest większy od 0, można określić nieskończenie wiele różnych norm. Wybierając różne normy w tej samej przestrzeni liniowej otrzymamy za każdym razem *inną* przestrzeń unormowaną.

Stwierdzenie: Jeśli funkcja $\|\cdot\|_a: V \rightarrow \mathbb{R}$ jest normą, a przekształcenie liniowe

$f: V \rightarrow V$ jest różnowartościowe, to funkcja $\|\cdot\|_b: V \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem

$\|\mathbf{x}\|_b = \|f(\mathbf{x})\|_a$, też jest normą.

Dowód polega na sprawdzeniu, że funkcja $\|\cdot\|_b$ ma wszystkie podane wyżej własności normy. Mając pewną normę w przestrzeni możemy więc definiować inne normy. Trzeba tylko umieć określić choć jedną normę.

Powód, dla którego wprowadza się normy, jest następujący: mając dwie liczby (np. rzeczywiste) x i y , możemy zmierzyć *odległość* tych liczb, albo błąd, z jakim x przybliży y , obliczając $|x - y|$. Mając dwa wektory w dowolnej przestrzeni liniowej V , chcielibyśmy móc zrobić to samo, tj. wyrazić błąd, z jakim wektor \mathbf{x} przybliży wektor \mathbf{y} , *za pomocą jednej liczby*. W tym celu potrzebna jest metryka, tj. funkcja, która opisuje odległość dowolnych dwóch wektorów

w przestrzeni V . Jednym z najprostszych sposobów określenia metryki w przestrzeni liniowej jest właśnie użycie normy; za odległość wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} przyjmujemy liczbę równą $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Normy Höldera

Jeden z najczęściej stosowanych sposobów określenia normy w przestrzeni \mathbb{K}^n polega na użyciu wzoru (dla $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$)

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

w którym występuje ustalona liczba rzeczywista $p \geq 1$. Łatwo jest udowodnić, że tak określona funkcja ma dwie spośród trzech podanych wyżej własności, tj. jest dodatnia dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i półliniowa. Dowód, że funkcja ta spełnia nierówność trójkąta, tj. że

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

dla dowolnych liczb x_1, \dots, x_n i $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$, jest znacznie trudniejszy i pominiemy go (dalej zbadamy tylko pewne przypadki szczególnie łatwe). Powyższa nierówność nosi nazwę nierówności Minkowskiego, a normy przestrzeni \mathbb{K}^n określone w opisany tu sposób są nazywane normami Höldera. Normę p -tą oznacza się symbolem $\|\cdot\|_p$.

Przypadki szczególne norm Höldera, często spotykane w praktycznych rachunkach, odpowiadają $p = 1$ i $p = 2$. Mamy też przypadek graniczny, dla $p \rightarrow \infty$. Te trzy szczególne normy można obliczać na podstawie łatwych do udowodnienia wzorów

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|.$$

Norma druga, $\|\cdot\|_2$, bywa określana mianem normy euklidesowej. O normie $\|\cdot\|_\infty$ często mówi się „norma maksimum”.

Możemy określić normę w dowolnej przestrzeni n -wymiarowej V , ustalając w niej układ współrzędnych (czyli izomorfizm $V \rightarrow \mathbb{K}^n$), a następnie przyjmując za normę wektora $\mathbf{y} \in V$ wybraną normę Höldera jego wektora współrzędnych.

Wspomnijmy w tym miejscu o normach Höldera w przestrzeniach funkcji; dla rzeczywistej lub zespolonej funkcji f o dziedzinie A można napisać

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

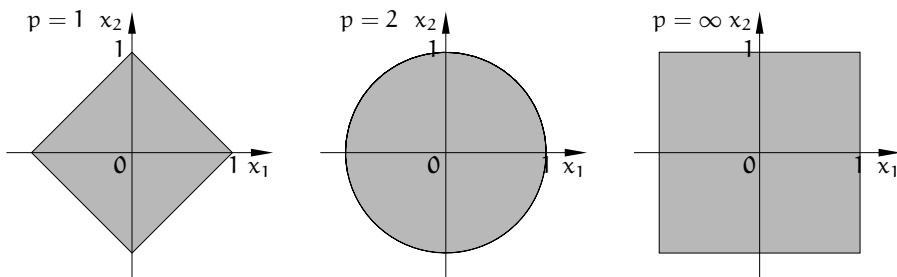
Jeśli całka występująca w tym wzorze istnieje i jest skończona, to wyrażenie po prawej stronie wzoru określa normę funkcji f . Zdanie to sugeruje, że nie każda funkcja ma normę. Dlatego rozpatruje się przestrzenie liniowe złożone z wszystkich tych funkcji (o dziedzinie A), których norma jest określona (tj. całka istnieje i jest skończona), a zatem norma jest elementem określenia przestrzeni. W powyższym określeniu normy funkcji jest pewna nieścisłość, wyjaśniona w pierwszym zadaniu po tym wykładzie.

Def. Kulą jednostkową nazywamy zbiór wszystkich tych wektorów \mathbf{x} , których norma jest mniejsza lub równa 1.

Sfera jednostkowa jest zbiorem wektorów \mathbf{x} , takich że $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Określenie metryki w przestrzeni V , poprzez ustalenie normy, umożliwia określenie otoczenia dowolnego punktu (wektora) \mathbf{x} ; może nim być zbiór tych punktów \mathbf{y} , dla których liczba $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ jest mniejsza niż ustalone $\varepsilon > 0$. Mając dowolny podzbiór X przestrzeni V możemy wyróżnić wnętrze tego zbioru, czyli zbiór tych elementów zbioru X , które należą do niego wraz z pewnym otoczeniem, a także brzeg zbioru X , czyli zbiór tych punktów, których wszystkie otoczenia zawierają punkty należące do X i do $V \setminus X$.

Możemy teraz powiedzieć, że sfera jednostkowa jest brzegiem kuli jednostkowej.



Na rysunku są przedstawione kule jednostkowe w przestrzeni \mathbb{R}^2 dla $p = 1$, $p = 2$ i $p = \infty$, czyli dla przypadków, z którymi będziemy się stykać najczęściej.

Zauważmy, że wszystkie te kule są zbiorami wypukłymi i symetrycznymi względem punktu 0 . W ogólności w przestrzeni liniowej V nad \mathbb{R} można wybrać dowolny zbiór K , który ma te dwie własności, a ponadto ma niepuste wnętrze

i jest domknięty i ograniczony (te własności badamy przy użyciu dowolnej normy), i określić normę, dla której zbiór K jest kulą jednostkową.

Udowodnimy nierówność Minkowskiego w szczególnym przypadku $p = 2$.

W tym celu dowiedzimy najpierw nierówności Schwarza: jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, to

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

Nierówność ta jest oczywista, jeśli któryś z wektorów jest równy 0 ; załóżmy zatem, że $\mathbf{y} \neq 0$ i przyjmując parametr zespolony t obliczmy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}t\|_2^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}t)^H (\mathbf{x} + \mathbf{y}t) = \mathbf{x}^H \mathbf{x} + \mathbf{x}^H \mathbf{y}t + \mathbf{y}^H \mathbf{x} \bar{t} + \mathbf{y}^H \mathbf{y} t \bar{t}.$$

Wartością tego wyrażenia dla każdego $t \in \mathbb{C}$ jest nieujemna liczba rzeczywista.

Możemy oznaczyć $\mathbf{x}^H \mathbf{y} = a = |a|e^{i\varphi}$. Podstawiając $t = |t|e^{i\psi}$ otrzymujemy

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 + |a| |e^{i(\varphi+\psi)} + e^{-i(\varphi+\psi)}| |t| + \|\mathbf{y}\|_2^2 |t|^2.$$

Przyjmując kolejno $\psi = -\varphi$ i $\psi = \pi - \varphi$ otrzymujemy nierówności

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| |t| + \|\mathbf{y}\|_2^2 |t|^2 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| |t| + \|\mathbf{y}\|_2^2 |t|^2.$$

Biorąc następnie liczbę rzeczywistą $\tau = |t|$ w pierwszym przypadku i $\tau = -|t|$ w drugim, otrzymujemy za każdym razem nierówność

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \tau + \|\mathbf{y}\|_2^2 \tau^2.$$

Nierówność ta obowiązuje dla każdego $\tau \in \mathbb{R}$. Trójmian kwadratowy po prawej stronie nie może mieć dwóch różnych rzeczywistych miejsc zerowych, a stąd wyróżnik tego trójmianu (dla $a + 2b\tau + c\tau^2$ jest to $\Delta = b^2 - ac$) nie może być dodatni. Mamy zatem

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{y}|^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2 \leq 0,$$

skąd nierówność Schwarza wynika natychmiast.

Możemy napisać

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y})^H (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \mathbf{x}^H \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \mathbf{x} + \|\mathbf{y}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\mathbf{x}^H \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|_2^2,$$

oraz $(\|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2)^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2^2$.

Na podstawie nierówności Schwarza $2\operatorname{Re}(\mathbf{x}^H \mathbf{y}) \leq 2|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq 2\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$, zatem $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 \leq (\|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2)^2$ i dowód nierówności Minkowskiego dla $p = 2$ na tym się kończy. \square

Uwaga 1: Nierówność Schwarz'a jest ostra (tj. równość nie zachodzi), jeśli wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są niezależne liniowo. Nierówność Minkowskiego jest ostra wtedy, gdy nie istnieje liczba nieujemna α , taka że $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$ lub $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$.

Norma, dla której nierówność trójkąta jest ostra, jeśli podstawić do niej wektory spełniające podany wyżej warunek, nazywa się normą ostrą. Wszystkie normy Höldera oprócz $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ są ostre.

Uwaga 2: Dowolna norma Höldera wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ nie zmienia się, jeśli poprzestawiamy jego współczynniki, ani jeśli pozmieniamy ich znaki.

Normy przekształceń liniowych

Niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y . Możemy określić normę przekształcenia f , wzorem

$$\|f\| = \sup_{\mathbf{x} \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}.$$

Tak określona funkcja określa, „ile razy dłuższy” od dowolnego wektora \mathbf{x} może być jego obraz w przekształceniu f . Sprawdzenie, że funkcja ta w przestrzeni $L(X; Y)$ ma wszystkie własności normy, pozostawiam na ćwiczenia. Określona w ten sposób norma nazywa się normą indukowaną przez normy przestrzeni X i Y .

Można zauważyć, że dla dowolnych norm $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$ wyrażenie z prawej strony powyższego wzoru jest równe

$$\sup_{\mathbf{x} \in X: \|\mathbf{x}\|_X \leq 1} \|f(\mathbf{x})\|_Y = \sup_{\mathbf{x} \in X: \|\mathbf{x}\|_X = 1} \|f(\mathbf{x})\|_Y.$$

Chcąc znaleźć normę danego przekształcenia f można badać te wyrażenia, choć w ogólności zadanie to nadal może być trudne. W przestrzeniach skończenie wymiarowych kule jednostkowe są zbiorami zwartymi (zbiór skończenie wymiarowy jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest domknięty i ograniczony). Zamiast supremum możemy wtedy poszukiwać maksimum.

Niech $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni unormowanych. Wtedy norma indukowana przez $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Z$ przekształcenia złożonego $f \circ g$, spełnia nierówność

$$\|f \circ g\| \leq \|g\| \|f\|,$$

w której występują normy przekształceń f i g , indukowane odpowiednio przez $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$ oraz $\|\cdot\|_Y$ i $\|\cdot\|_Z$.

Ważny przypadek szczególny otrzymamy rozpatrując przekształcenie $f: X \rightarrow X$, dla przestrzeni X , w której rozpatrujemy tylko jedną normę.

Normy indukowane macierzy

Macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ interpretujemy jako przekształcenie liniowe przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^m . Wybrawszy normy w tych przestrzeniach możemy określić normę indukowaną w przestrzeni $\mathbb{K}^{m,n}$. W praktyce ograniczymy się do norm indukowanych przez normę p -tą Höldera w jednej i drugiej przestrzeni.

Normę macierzy A , indukowaną przez normy p -te w przestrzeniach \mathbb{K}^n i \mathbb{K}^m , będziemy oznaczać symbolem $\|A\|_p$ (który wygląda tak samo jak symbol normy p -tej macierzy kolumnowej, ale ma ogólniejsze znaczenie). Zauważmy, że macierz $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{m,1} = \mathbb{K}^m$ opisuje przekształcenie przestrzeni \mathbb{K}^1 w \mathbb{K}^m ; przekształcając dowolny element sfery jednostkowej w \mathbb{K}^1 , tj. liczbę α , taką że $|\alpha| = 1$, otrzymujemy wektor $\alpha \mathbf{x}$, którego norma jest równa $\|\mathbf{x}\|$. Tak więc, jeśli $n = 1$, to obie interpretacje symbolu $\|\mathbf{x}\|_p$, tj. norma p -ta wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$ i norma przekształcenia $\mathbf{x}: \mathbb{K}^1 \rightarrow \mathbb{K}^m$ indukowana przez normę p -tą, są ze sobą zgodne.

Interpretując normy macierzy jako normy przekształceń indukowane przez normy wektorów, możemy uzasadnić następującą nierówność:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

dla wszystkich macierzy, których iloczyn jest określony. Dla pewnego wektora \mathbf{z} , takiego że $\|\mathbf{z}\| = 1$, mamy bowiem

$$\|AB\| = \|(AB)\mathbf{z}\| = \|A(B\mathbf{z})\| \leq \|A\| \|B\mathbf{z}\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Ta własność norm macierzy nazywa się submultiplikatywnością.

Indukowana norma pierwsza i norma maksimum macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$ są szczególnie łatwe do obliczenia, na podstawie wzorów

$$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Udowodnimy drugi z tych wzorów, dowód pierwszego zostawiając na ćwiczenia. Weźmy wektor $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T$, taki że $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$. Zatem, dla $j = 1, \dots, n$ mamy $|z_j| \leq 1$. Współczynniki wektora $A\mathbf{z} = \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T$ można oszacować

następująco:

$$|x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij} z_j| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |z_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Ponieważ $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |x_i|$, więc mamy górne oszacowanie normy,

$$\|A\|_\infty \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Aby oszacować normę macierzy A z dołu, możemy obliczyć normę ustalonego wektora \mathbf{z} . Niech i oznacza numer wiersza, w którym suma wartości

bezwzględnych współczynników macierzy A jest największa. Współczynniki w tym wierszu są liczbami zespolonymi $a_{i1} = |a_{i1}|s_1, \dots, a_{in} = |a_{in}|s_n$ (jeśli macierz A jest rzeczywista, to $s_j = \pm 1$). Ponieważ $s_j \bar{s}_j = 1$, więc biorąc wektor $\mathbf{z} = [\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n]^T$ i obliczając współczynnik x_i wektora $\mathbf{x} = A\mathbf{z}$ otrzymamy

$$x_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

a ponieważ $\|\mathbf{x}\| \geq |x_i|$, więc stąd wynika nierówność $\|A\|_\infty \geq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Z otrzymanych dwóch nierówności wynika wzór, którego mieliśmy dowieść. \square

Z podanych dwóch wzorów, z których jeden udowodniliśmy wynika, że $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$, oraz $\|A^T\|_\infty = \|A\|_1$, a ponadto możemy przepisać te wzory zamieniając transpozycję na hermitowskie sprzężenie.

Często stosuje się normę drugą wektorów. Indukowana przez nią norma druga macierzy jest trudniejsza do obliczenia i wzór, który ją opisuje, wyprowadzimy na jednym z dalszych wykładów, po zapoznaniu się z niezbędnymi do tego pojęciami. Tymczasem możemy udowodnić (ćwiczenia), że

$$\|A\|_2 = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1}} |\mathbf{x}^H A \mathbf{y}|.$$

Na podstawie tego wzoru łatwo jest pokazać, że

$$\|A\|_2 = \|A^T\|_2 = \|A^H\|_2 = \|\bar{A}\|_2.$$

Stwierdzenie: Jeśli normy $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ w \mathbb{K}^n spełniają warunek $\forall \mathbf{x} \|\mathbf{x}\|_b = \|B\mathbf{x}\|_a$, dla ustalonej nieosobliwej macierzy B , to normy w przestrzeni $\mathbb{K}^{n,n}$, indukowane przez te dwie normy, są związane zależnością $\|A\|_b = \|BAB^{-1}\|_a$.

Dowód: Mamy

$$\|A\|_b = \max_{\|\mathbf{y}\|_b=1} \|A\mathbf{y}\|_b = \max_{\|\mathbf{y}\|_b=1} \|AB^{-1}B\mathbf{y}\|_b = \max_{\|\mathbf{x}\|_a=1} \|BAB^{-1}\mathbf{x}\|_a = \|BAB^{-1}\|_a.$$

\square

Nierówności norm wektorów

Def. Dwie normy, $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$, określone w tej samej przestrzeni V , nazywamy równoważnymi, jeśli istnieją liczby dodatnie c_1 i c_2 , takie że dla każdego $\mathbf{x} \in V$ spełnione są nierówności

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_a.$$

Wszystkie normy w przestrzeni o skończonym wymiarze są równoważne, zatem kwestia polega na znalezieniu odpowiednich liczb c_1 i c_2 . Jeśli je znamy, to wykonując rachunki mające na celu oszacowanie normy $\|\cdot\|_a$ pewnego wektora \mathbf{x} możemy posłużyć się oszacowaniami $\|\mathbf{x}\|_b$, jeśli tylko umiemy je znaleźć.

Najważniejsze w praktyce normy w przestrzeni \mathbb{K}^n spełniają następujące nierówności (dowody na ćwiczeniach):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &\leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2. \end{aligned}$$

Nierówności norm macierzy

Rozważmy p -tą normę wektorową i normę macierzy przez nią indukowaną. Jeśli macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ przedstawimy w postaci blokowo-wierszowej, $A = [A_1, \dots, A_r]$, w której bloki A_1, \dots, A_r mogą mieć różną liczbę kolumn, to dla $j = 1, \dots, r$ mamy $\|A_j\|_p \leq \|A\|_p$.

Dowód: Dowolny wektor w \mathbb{K}^n możemy przedstawić w postaci $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}$. Wtedy

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{z}\|_p=1} \|A\mathbf{z}\|_p \leq \max_{\|\mathbf{z}\|_p=1} \left\| \sum_{j=1}^r A_j z_j \right\| = \|A\|_p. \quad \square$$

Podobnie, jeśli macierz A przedstawimy w postaci blokowo-kolumnowej,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_q \end{bmatrix}, \text{ to } \|A_i\|_p \leq \|A\|_p \text{ dla } i = 1, \dots, q. \text{ Łatwy dowód tego faktu}$$

pozostawiam na ćwiczenia. Tymczasem zauważmy, że stąd i z poprzedniego stwierdzenia wynika, że dla dowolnego podziału blokowego macierzy $A = [A_{ij}]_{i,j}$, nierówność $\|A_{ij}\|_p \leq \|A\|_p$ zachodzi dla każdego bloku A_{ij} .

W wielu zastosowaniach naturalne jest poszukiwanie wartości normy macierzy, indukowanej przez normę drugą w \mathbb{K}^n . Ponieważ norma druga macierzy nie jest bardzo łatwa do obliczenia, więc zamiast niej bywa stosowana norma Frobeniusa, określona wzorem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Zwróćmy uwagę, że (poza przypadkiem $m = 1$ lub $n = 1$) norma ta *nie jest* normą indukowaną przez żadne normy wektorowe. Aby tego dowieść, rozważmy macierz jednostkową, I_n . Reprezentuje ona przekształcenie tożsamościowe przestrzeni \mathbb{K}^n , oczywiste jest więc, że każda norma indukowana tej macierzy jest równa 1. Tymczasem $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$

Norma Frobeniusa i norma druga macierzy (tj. norma w $\mathbb{K}^{m,n}$ indukowana przez normę drugą w \mathbb{K}^n) są równoważne i zachodzą następujące nierówności:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\min\{m, n\}} \|A\|_2.$$

Dowód: Przedstawmy macierz A w postaci blokowo-kolumnowej: $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$.

Weźmy $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^n$, takie że $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$ i $\|A\|_2 = \|A\mathbf{z}\|_2$. Wtedy (na podstawie nierówności Schwarzera)

$$\|A\|_2^2 = \|A\mathbf{z}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_i \mathbf{z}|^2 \leq \sum_{i=1}^m \|\mathbf{a}_i\|_2^2 = \|A\|_F^2.$$

Na podstawie wcześniejszych stwierdzeń dotyczących podziału blokowego macierzy mamy

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|_2^2 \leq m \|A\|_2^2,$$

a także $\|A\|_F^2 = \|A^T\|_F^2 \leq n \|A^T\|_2^2 = n \|A\|_2^2$, co kończy dowód. \square

Dla wygody określa się wartość bezwzględna macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j}$, jako macierz macierz $|A| \stackrel{\text{def}}{=} [|a_{ij}]_{i,j}$.

W zbiorach $\mathbb{Q}^{m,n}$ i $\mathbb{R}^{m,n}$ (ale nie w $\mathbb{C}^{m,n}$) istnieje relacja „nie większy niż” (ozn. symbolem „ \leq ”), która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, czyli jest częściowym porządkiem:

$$[a_{ij}]_{i,j} \leq [b_{ij}]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall_{i,j} a_{ij} \leq b_{ij}.$$

Na przykład, dla dowolnej macierzy A zachodzi relacja $A \leq |A|$.

Możemy też rozpatrywać relacje „mniejszy niż” ($<$), „nie mniejszy niż” (\geq) i „większy niż” ($>$), których definicje łatwo jest zgadnąć.

Oprócz szacowania jednej normy danej macierzy przez inną, stosuje się oszacowania normy macierzy przez normę innej macierzy. Norma w przestrzeni $\mathbb{K}^{m,n}$ nazywa się monotoniczną, jeśli z nierówności $|A| \leq |B|$ wynika $\|A\| \leq \|B\|$. Nie wszystkie normy są monotoniczne, na przykład nie jest monotoniczna norma druga macierzy.

Bez dowodu podam następujące związki między normami macierzy (niektóre z nich są oczywiste, inne mniej):

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \|A^T\|_F = \|A^H\|_F = \|\bar{A}\|_F, \\ \| |A| \|_1 &= \|A\|_1, \quad \| |A| \|_\infty = \|A\|_\infty, \quad \| |A| \|_F = \|A\|_F, \\ \|A\|_2 &\leq \| |A| \|_2, \quad (\text{nie zawsze zachodzi równość}), \\ \|A^H A\|_2 &= \|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty, \end{aligned}$$

Zadania i problemy

1. Def. Seminorma (albo półnorma) nazywamy funkcję $\|\cdot\|' : V \rightarrow \mathbb{K}$, która spełnia wszystkie warunki określające normę, z wyjątkiem tego, że jedynym jej miejscem zerowym jest wektor 0.

Udowodnij, że zbiór wektorów, których seminorma jest równa 0, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Udowodnij, że jeśli wszystkie wektory \mathbf{x} , takie że $\|\mathbf{x}\|' = 0$ należą do podprzestrzeni X przestrzeni V , to wzór $\|[x]\| = \|\mathbf{x}\|'$ określa normę w przestrzeni ilorazowej V/X .

Uzupełnienie informacji na temat norm w przestrzeniach funkcji: istnieją funkcje f różne od 0, takie że $\int_A |f(x)|^p dx = 0$; na przykład funkcja f może przyjmować wartości różne od 0 tylko w skończonej liczbie punktów. Dlatego wzór podany na wykładzie określa funkcję nie spełniającą warunku dodatniości, czyli seminormę. Normę otrzymamy, jeśli utożsamimy każde dwie funkcje, których całka różnicy podniesionej do potęgi p jest równa 0. Dlatego np. określenie „przestrzeń funkcji całkowalnych w potęgę p ” w rzeczywistości oznacza unormowaną przestrzeń ilorazową (o czym często przy różnych okazjach się nie wspomina, bo wszyscy wiedzą).

2. Jaka jest średnica kuli jednostkowej?

3. Udowodnij, że jeśli X i Y są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V , w których są określone normy odpowiednio $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$, oraz $V = X \oplus Y$ (to jest rozkład wektora \mathbf{v} na składowe względem rozkładu przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni X i Y ; rozkład taki jest, przypominam, jednoznaczny), to wzory $\|\mathbf{v}\|_a = \|\mathbf{x}\|_X + \|\mathbf{y}\|_Y$ i $\|\mathbf{v}\|_b = \max(\|\mathbf{x}\|_X, \|\mathbf{y}\|_Y)$, gdzie $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$, określają normy w przestrzeni V .
- 4.* Udowodnij, że przy założeniach takich jak w poprzednim zadaniu wzór $\|\mathbf{v}\| = (\|\mathbf{x}\|_X^p + \|\mathbf{y}\|_Y^p)^{1/p}$ dla $p \geq 1$ określa normę w przestrzeni V .
5. Sprawdź, że norma indukowana w przestrzeni $L(X; Y)$ rzeczywiście spełnia wszystkie warunki potrzebne do tego, aby być normą.
6. Udowodnij wzór umożliwiający obliczenie normy pierwszej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.
7. Udowodnij, że norma p -ta macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ jest nie mniejsza niż norma każdej macierzy, która powstaje z A przez odrzucenie pewnych wierszy.
8. Czy norma macierzy określona wzorem $\| [a_{ij}]_{i,j} \| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ jest submultiplikatywna? Czy jest ona normą indukowaną przez jakąś normę wektorową? Wskazówka: Spróbuj znaleźć kontrprzykład.
9. Oblicz normy $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_F$ macierzy

$$A = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,-1) & (3,0) \\ (0,2) & (3,-2) & (2,1) \end{bmatrix}.$$

10. Udowodnij podane na wykładzie związki między normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ w przestrzeni \mathbb{K}^n .
11. Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Udowodnij, że

$$\|\mathbf{u}\mathbf{v}^H\|_p = \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q,$$

gdzie $p = 1$ i $q = \infty$, albo $p = q = 2$ lub $p = \infty$, $q = 1$.

Wskazówka: Oszacuj z góry i z dołu normę p -tą wektora $\mathbf{u}\mathbf{v}^H \mathbf{z}$ dla $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbf{z}\|_p = 1$.

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb p i q , takich że $1/p + 1/q = 1$ oraz $p \geq 1$, $q \geq 1$. Do jej dowodu można zastosować następującą nierówność Höldera:

$$|\mathbf{y}^H \mathbf{z}| \leq \|\mathbf{y}\|_q \|\mathbf{z}\|_p.$$

Szczególnym przypadkiem tej nierówności, dla $p = q = 2$, jest udowodniona na wykładzie nierówność Schwarz'a.

12. Udowodnij, że indukowana norma druga macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1}} |\mathbf{x}^H A \mathbf{y}|.$$

13. Znajdź wzór umożliwiający obliczenie dowolnej normy indukowanej przez p -tą normę Höldera macierzy *diagonalnej* $n \times n$ i podaj dowód jego poprawności.

Arytmetyka zmiennopozycyjna

Reprezentacje liczb

Ze względów technicznych najwygodniejsza i najczęściej stosowana w komputerach jest reprezentacja liczb złożona z bitów. Każdy z nich ma wartość 0 lub 1 i może być interpretowany jako cyfra w układzie o podstawie 2, albo mieć specjalne znaczenie (np. określać znak liczby). Jeśli mamy ciąg bitów o ustalonej długości d , to może on przyjmować jedną z 2^d wartości, a zatem najwyżej tyle różnych elementów może mieć zbiór obiektów (liczb) reprezentowanych przez takie ciągi. Istnieją reprezentacje liczb o nieustalonej z góry liczbie bitów, a zatem o nieograniczonym (a właściwie o ograniczonym przez ilość dostępnej w komputerze pamięci) zbiorze reprezentowalnych obiektów. W tym wykładzie zajmiemy się jednak dwoma najważniejszymi praktycznie sposobami reprezentowania liczb przez ciągi bitów o ustalonej długości.

Reprezentacja stałopozycyjna (ang. *fixed point*) jest to reprezentacja liczby złożona z d bitów. Każdy bit, który jest cyfrą dwójkową w tej reprezentacji, ma ustalony mnożnik. Ciąg bitów $b_{d-1} \dots b_1 b_0$ jest interpretowany jako liczba stałopozycyjna

$$x = \sum_{k=0}^{d-1} b_k 2^k.$$

Dla każdego ciągu bitów wyrażenie po prawej stronie jest liczbą całkowitą, $0 \leq x < 2^d$. Czasem, w specjalnych zastosowaniach, taki ciąg bitów reprezentuje liczbę

$$x = \sum_{k=0}^{d-1} b_k 2^{k-b},$$

która jest wielokrotnością liczby 2^{-b} ; dla $b > 0$ możemy w ten sposób reprezentować pewne ułamki. Angielska nazwa tej reprezentacji pochodzi stąd, że możemy sobie wyobrazić kropkę (anglosasi piszą kropkę tam, gdzie polska tradycja nakazuje pisać przecinek) między bitami b_b i b_{b-1} ; oddziela ona część całkowitą liczby od części ułamkowej.

Liczby stałopozycyjne ze znakiem mogą być reprezentowane na dwa sposoby: pierwszy z nich polega na zarezerwowaniu bitu b_{d-1} do reprezentowania znaku; liczba reprezentowana przez ciąg bitów $b_{d-1} \dots b_1 b_0$ jest równa

$$x = (-1)^{b_{d-1}} \sum_{k=0}^{d-2} b_k 2^k.$$

W ten sposób mamy *dwie* reprezentacje zera. Inny sposób to tzw. kod uzupełnieniowy do dwóch. Reprezentowana liczba wyraża się wzorem

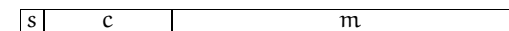
$$x = -b_{d-1} 2^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k 2^k.$$

W ten sposób możemy reprezentować liczby całkowite z zakresu od -2^{d-1} do $2^{d-1} - 1$ i każda z nich ma tylko jedną reprezentację. Sposób ten jest wygodniejszy, m.in. dlatego, że operacje na bitach podczas dodawania i odejmowania są identyczne jak w przypadku, gdy te same ciągi bitów są interpretowane jako liczby bez znaku.

Sposób reprezentowania liczb ze znakiem można uogólnić w celu otrzymania reprezentacji stałopozycyjnej ułamków; zauważmy, że dodawanie i odejmowanie takich ułamków może być wykonywane przez te same rozkazy procesora, co dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych; inne muszą być tylko rozkazy mnożenia i dzielenia. Z uwagi na niebezpieczeństwo wystąpienia nadmiaru lub niedomiaru, czyli otrzymania liczby, której nie można reprezentować w ogóle, albo której nie można reprezentować dostatecznie dokładnie, reprezentacja stałopozycyjna ułamków jest stosowana bardzo rzadko.

Reprezentacja zmiennopozycyjna (ang. *floating point*) polega na tym, że pewne bity reprezentacji są mnożone przez nieustaloną z góry potęgę dwójki. Reprezentacja taka składa się z trzech części: bitu znaku, d bitów cechy oraz t bitów mantysy. W początkach rozwoju informatyki prawie każdy komputer był wyposażony w inną reprezentację liczb, ale na szczęście to już minęło i obecnie powszechnie (z nielicznymi wyjątkami) jest stosowany standard IEEE-754.

W podstawowej reprezentacji liczby w tym standardzie najstarszy bit jest bitem znaku, a po nim występuje cecha c i mantysa m :



Mantysa jest liczbą rzeczywistą; jeśli reprezentuje ją ciąg bitów $b_{t-1} b_{t-2} \dots b_1 b_0$, to $m = \sum_{k=0}^{t-1} b_k 2^{k-t}$, a zatem zawsze $0 \leq m < 1$. Cecha jest liczbą całkowitą (bez znaku), która wpływa na sposób interpretacji całego ciągu bitów. Liczba reprezentowana przez taki ciąg, w zależności od cechy, jest równa

$$\begin{aligned} x &= (-1)^s 2^{c-b} (1 + m) && \text{dla } 0 < c < 2^d - 1, \\ x &= (-1)^s 2^{1-b} m && \text{dla } c = 0, \\ x &= (-1)^s \infty && \text{dla } c = 2^d - 1, m = 0, \\ x &= \text{NaN („nie-liczba")} && \text{dla } c = 2^d - 1, m \neq 0. \end{aligned}$$

Cechą charakterystyczną tej reprezentacji z użyciem pierwszego wzoru jest tzw. normalizacja. Mając dowolną liczbę rzeczywistą x , przedstawioną w układzie dwójkowym, dobieramy cechę c (czyli równoważnie czynnik 2^{c-b}) tak, że czynnik $(1+m)$ w wyrażeniu opisującym x jest liczbą z przedziału $[1, 2)$. Jeśli otrzymana w ten sposób cecha jest za duża (większa lub równa $2^d - 1$), to mamy nadmiar zmiennopozycyjny (ang. *floating point overflow*), czyli niewykonalne zadanie reprezentowania liczby o za dużej wartości bezwzględnej.

Bardziej skomplikowana sytuacja zdarza się w przypadku, gdy cecha jest za mała (tj. gdy należałoby przyjąć $c \leq 0$). Wtedy korzystamy z drugiego wzoru, w którym występuje czynnik m (przypominam, że $m \in [0, 1)$). W takim przypadku mamy do czynienia z niedomiarem zmiennopozycyjnym, czyli reprezentowaniem liczby x za pomocą mantysy o mniejszej liczbie bitów znaczących (znaczące są tylko bity mantysy od pozycji najmniej znaczącej, do najbardziej znaczącej pozycji, na której jest jedynka). Najdokładniejszą reprezentacją liczb o bardzo małej wartości bezwzględnej (mniejszej niż 2^{-b-t}) jest 0. Niedomiar wiąże się z utratą dokładności reprezentacji, o czym za chwilę.

Jeśli cecha c jest równa $2^d - 1$, to ciąg bitów interpretujemy jako nieskończoność (ze znakiem), albo nie-liczbę (NaN). Sposób ich przetwarzania (w razie użycia ich jako argumentów operacji arytmetycznych) zależy od procesora (który może umożliwiać określenie sposobu działania w takim przypadku). Obiekty takie najczęściej przydają się w sytuacjach wyjątkowych. Na przykład procesory w komputerach klasy PC generują NaN w razie błędu, np. próby obliczenia pierwiastka z liczby ujemnej lub logarytmu liczby niedodatniej. Wartość mantysy umożliwia identyfikację powodu powstania nie-liczby.

Zastosowanie normalizacji ma dwa skutki. Po pierwsze, każda liczba z wyjątkiem zera ma tylko jedną reprezentację (dwie reprezentacje zera mają różne bity znaku). Dzięki temu łatwo jest porównywać liczby reprezentowane w taki sposób. Niech $z(x)$ oznacza liczbę całkowitą bez znaku, reprezentowaną przez ten sam ciąg bitów, co liczba zmiennopozycyjna x . Najbardziej znaczący bit tej liczby jest bitem znaku, a po nim kolejno są bity cechy i mantysy. Załóżmy, że bit znaku w reprezentacjach pewnych liczb x i y jest równy 0. Łatwo jest przekonać się, że wynik ich porównania jest identyczny z wynikiem porównania liczb całkowitych $z(x)$ i $z(y)$. Ponadto liczba całkowita $z(+\infty)$ jest większa niż $z(x)$, a także $z(+NaN) > z(+\infty)$.

Drugi skutek normalizacji to optymalne wykorzystanie bitów mantysy do uzyskania jak najmniejszego błędu względnego reprezentacji dowolnej liczby.

Ponieważ każdy ciąg bitów określa inną liczbę, więc więcej różnych liczb rzeczywistych ma dokładne reprezentacje, dzięki czemu błąd reprezentacji dowolnej liczby rzeczywistej jest mniejszy. Weźmy $x \neq 0$. Istnieje liczba $f \in [0, 1)$, reprezentowana przez nieskończony ciąg cyfr dwójkowych (bitów), taka że $x = (-1)^s 2^{c-b} (1+f)$. Reprezentacja zmiennopozycyjna $rd(x) = (-1)^s 2^{c-b} (1+m)$ ma cechę i mantysę m dobrane tak, aby wartość bezwzględna różnicy $x - rd(x)$ była jak najmniejsza. Ponieważ mantysa jest wielokrotnością liczby 2^{-t} , więc wybierając odpowiednio kierunek zaokrąglania możemy zapewnić, że $|f - m| \leq 2^{-t-1}$. Błąd względny reprezentacji liczby x możemy zatem oszacować następująco:

$$\left| \frac{x - rd(x)}{x} \right| = \left| \frac{(-1)^s 2^{c-b} (1+f) - (-1)^s 2^{c-b} (1+m)}{(-1)^s 2^{c-b} (1+f)} \right| \leq \frac{2^{c-b} 2^{-t-1}}{2^{c-b}} = 2^{-t-1}.$$

Wybierając mniej starannie kierunek zaokrąglania mamy $|x - rd(x)|/|x| \leq 2^{-t}$. Natomiast w przypadku niedomiaru liczba $x = (-1)^s 2^{1-b} f$, gdzie $0 \leq f < 1$, jest przybliżana za pomocą $rd(x) = (-1)^s 2^{1-b} m$ (z odpowiednio dobraną mantysą m) i mamy oszacowanie błędu za pomocą ułamka

$$\left| \frac{x - rd(x)}{x} \right| = \left| \frac{f - m}{f} \right|,$$

który dla $x \rightarrow 0$ dąży do 1. Tak więc skutkiem niedomiaru jest wzrost błędu względnego reprezentacji nawet do 100%. Utrata dokładności jest stopniowa: maksymalny błąd względny reprezentacji liczb niewiele mniejszych niż 2^{-b} jest niewiele większy od 2^{-t} .

W standardzie IEEE-754 są określone reprezentacje pojedynczej i podwójnej precyzji (poza standardem istnieje też nieoficjalny i rzadko spotykany format o poczwórnej precyzji). Ponadto są określone reprezentacje rozszerzonej precyzji. W reprezentacji rozszerzonej standard określa *minimalne* liczby bitów cechy i mantysy. Mantysa jest reprezentowana za pomocą $t+1$ bitów $b_t b_{t-1} \dots b_1 b_0$, i jest równa $m = \sum_{k=0}^t b_k 2^{k-t}$ (zawsze jest więc $m \in [0, 2)$); dla $c < 2^d - 1$ liczba zmiennopozycyjna rozszerzonej precyzji jest równa $x = (-1)^s 2^{c-b} m$. Jeśli $c = 2^d - 1$, to cały ciąg bitów reprezentuje $\pm\infty$ lub NaN. Reprezentacja rozszerzona nie narzuca postaci znormalizowanej, ale wyniki działań arytmetycznych, jeśli nie ma niedomiaru, są poddawane normalizacji.

Reprezentacje rozszerzonej precyzji nie zawsze są dostępne. Procesory w PC-tach obsługują reprezentację rozszerzonej precyzji podwójnej. Odbywa się to tak, że rejestry jednostki zmiennopozycyjnej przechowują liczby w formacie rozszerzonej precyzji i wszystkie obliczenia są wykonywane w tej reprezentacji. Konwersja między pojedynczą lub podwójną precyzją a rozszerzoną precyzją odbywa się podczas przesyłania danych między rejestrami i pamięcią operacyjną.

Reprezentacje liczb pojedynczej, podwójnej i podwójnej rozszerzonej precyzji na komputerach klasy PC w języku C są dostępne pod nazwami float, double i long double, a w Turbo Pascalu — single, double i extended. Typ real w Turbo Pascalu jest niestandardowy i dlatego nie należy go używać w programach wymieniających dane w postaci binarnej z innymi programami (a najlepiej wcale).

W tabeli niżej są przedstawione liczby bitów i inne parametry reprezentacji standardowych. Litera B oznacza całkowitą liczbę bitów, litera d — liczbę bitów cechy, t — liczbę bitów mantysy. Litera b oznacza stałą odejmowaną od cechy we wzorze opisującym reprezentowaną liczbę. Stałe $M = 2^{2^d - b - 2}(2 - 2^t)$ i $S = 2^{1-b}$ to największa i najmniejsza liczba dodatnia, które można reprezentować w postaci znormalizowanej, bez nadmiaru i niedomiaru. Błąd względny tej reprezentacji nie przewyższa $\nu = 2^{-t}$. Liczba $\mu = 2^{1-b-t}$ jest najmniejszą liczbą dodatnią, która ma reprezentację różną od zera. Liczby M, S, ν i μ są podane w przybliżeniu (tylko rząd wielkości).

	B	d	t	b	M	S	ν	μ
pojedyncza	32	8	23	127	10^{38}	10^{-38}	10^{-7}	10^{-45}
pojed. rozszerzona	44	11	31	1023	10^{308}	10^{-308}	10^{-10}	10^{-317}
podwójna	64	11	52	1023	10^{308}	10^{-308}	10^{-15}	10^{-323}
podw. rozszerzona	80	15	63	16383	10^{4932}	10^{-4932}	10^{-19}	10^{-4951}

Działania arytmetyczne

Wyniki działań arytmetycznych na liczbach stałopozycyjnych są identyczne z „prawdziwymi” wynikami działań na liczbach całkowitych, pod warunkiem, że wynik daje się w ten sposób reprezentować, czyli w szczególności nie wystąpi nadmiar. Jeśli oznaczymy $M = 2^d$, gdzie d jest liczbą bitów liczby stałopozycyjnej bez znaku, to dodawanie, odejmowanie i mnożenie są wykonywane modulo M, a więc procesor realizuje działania algebraiczne pierścienia \mathbb{Z}_M . Czasem można to bezpośrednio wykorzystać praktycznie (np. w generatorach liczb pseudolosowych). W pewnych systemach wystąpienie nadmiaru jest jednak wykrywane i powoduje przerwanie działania programu. W okolicach tego wykładu liczby stałopozycyjne mają znaczenie pomocnicze; będą one stosowane najczęściej jako indeksy tablic, w których przechowujemy liczby zmiennopozycyjne reprezentujące elementy ciał liczbowych \mathbb{Q} , \mathbb{R} lub \mathbb{C} .

Działania na liczbach zmiennopozycyjnych polegają na wyznaczeniu liczby zmiennopozycyjnej możliwie mało różniącej się od wyniku „prawdziwego”

działania. Jeśli nie wystąpi nadmiar ani niedomiar, to błąd względny takiej reprezentacji nie przewyższa $\nu = 2^{-t}$ i wtedy możemy napisać

$$\text{fl}(a \diamond b) = (a \diamond b)(1 + \varepsilon),$$

gdzie „ \diamond ” oznacza dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie, zaś ε oznacza błąd względny reprezentacji wyniku. Zatem $|\varepsilon| \leq 2^{-t}$. Jeśli natomiast wystąpi niedomiar, to

$$\text{fl}(a \diamond b) = (a \diamond b) + \delta,$$

gdzie $|\delta| \leq \mu = 2^{1-b-t}$. Zwróćmy uwagę, że w obu przypadkach znak błędu względnego ε i bezwzględnego δ może być dowolny.

Działania arytmetyki zmiennopozycyjnej nie mają własności działań algebraicznych w ciałach \mathbb{Q} ani \mathbb{R} . Z punktu widzenia algebry nie są to działania, ponieważ zbiór liczb zmiennopozycyjnych o ustalonej precyzji *nie jest zamknięty* ze względu na żadne z tych działań, *nie są też spełnione* prawa łączności dodawania i mnożenia, ani prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Oprócz formatów liczb zmiennopozycyjnych standard IEEE-754 określa podstawowe wymagania, jakie muszą być spełnione przez implementację działań w procesorach. Między innymi określone są tryby zaokrąglania wyników działań (domyślnie — do najbliższej liczby o dokładnej reprezentacji, a jeśli jesteśmy dokładnie „w połowie”, to tak, aby najmniej znaczący bit mantysy był równy 0). Są też określone sytuacje wyjątkowe (takie jak nadmiar) i środki umożliwiające ich obsługę. Gorzej bywa ze sposobem uwzględnienia tego standardu w praktyce. Na przykład w raportach języków programowania nie ma zwykle opisu, jak można procedurę obsługi błędów „podłączyć” do systemu przerwań komputera i dlatego obsługa wyjątków jest zwykle nieprzenośną częścią programów, które mają działać w różnych systemach operacyjnych.

Również źle jest z błędami zaokrągleń; tzw. optymalizacja jest procesem przekształcania programu przez kompilator w celu otrzymania jak najszybciej działającego kodu maszynowego. Istnieją kompilatory, których twórcy nie pamiętali o tym, że działania zmiennopozycyjne nie mają takich własności jak działania algebraiczne na liczbach rzeczywistych (chodzi o łączność i rozdzielność). Kompilatory te przekształcają wyrażenia np. w taki sposób:

$$\begin{aligned} a * c + b * c &\rightarrow (a + b) * c, \\ \text{albo co gorsza } (a + c) - (b + c) &\rightarrow a - b, \end{aligned}$$

co prowadzi do zmiany wyniku. Takie postępowanie ma dwa skutki: po pierwsze odbiera sens dobrze wykonanej pracy twórców standardu, który miał zapewnić (i teoretycznie zapewnia) binarną przenośność programów wykonujących obliczenia numeryczne (czyli gwarancję, że dwa różne procesory wykonujące programy o tym samym kodzie źródłowym, obliczą dla tych samych danych identyczne wyniki), a po drugie niweczą wysiłki osób opracowujących algorytmy oparte na wzorach specjalnie zaprojektowanych w celu zmniejszenia skutków błędów zaokrągleń (zobacz np. algorytm Kahana przedstawiony w ostatnim ćwiczeniu).

Podsumowując, osoby które będą projektować języki programowania i kompilatory uprasza się o dokładniejsze zapoznanie ze standardem i nie robienie takiej „optymalizacji” (ale to nie oznacza rezygnacji z optymalizacji w ogóle).

Pojęcie uwarunkowania zadań numerycznych

Wydawać by się mogło, że błędy opisanych wyżej reprezentacji zmiennopozycyjnych są tak małe, że dokładność rozwiązań zadań (czyli wyników obliczeń numerycznych) jest zawsze wystarczająca. To jest mylne wrażenie. Wyniki zależą od danych, które reprezentujemy w przybliżeniu. Już samo to oznacza, że zamiast otrzymać rozwiązanie oryginalnego zadania, możemy tylko rozwiązać *inne* zadanie, powstałe przez obciążenie danych błędami. W wielu przypadkach dane do obliczeń numerycznych są otrzymane w wyniku pomiarów fizycznych. Błędy takich danych mogą być znacznie większe (niektóre wielkości fizyczne umiemy zmierzyć z dokładnością co najwyżej do kilku procent). Dlatego podstawową kwestią w obliczeniach numerycznych jest sprawdzenie, jak bardzo obliczone wyniki mogą się różnić od wyników zadania wyjściowego.

Przypuśćmy, że zadanie polega na obliczeniu wartości pewnej funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dane x_1, \dots, x_n to argumenty funkcji f , zaś wynik (wartość funkcji) jest ciągiem liczb y_1, \dots, y_m . Zarówno dane, jak i wyniki będziemy reprezentować w postaci zmiennopozycyjnej, która (w razie niewystąpienia nadmiaru ani niedomiaru) gwarantuje, że błąd względny reprezentacji jest mniejszy niż $\nu = 2^{-t}$. Dlatego zajmiemy się wpływem błędów względnych danych na względną zmianę wyniku.

Oznaczmy $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ i $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$. Każda z liczb x_i jest reprezentowana za pomocą liczby zmiennopozycyjnej \tilde{x}_i , takiej że $x_i - \tilde{x}_i = \varepsilon_i x_i$, gdzie $|\varepsilon_i| < \nu$. Zamiast wektora danych \mathbf{x} mamy więc wektor $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}$, gdzie $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \dots, \delta_n]^T$ i $|\delta_i| < \nu |x_i|$ dla $i = 1, \dots, n$. Rozważmy p-tą normę Höldera

w przestrzeni \mathbb{R}^n . Jest ona monotoniczna, skąd wynika, że

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_p = \|[\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n]^T\|_p \leq \|[\nu x_1, \dots, \nu x_n]^T\|_p = \nu \|\mathbf{x}\|_p.$$

Błąd względny reprezentacji $\tilde{\mathbf{x}}$ wektora \mathbf{x} możemy scharakteryzować za pomocą jednej liczby, $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_p / \|\mathbf{x}\|_p$. Na podstawie oszacowania dokonanego przed chwilą wiemy, że błąd ten jest nie większy niż ν . Oczywiście, z nierówności $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p \nu$ *nie wynika*, że błąd każdego współczynnika wektora \mathbf{x} przez odpowiedni współczynnik wektora $\tilde{\mathbf{x}}$ jest mały (w rzeczywistości błąd względny współczynników o małej wartości bezwzględnej może być dowolnie duży).

Możemy teraz określić jedno z najważniejszych pojęć związanych z zadaniami numerycznymi.

Def. Wskaźnik uwarunkowania zadania obliczenia wektora $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ jest to liczba

$$\text{cond}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \sup_{\tilde{\mathbf{x}}: \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon} \left(\frac{\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{y}\|} / \frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right),$$

gdzie $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathbf{y}} = f(\tilde{\mathbf{x}})$, zaś liczba ε jest górnym oszacowaniem błędu danych.

Symbol „cond” pochodzi od angielskiego terminu *condition number*. Oczywiście, wskaźnik uwarunkowania zależy od przyjętej normy. Zadania, których wskaźnik uwarunkowania jest mały to zadania dobrze uwarunkowane, zaś zadania o dużym wskaźniku uwarunkowania są źle uwarunkowane.

Wskaźnik uwarunkowania jest czynnikiem, z jakim błąd reprezentacji danych może przenieść się na błąd otrzymanego wyniku. Znając wskaźnik uwarunkowania konkretnego zadania i błąd względny danych (wynikający z pomiaru oraz przybliżonej reprezentacji) możemy oszacować nieunikniony (dla żadnej metody rozwiązywania zadania) błąd względny wyniku. Jeśli więc mamy np. zadanie tak źle uwarunkowane, że $\text{cond } \mathbf{x} > 2^t$, to błąd wyniku może przekroczyć 100%, a zatem numeryczne rozwiązywanie tego zadania przy użyciu arytmetyki zmiennopozycyjnej z mantysą o długości t nie ma sensu. Gdyby wynik był jedną liczbą, to nawet nie poznalibyśmy jej znaku.

Wskaźniki uwarunkowania rozważa się dla podzbiorów danych i wyników, można np. określać je dla indywidualnych składowch x_i . Definicja wskaźnika uwarunkowania nie pozwala na łatwe obliczanie go, ale w pewnych przypadkach można sobie poradzić. Przypuśćmy, że mamy obliczyć liczbę $y = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, przy czym funkcja f ma ciągłą pochodną w otoczeniu punktu x . Wtedy możemy przyjąć

$$\text{cond}_{\mathbf{y}} x \approx \left| \frac{df}{dx} \right| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|.$$

Podkreślę jeszcze raz, że pojęcie uwarunkowania zadania nie ma nic wspólnego z metodami (algorytmami) jego rozwiązywania. Dobry algorytm może dać wynik, którego błąd ma oszacowanie niewiele większe od oszacowania wynikającego z uwarunkowania zadania. Zły algorytm może wytworzyć błąd dużo większy.

Zbadajmy uwarunkowanie zadań obliczania sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu liczb rzeczywistych. Jeśli więc $y = a \pm x$, to

$$\text{cond}_y x \approx \left| \frac{dy}{dx} \right| \cdot \left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{x}{a \pm x} \right|.$$

Jeśli więc dodajemy liczby o przeciwnych znakach lub odejmujemy liczby o tym samym znaku, to wskaźnik uwarunkowania zadania i związane z nim błędy mogą być dowolnie duże. Zjawisko to nazywa się znoszeniem się składników.

Podobnie możemy obliczyć dla $y = ax$ i $z = a/x$

$$\text{cond}_y x \approx \left| \frac{ax}{ax} \right| = 1 \quad \text{oraz} \quad \text{cond}_z x \approx \left| \frac{a}{x^2} ax \cdot x \right| = 1,$$

a zatem mnożenie i dzielenie zawsze są zadaniami dobrze uwarunkowanymi.

Zbadajmy bardziej ambitny przykład: zadanie obliczania pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 - 2px + q$, przy założeniu, że $\Delta = p^2 - q > 0$. Mamy $x_{1,2} = p \pm \sqrt{\Delta}$. Obliczmy

$$\text{cond}_{x_{1,2}} p \approx \left| \frac{-x_{1,2}}{\sqrt{\Delta}} \frac{p}{x_{1,2}} \right| = \left| \frac{p}{\sqrt{\Delta}} \right|, \quad \text{oraz}$$

$$\text{cond}_{x_{1,2}} q \approx \left| \frac{\mp 1}{2\sqrt{\Delta}} \frac{q}{p \pm \sqrt{\Delta}} \right| = \left| \frac{p \mp \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right|.$$

Jeśli $p \neq 0$, to dla $q \rightarrow p^2$ oba wskaźniki rosną nieograniczenie (czyli zadanie może być dowolnie źle uwarunkowane), ale jeśli $q \leq 0$, to $\text{cond}_{x_{1,2}} p \leq 1$ i $\text{cond}_{x_{1,2}} q \leq 1$, a zatem zadania obliczenia obu pierwiastków są bardzo dobrze uwarunkowane.

Numeryczna poprawność i numeryczna stabilność algorytmów

Mając zadanie numerycznego obliczenia wartości pewnej funkcji $f(x)$ nie możemy spodziewać się, że otrzymany błąd będzie mniejszy niż oszacowanie wynikające z uwarunkowania zadania i dokładności arytmetyki zmiennopozycyjnej, w której reprezentujemy dane. Dokładniej, błąd może być mniejszy, ale nie mamy możliwości sprawdzenia tego bez użycia dokładniejszej arytmetyki. Oprócz

zmiany wyniku spowodowanej zaburzeniem danych, dodatkowe błędy wnosi użyty algorytm.

Pojęcie numerycznej poprawności algorytmu opiera się na pomysł, aby skutki tych błędów interpretować jako dodatkowe zaburzenie danych i wyniku. Algorytm A jest numerycznie poprawny wtedy, gdy dla każdego wektora danych x w rozważanej klasie zadań istnieją dane \tilde{x} , niewiele różniące się od x , takie że wynik \tilde{y} obliczenia wartości funkcji $f(x)$ algorytmem A (tj. $\tilde{y} = A(\tilde{x})$) niewiele różni się od wektora $f(x)$. Dokładniej, algorytm A jest numerycznie poprawny w klasie zadań D , jeśli istnieją (możliwie małe) stałe K_d i K_w , takie że przy realizacji algorytmu za pomocą arytmetyki zmiennopozycyjnej o błędzie reprezentacji v , dla każdego wektora danych $x \in D$ istnieje $\tilde{x} \in D$, taki że

$$\|x - \tilde{x}\| \leq K_d \|x\| v \quad \text{oraz} \quad \|f(\tilde{x}) - A(x)\| \leq K_w \|f(x)\| v.$$

Stałe K_d i K_w nazywają się stałymi kumulacji; nie mogą one zależeć od danych, ale mogą zależeć od *rozmiaru zadania*, na przykład od liczby współczynników wektora danych. Z dwóch algorytmów numerycznie poprawnych lepszy (ze względu na błędy) jest ten, który ma stałe kumulacji mniejsze.

Trzeba podkreślić, że nie każdy algorytm jest numerycznie poprawny. Przy tym istnieją zadania, dla których algorytmy numerycznie poprawne nie są znane (i nie wiadomo, czy istnieją).

Nie każdy algorytm jest numerycznie poprawny i nie dla każdego zadania znany jest taki algorytm. Własność słabsza to tzw. numeryczna stabilność. Algorytm, który ma tę własność, wytwarza błędy zaokrągleń, które nie są wprawdzie równoważne zaburzeniom danych, ale ich oszacowanie jest proporcjonalne do błędu $v = 2^{-t}$ reprezentacji liczb. Tak więc rozwiązując zadanie za pomocą tego samego algorytmu zaimplementowanego przy użyciu arytmetyki o mantysie $2t$ -bitowej otrzymamy wynik z błędem, którego oszacowanie jest 2^{-t} razy mniejsze. Nie każdy algorytm jest numerycznie stabilny.

Rozwiązując zadania z pewnej klasy D za pomocą algorytmu numerycznie stabilnego otrzymujemy zamiast $y = f(x)$ wynik \tilde{y} , którego błąd ma oszacowanie proporcjonalne do wskaźnika uwarunkowania zadania. Każdy algorytm numerycznie poprawny jest więc numerycznie stabilny. Numerycznie stabilne są też algorytmy, które obliczają wiele wyników (np. liczby x_1, \dots, x_n spełniające dany układ równań liniowych, rozpatrywane osobno), jeśli ze względu na każdy wynik algorytm jest numerycznie poprawny (ale dla każdego wyniku zaburzone dane, równoważne skutkom błędów zaokrągleń, jest inne).

Zadania i problemy

- Jeśli wynik działania zmiennopozycyjnego ma dokładną reprezentację, to nie podlega zaokrągleniu. Na przykład jeśli oba argumenty dodawania, odejmowania i mnożenia są liczbami całkowitymi, to wynik też. Jaka jest największa nieparzysta liczba całkowita, której reprezentacja zmiennopozycyjna jest dokładna? Jak duże liczby całkowite mogą być argumentami wymienionych trzech działań, aby błędu nie było? Czy można wskazać inne argumenty o szczególnych wartościach, dla których zaokrąglenie nie zmienia wyniku?
- Rozważmy tablicę liczb zmiennopozycyjnych pojedynczej albo podwójnej precyzji. Udowodnij, że jeśli dokonamy następującego przekształcenia bitów każdej takiej liczby:
jeśli $s = 0$, to $s := 1$, a w przeciwnym razie zaneguj wszystkie bity, i posortujemy tablicę otrzymanych ciągów bitów według wartości reprezentowanych przez nie liczb stałopozycyjnych bez znaku, a następnie dokonamy przekształcenia odwrotnego, to wynik takiego sortowania jest taki jak wynik sortowania liczb zmiennopozycyjnych w tej tablicy.
Co się dzieje, jeśli sortujemy w ten sposób tablicę, która zawiera nie-liczby i nieskończoności?
Czy taką metodę sortowania można zastosować do tablicy liczb rozszerzonej precyzji?
- Udowodnij, że algorytm obliczania liczby $x = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ dla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, programem

```
x := 0;
for i := 1 to n do x := x + a[i] * b[i]
```

jest numerycznie poprawny. Zaproponuj sposób określenia zaburzeń równoważnych błędom zaokrągleń i znajdź stałe kumulacji.
- Niech $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że dla $n > 2$ algorytm obliczania wektora $\mathbf{x} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{c}$ oparty na wzorze $(\mathbf{a} \mathbf{b}^T) \mathbf{c}$ nie jest numerycznie poprawny, w przeciwieństwie do $\mathbf{a} (\mathbf{b}^T \mathbf{c})$.
- Liczbę $x = a^2 - b^2$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ można obliczyć dwiema metodami:
 $A_1(a, b) = a * a - b * b$, albo $A_2(a, b) = (a - b) * (a + b)$. Czy to są algorytmy numerycznie poprawne? Który z nich jest lepszy? (zwróć uwagę na skutki błędów zaokrągleń i możliwość wystąpienia nadmiaru albo niedomiaru).
- Zaprojektuj algorytm obliczania rozwiązań równania $x^2 - 2px + q = 0$, w którym jeśli $q < 0$, to nie występuje znoszenie się składników. Zbadaj, czy ten algorytm jest numerycznie poprawny.
- Wykaż, że rozwiązując układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi przy użyciu wyznaczników można skonstruować zaburzenia danych równoważne błędowi każdej z niewiadomych z osobna, ale na ogół nie ma takich zaburzeń

współczynników układu, aby wektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ był obliczony z błędem równoważnym tym zaburzeniom.

- Algorytmy dodawania, odejmowania i mnożenia liczb zespolonych oparte na wzorach definiujących te działania dają wynik obciążony małym błędem (oczywiście, jeśli ten wynik daje się reprezentować):

$$\text{fl}(z_1 \pm z_2) = (z_1 \pm z_2)(1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq 2^{-t},$$

$$\text{fl}(z_1 \cdot z_2) = (z_1 \cdot z_2)(1 + \delta), \quad |\delta| \leq (1 + \sqrt{2})2^{-t}$$

(błędy ε i δ są liczbami zespolonymi). Algorytm dzielenia powinien być specjalnie zaprojektowany, aby był odporny na nadmiar i niedomiar. Iloraz $z_1/z_2 = (a_1, b_1)/(a_2, b_2)$ oblicza się tak:

$$z_1/z_2 = \left(\frac{a_1 + b_1 p}{a_2 + b_2 p}, \frac{b_1 - a_1 p}{a_2 + b_2 p} \right), \quad \text{gdzie } p = \frac{b_2}{a_2} \text{ jeśli } |a_2| \geq |b_2|, \quad \text{albo}$$

$$z_1/z_2 = \left(\frac{a_1 q + b_1}{a_2 q + b_2}, \frac{b_1 q - a_1}{a_2 q + b_2} \right), \quad \text{gdzie } q = \frac{a_2}{b_2} \text{ jeśli } |a_2| < |b_2|.$$

Wtedy

$$\text{fl}(z_1/z_2) = (z_1/z_2)(1 + \gamma), \quad |\gamma| \leq (4 + \sqrt{2})2^{-t} + O(2^{-2t}).$$

- Zaproponuj sposób obliczania wartości bezwzględnej liczby zespolonej $z = (a, b)$, odporny na nadmiar i niedomiar.
- Następujący algorytm Kahana służy do obliczania sumy wielu liczb z dokładnością lepszą niż algorytm zwyczajnie dodający kolejne składniki:

```
s := x[1];
c := 0;
for i := 2 to n do begin
  y := x[i] - c;
  t := s + y;
  c := (t - s) - y;
  s := t
end
```

Działanie algorytmu polega na obliczaniu poprawki y , która reprezentuje sumaryczny błąd popełniony podczas obliczania sumy częściowej. Para zmiennych s i c symuluje zmienną o dwa razy dłuższej mantysie, w której obliczana jest suma. Próba przekształcenia tego kodu oparta na założeniu, że działania zmiennopozycyjne są łączne, doprowadza do otrzymania „zwykłego” algorytmu sumowania, a przecież algorytmy takie jak powyżej są używane wtedy, gdy metody „zwykłe” są za mało dokładne. Niestety, istnieją kompilatory, które coś takiego robią.

Implementacja komputerowa eliminacji Gaussa

Rozwiązując układ równań liniowych metodą eliminacji Gaussa przy użyciu komputera przechowujemy współczynniki równań w tablicy (uwaga: trzeba rozróżniać *macierz* współczynników układu, czyli obiekt matematyczny, od *tablicy*, czyli struktury danych, w której przechowujemy te współczynniki). Elementom tablicy przypisujemy odpowiednie współczynniki kolejno otrzymywanych macierzy, niszcząc ich poprzednią zawartość. Zauważmy, że nie musimy wpisywać zer w miejsce współczynników $a_{ik}^{(k-1)}$; wystarczy tylko pamiętać, że zawartość odpowiednich miejsc w tablicy nie reprezentuje współczynników przekształconej macierzy. Miejsca te możemy więc wykorzystać do przechowania liczb l_{ik} , czyli współczynników macierzy trójkątnej dolnej L .

Rozwiązywanie układu równań metodą eliminacji Gaussa polega na znalezieniu macierzy trójkątnych L , R i macierzy permutacji P , Q , takich że $PAQ^{-1} = LR$. Do reprezentowania macierzy P i Q użyjemy dwóch tablic jednowymiarowych, P i Q , o długości $\min(m, n)$. Jeśli przyjmiemy, że w tablicy a o wymiarach $m \times n + 1$ przechowujemy początkowo współczynniki macierzy uzupełnionej $[A, b]$, to algorytm przekształcania układu możemy zapisać w taki sposób:

```

for k := 1 to min(m, n) do begin
  P[k] := k;  Q[k] := k;
  if a[k, k] = 0 then begin
    if a[j, k] = 0 dla j ∈ {k+1, ..., m} then begin
      if a[i, j] = 0 dla i ∈ {k, ..., m}, j ∈ {k+1, ..., n}
      then zakończ procedurę, r = k - 1
    else begin
      weź j, takie że a[i, j] ≠ 0 dla pewnego i ∈ {k, ..., m};
      przestaw kolumny j i k w tablicy a;  Q[k] := j
    end
  end;
  if a[k, k] = 0 then begin
    weź j, takie że a[j, k] ≠ 0;
    przestaw wiersze j i k tablicy a;  P[k] := j
  end;
end;
for j := k+1 to m do begin
  ljk := a[j, k]/a[k, k];  a[j, k] := ljk;
  for i := k+1 to n+1 do
    a[j, i] := a[j, i] - ljk * a[k, i]
  end
end;
r = min(m, n)

```

Przestawiając w kroku k -tym wiersz k -ty z wierszem j -tym, zmiennej $P[k]$ przypisujemy wartość j ; w przypadku, gdy nie wykonujemy przestawienia wierszy, przypisujemy $P[k] := k$.

Podobnie, przestawiając kolumny j i k , przypisujemy $Q[k] := j$, a jeśli kolumn nie przestawiamy, to w zmiennej $Q[k]$ zapamiętamy liczbę k . Zawartość tablicy Q umożliwi odtworzenie permutacji kolumn tablicy; zauważmy, że reprezentuje ona również permutację odwrotną. Jeśli po rozwiązaniu układu w tablicy x mamy wartości niewiadomych, które trzeba poprzestawiać tak, aby otrzymać rozwiązanie układu wyjściowego, to wystarczy wykonać procedurę

```

for k := r downto 1 do
  przestaw ( x[k], x[Q[k]] );

```

Przykład. Przypuśćmy, że mamy układ równań, którego macierz $A \in \mathbb{K}^{4,5}$ ma rząd równy 2. Po przekształceniu układu równań w opisany sposób, zawartość tablicy a wygląda następująco:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|c} r_{11} & r_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & c_1 \\ l_{21} & r_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & c_2 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ l_{41} & l_{42} & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array} \right].$$

Liczby r_{ij} i t_{ij} są współczynnikami bloków

$$R^{(2)} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ t_{23} & t_{24} & t_{25} \end{bmatrix}$$

macierzy trójkątnej górnej $R \in \mathbb{K}^{4,5}$ otrzymanej w wyniku rozkładu (zobacz oznaczenia w rozdziale 5), liczby l_{ij} są współczynnikami macierzy

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zaś bloki

$$\mathbf{b}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

są częściami przekształconego wektora prawej strony. Rozważany układ równań jest oczywiście niesprzeczny wtedy, gdy $c_3 = c_4 = 0$, czyli $\mathbf{b}_2^{(2)} = \mathbf{0}$.

Jeśli układ jest niesprzeczny, to możemy wyznaczyć reprezentację jego zbioru rozwiązań. Na reprezentację tę składa się dowolne rozwiązanie szczególne i baza

jądra macierzy układu. Najłatwiejsze do obliczenia rozwiązanie szczególnie otrzymamy biorąc $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ i obliczając niewiadome x_1, \dots, x_r za pomocą następującej procedury (uwaga: jest ona napisana przy założeniu, że w zmiennej $a[k, n+1]$ przechowujemy współczynnik c_k przekształconego wektora prawej strony):

```
for k := r downto 1 do begin
  s := a[k, n + 1];
  for j := k + 1 to r do s := s - a[k, j] * x[j];
  x[k] := s/a[k, k]
end
```

Po wykonaniu tego obliczenia trzeba jeszcze poprzestawiać niewiadome x_1, \dots, x_n , na podstawie zawartości tablicy Q , zgodnie z wcześniej podanym opisem. Wektory y_1, \dots, y_{n-r} bazy jądra możemy znaleźć rozwiązując układ jednorodny. Aby obliczyć współczynniki y_{1i}, \dots, y_{ni} wektora y_i , możemy przyjąć, że współczynniki y_{ki} dla $k = r+1, \dots, n$ są równe 0 z wyjątkiem współczynnika $y_{r+i,i} = 1$. Pozostałe współczynniki y_{1i}, \dots, y_{ri} obliczamy tak:

```
for k := r downto 1 do begin
  s := -a[k, r + i];
  for j := k + 1 to r do s := s - a[k, j] * y[j, i];
  y[k, i] := s/a[k, k]
end
```

Po obliczeniu przestawiamy współczynniki y_{1i}, \dots, y_{ni} (za pomocą tablicy Q), aby ustawić je we właściwej kolejności. Warto porównać tę procedurę z opisanym na str. 4.3 sposobem wyznaczania bazy przestrzeni $\ker A$.

W praktyce często trzeba rozwiązać wiele układów równań, które mają tę samą macierz współczynników A i różne wektory prawej strony. Co więcej, kolejny wektor prawej strony może zależeć od rozwiązania poprzedniego układu. Dlatego warto jest zrealizować znajdowanie rozkładu macierzy A i przetwarzanie wektora prawej strony układu jako osobne procedury, zwłaszcza, że koszt rozkładania macierzy na czynniki trójkątne jest znacznie większy od kosztu rozwiązywania układów równań liniowych z macierzami trójkątnymi.

Dodatkowe uwagi o przekształcaniu układu równań

Można zauważyć, że aby przekształcić układ równań w opisany tu sposób, moglibyśmy najpierw poprzestawiać wiersze i kolumny macierzy, a później tylko

obliczać współczynniki l_{jk} i odejmować wiersze pomnożone przez te współczynniki od wierszy poniżej. Trzeba by było tylko znać odpowiednie permutacje wierszy i kolumn. Można zadać pytanie, kiedy przestawianie wierszy i kolumn jest zbędne.

Stwierdzenie: Warunkiem koniecznym i dostatecznym wykonalności przekształcenia układu bez przestawiania wierszy i kolumn jest, aby dla $k = 1, \dots, r$ macierz kwadratowa A_k , która powstaje z macierzy A przez odrzucenie ostatnich $n - k$ kolumn i ostatnich $m - k$ wierszy była nieosobliwa. Dowód: Macierz $[a_{11}]$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{11} \neq 0$ i tylko w takim przypadku można wykonać pierwszy krok procedury. Przyjmijmy założenie indukcyjne, że możliwe jest wykonanie $k - 1$ kroków ($k - 1 < r$), dające nieosobliwą macierz trójkątną górną $R^{(k-1)}$ w miejscu bloku A_{k-1} . Udowodnimy, że macierz trójkątna $R^{(k)}$ jest również nieosobliwa. W tym celu zauważmy, że k -ty wiersz tej macierzy jest kombinacją liniową wierszy macierzy A_k , przy czym k -ty współczynnik tej kombinacji jest równy 1. Ponieważ macierz A_k jest nieosobliwa, więc jej wiersze są liniowo niezależne; żadna ich kombinacja liniowa, której pewien współczynnik jest różny od 0, nie jest wektorem zerowym. Zatem ostatni wiersz macierzy $R^{(k)}$ zawiera co najmniej jeden współczynnik różny od 0; jest to współczynnik r_{kk} , ponieważ macierz ta jest trójkątna górna. Pozostałe współczynniki diagonalne macierzy $R^{(k)}$ leżą na diagonalu macierzy $R^{(k-1)}$, a zatem są różne od zera na mocy założenia indukcyjnego. \square

Na ogół dość trudno jest przekonać się, czy dana macierz jest nieosobliwa, bez wykonania rachunków co najmniej tak samo kosztownych jak opisana procedura. Istnieją jednak ważne w praktyce klasy macierzy, które są nieosobliwe, i przynależność danej macierzy do takiej klasy jest łatwa do zbadania.

Def. Niech \mathbb{K} oznacza ciało liczbowe, \mathbb{Q} , \mathbb{R} lub \mathbb{C} . Macierz $[a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$ jest wierszowo diagonalnie dominująca, jeśli jej współczynniki spełniają warunek

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \dots, \min(m,n) \\ j \neq i}} |a_{ij}| \quad \text{dla } i = 1, \dots, \min(m, n).$$

Słowami: wartość bezwzględna każdego współczynnika na diagonalu jest większa niż suma wartości bezwzględnych pozostałych współczynników w tym samym wierszu.

Macierz A jest kolumnowo diagonalnie dominująca, jeśli macierz A^T jest wierszowo diagonalnie dominująca.

Twierdzenie: Macierz kwadratowa wierszowo (a także kolumnowo) diagonalnie dominująca jest nieosobliwa.

Dowód: Wystarczy przeprowadzić dowód dla macierzy wierszowo diagonalnie dominującej. Weźmy dowolny wektor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ i wybierzmy dowolne k , takie że $|x_k| \geq |x_i|$ dla $i = 1, \dots, n$. Niech $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = [y_1, \dots, y_n]^T$. Mamy

$$|y_k| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \right| \geq |a_{kk}x_k| - \sum_{i \neq k} |a_{ki}x_i| \geq \left(|a_{kk}| - \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \right) |x_k|.$$

Wyrażenie w nawiasie jest dodatnie, a zatem jeśli $x_k \neq 0$, to $y_k \neq 0$, czyli $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, co dowodzi liniowej niezależności kolumn macierzy \mathbf{A} . \square

Opisana w tym wykładzie procedura jest poprawna, jeśli wszystkie jej operacje arytmetyczne wykonujemy *dokładnie*. W zasadzie w informatyce dysponujemy dwiema możliwościami wykonywania dokładnych rachunków. Pierwsza z nich to arytmetyka wymierna; jeśli wszystkie współczynniki układu są liczbami wymiernymi (albo wymiernymi zespolonymi), to możemy każdy z nich przedstawić w postaci pary liczb całkowitych — licznika i mianownika, a następnie obliczać każdy wynik działania arytmetycznego w takiej samej postaci. Takie podejście ma to do siebie, że szybko otrzymujemy coraz większe liczby, co może być bardzo niewygodne.

Druga możliwość to rachunki symboliczne, które jednak są na tyle niewygodne, że trudno sobie wyobrazić praktyczną sytuację, w której ich zastosowanie do rozwiązywania układów równań liniowych (zwłaszcza dużych) byłoby sensowne. Rachunki symboliczne dałyby nam niesłychanie skomplikowane wzory, do których podstawiawszy współczynniki układu w celu numerycznego obliczenia wyniku (z błędami zaokrągleń) po długim czasie otrzymalibyśmy wynik straszliwie niedokładny.

W większości praktycznych zastosowań używa się arytmetyki zmiennopozycyjnej, w której wyniki działań są obciążone błędami. Z tego powodu, wykonując obliczenia numeryczne trzeba mieć świadomość, że liczby otrzymane jako wynik na ogół *nie są* wynikiem, a tylko jego przybliżeniem i trzeba wiedzieć, jak bardzo może ono być niedokładne.

Istnienie błędów zaokrągleń ma jeszcze jeden skutek: jeśli to samo wyrażenie obliczamy różnymi sposobami (np. obliczamy sumę wielu składników w różnej kolejności), to za każdym razem możemy otrzymać wynik obciążony innym błędem. Dlatego znając jeden algorytm rozwiązywania pewnego zadania możemy poszukiwać innych algorytmów, które dają dokładniejszy wynik. Wybierając algorytm do rozwiązania konkretnego zadania należy brać pod uwagę jego koszt (czasowy i pamięciowy), wytworzone błędy, a także prostotę algorytmu lub dostępność odpowiedniej procedury np. w bibliotece procedur.

Realizacja numeryczna procesu eliminacji

Wykonanie w arytmetyce zmiennopozycyjnej procedury eliminacji może się nie powieść z powodu nadmiaru lub niedomiaru (tj. przekroczenia zakresu reprezentowalnych liczb), jak i poważnej utraty dokładności z powodu błędów zaokrągleń. Pierwszego niebezpieczeństwa można uniknąć, natomiast drugiego — nie zawsze. Błędy zaokrągleń zawsze są; możemy tylko starać się zmniejszyć ich skutki.

Środkiem do osiągnięcia obu celów jest odpowiedni wybór elementu głównego. Polega on na takim przestawianiu kolumn i wierszy, aby liczba $a[k, k]$, przez którą dzielimy w kroku k -tym inne liczby, miała jak największą wartość bezwzględną (a zatem przestawień dokonujemy nie tylko wtedy, gdy $a[k, k] = 0$). Jeśli jest to największa co do modułu liczba w wierszach k, \dots, m i kolumnach k, \dots, n , to wartości bezwzględne liczb l_{ik} będą mniejsze od 1. W rezultacie normy macierzy $\mathbf{A}^{(k)}$ i wektorów $\mathbf{b}^{(k)}$ mogą rosnąć w sposób ograniczony. To samo dotyczy poziomu błędów zaokrągleń w tym procesie.

Podstawową trudność sprawia rozpoznanie, czy $k = r = \text{rank } \mathbf{A}$, czy też jeszcze $k < r$. Błędy zaokrągleń powodują bowiem, że elementy przekształcanej macierzy, które powinny być zerami, są różne od zera. Szanse na poprawną ocenę, czy $k = r$ maleją w kolejnych krokach, a zatem są najmniejsze jeśli r jest bliskie $\min(m, n)$. Jeśli jednak wiadomo, że $r = \min(m, n)$ (i nie trzeba dowiadywać się tego badając współczynniki obciążone błędami), to proces eliminacji często można stosować z powodzeniem.

Przypuśćmy, że po k krokach eliminacji otrzymaliśmy macierz

$$[\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{b}^{(k)}] = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \mathbf{b}_1^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} & \mathbf{b}_2^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Można przyjąć $\text{rank } \mathbf{A} = k$ w sytuacji gdy $\|A_{22}^{(k)}\| \leq \nu K_1 \|\mathbf{A}\|$ oraz $\|\mathbf{b}_2^{(k)}\| \leq \nu K_2 \|\mathbf{b}\|$, dla niezbyt dużych liczb K_1 i K_2 . Można udowodnić, że wtedy dla dowolnego $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{K}^{n-k}$ oraz $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{K}^k$ spełniającego układ równań $A_{11}\mathbf{x}_1 + A_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1$, wektor

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \text{ jest rozwiązaniem układu}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{gdzie } \|\mathbf{E}\| \leq \nu K \|\mathbf{A}\|,$$

i stała K jest rzędu wielkości $3k + K_1 + K_2$. Zatem algorytm jest numerycznie poprawny (istnieje małe zaburzenie danych (macierz \mathbf{E}), takie że otrzymujemy dokładne rozwiązanie zadania zaburzonego).

Układy nieosobliwe

Układ równań $Ax = b$, w którym macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest nieosobliwa, ma jednoznaczne rozwiązanie. Jest ono równe $A^{-1}b$, ale zwykle nie tędy droga, jeśli układ trzeba rozwiązać numerycznie. Nie znamy algorytmu numerycznie poprawnego wyznaczania odwrotności macierzy A (choć znamy algorytm numerycznie poprawny wyznaczania dowolnej jej kolumny, mianowicie eliminację Gaussa, co zbadamy dalej), a poza tym koszt takiego sposobu rozwiązywania układu jest duży. Zanim zbadamy błędy zaokrągleń w eliminacji Gaussa, zajmiemy się zbadaniem wpływu zaburzenia danych (macierzy A i wektora b) na rozwiązanie układu.

Uwarunkowanie układów nieosobliwych

Niech $y = Ax$, czyli $x = A^{-1}y$. Zbadamy uwarunkowanie zadania obliczenia wektora y na podstawie danego wektora x i macierzy A . Założmy, że dane reprezentujemy niedokładnie, czyli zamiast macierzy A i wektora x mamy współczynniki pewnej macierzy $\tilde{A} = A + E$ i wektora $\tilde{x} = x + z$. Macierz zaburzenia E jest „mała”, tj. $\|E\| \ll \|A\|$ i podobnie $\|z\| \ll \|x\|$ (uwaga: dla macierzy A i E używamy normy indukowanej przez normę, którą stosujemy do „mierzenia” wektorów x , y i ich zaburzeń).

Wektor $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}$ jest równy

$$\tilde{y} = (A + E)(x + z) = Ax + Az + Ex + Ez = y + Az + Ex + Ez.$$

Zaburzenie danych wprowadziło błąd, który jest równy $Az + Ex + Ez$. Ostatni składnik tego wyrażenia jest iloczynem zaburzeń macierzy A i wektora x . Ponieważ zaburzenia są małe (zgodnie z uczynionym założeniem), więc składnik ten, jako wielkość „małą wyższego rzędu”, pominiemy. Mamy

$$\|Az\| \leq \|A\|\|z\| = \|A\|\|x\| \frac{\|z\|}{\|x\|} = \|A\|\|A^{-1}y\| \frac{\|z\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|z\|}{\|x\|} \|y\|,$$

oraz

$$\|Ex\| \leq \|E\|\|x\| = \frac{\|E\|}{\|A\|} \|A\|\|x\| = \frac{\|E\|}{\|A\|} \|A\|\|A^{-1}y\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|E\|}{\|A\|} \|y\|.$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie

$$\frac{\|\tilde{y} - y\|}{\|y\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \left(\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} + \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} \right).$$

Widzimy, że w zadaniu obliczenia iloczynu macierzy nieosobliwej A i wektora x zaburzenia względne danych wejściowych przenoszą się na wynik z mnożnikiem nie większym niż $\|A\|\|A^{-1}\|$. Jest to więc wskaźnik uwarunkowania naszego zadania.

Zbadajmy jeszcze, jak zaburzenia macierzy A przenoszą się na wektor x , który jest rozwiązaniem układu równań $Ax = y$. Mamy więc równość

$$(A + E)(x + w) = y,$$

Wektor $w = \tilde{x} - x$ jest zaburzeniem rozwiązania x , spowodowanym przez dodanie macierzy E do A . Ponieważ macierz A jest nieosobliwa, więc możemy napisać

$$Ax + Ex + A(I_n + A^{-1}E)w = y, \quad \text{czyli} \quad Ex = -A(I_n + A^{-1}E)w$$

a następnie, jeśli macierz $A + E$ jest nieosobliwa,

$$w = -(I_n + A^{-1}E)^{-1}A^{-1}Ex.$$

Jeśli $\|A^{-1}E\| \ll 1$, to mamy $(I_n + A^{-1}E)^{-1} \approx I_n - A^{-1}E$, skąd wynika

$$w \approx -(I_n - A^{-1}E)A^{-1}Ex \approx -A^{-1}Ex,$$

a stąd

$$\frac{\|w\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|E\| = \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|E\|}{\|A\|}.$$

Uwaga: Powyższe obliczenia opierały się na niezbyt ściśle opisanym pojęciu „wielkości małej wyższego rzędu”. Aby te rachunki sformalizować, należy sprawdzić, że rozpatrywane zadania są ciągłe, co więcej wynik każdego z nich jest funkcją spełniającą (w pewnym otoczeniu konkretnego punktu w zbiorze danych) warunek Lipschitza. W oszacowaniach otrzymanych po odrzuceniu wielkości małych wyższego rzędu stosujemy „nierówności w sensie I’”; aby otrzymać „prawdziwą” nierówność „ \leq ”, trzeba pomnożyć prawą stronę przez pewną stałą trochę większą niż 1.

Jak widzimy, wyrażenie $\|A\|\|A^{-1}\|$ jest oszacowaniem czynnika, z jakim mogą przenieść się na wynik zaburzenia względne wszystkich danych w zadaniach mnożenia wektora przez macierz A oraz A^{-1} (czyli rozwiązywania układu równań z macierzą A). Zatem uwarunkowanie obu tych zadań, tj. zadania obliczenia wektora $y = Ax$ na podstawie macierzy A i wektora x , oraz zadania obliczenia wektora $x = A^{-1}y$ na podstawie macierzy A i wektora y , jest takie samo i zależy tylko od macierzy A . Dlatego wygodnie jest posługiwać się określeniem wskaźnik

uwarunkowania macierzy A , które oznacza wskaźnik uwarunkowania obu zadań rozpatrywanych przed chwilą. Oznaczamy

$$\text{cond } A \stackrel{\text{def}}{=} \|A\| \|A^{-1}\|,$$

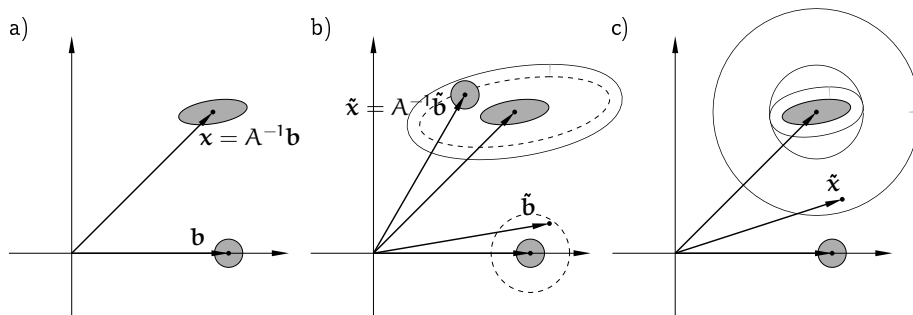
przy czym jeśli norma, w której obliczamy wskaźnik uwarunkowania jest indukowana przez p -tą normę Höldera, to oznaczamy

$$\text{cond}_p A \stackrel{\text{def}}{=} \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

Uwaga: Inne zadania, dla których dane zawierają macierz, np. zadanie obliczania wektorów własnych macierzy (będzie o nim mowa pod koniec drugiego semestru) mają inne wskaźniki uwarunkowania.

Poprawność i stabilność numeryczna algorytmów rozwiązywania układów równań liniowych

Zbadamy (w niezbyt formalny sposób) podstawowe pojęcia związane z błędami zaokrągleń podczas rozwiązywania układów równań liniowych. Pomoże nam w tym rysunek. Przedstawia on pewien wektor \mathbf{b} , oraz wektor $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, czyli rozwiązanie układu równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.



Na rysunku a) jest pokazany zbiór wektorów $\tilde{\mathbf{b}}$, takich że $\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{b}\|_2 \nu$ (liczba ν określa maksymalny błąd reprezentacji wektora \mathbf{b} ; rysunek jest przesadzony — wygląda mniej więcej tak, jak gdyby były tylko 3 bity mantysy). Elipsa, której środkiem jest wektor \mathbf{x} , jest zbiorem obrazów wszystkich wektorów, które można otrzymać zaburzając wektor \mathbf{b} na poziomie nie przekraczającym ν . Jak widać, zaburzenie względne danej (wektora \mathbf{b}) może spowodować znacznie większe zaburzenie względne wyniku (wektora \mathbf{x}).

Rysunek b) ilustruje działanie algorytmu numerycznie poprawnego. Błędy zaokrągleń wytworzone podczas obliczeń są takie, że możemy wskazać wektor $\tilde{\mathbf{b}}$,

bliski wektora \mathbf{b} (dokładniej, $\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\| \leq K_d \|\mathbf{b}\| \nu$, przy czym stała K_d nie zależy od danych), że wektor $\tilde{\mathbf{x}}$, który jest rozwiązaniem otrzymanym w wyniku obliczeń w arytmetyce fl, jest dokładnym rozwiązaniem zadania, w którym dany wektor \mathbf{b} jest zastąpiony przez $\tilde{\mathbf{b}}$. Do tego może jeszcze dojść błąd reprezentacji wyniku (czyli możemy otrzymać jako rozwiązanie dowolny inny wektor z zaznaczonego kółka), przy czym maksymalna wielkość tego błędu nie zależy od zadania.

Na rysunku c) można obejrzyć skutki zastosowania algorytmu numerycznie stabilnego, który nie jest numerycznie poprawny. Obliczony wynik, tj. wektor $\tilde{\mathbf{x}}$, leży w kuli, której środkiem jest rozwiązanie dokładne \mathbf{x} . Promień tej kuli jest w przybliżeniu równy iloczynowi liczby ν , stałej kumulacji (która jest zależna tylko od algorytmu) i *wskaźnika uwarunkowania zadania*. Gdybyśmy mieli algorytm numerycznie poprawny o tej samej stałej kumulacji, to zbiór rozwiązań możliwych do otrzymania z jego pomocą byłby wpisany w tę kulę. Jak widać, w przypadku algorytmu numerycznie stabilnego można dowolnie zmniejszyć skutki błędów zaokrągleń (wybierając dostatecznie dokładną arytmetykę, tj. zmniejszając błąd reprezentacji ν), ale nie można wskazać w pobliżu danych dokładnych \mathbf{b} takich danych $\tilde{\mathbf{b}}$, którym odpowiada obliczone rozwiązanie $\tilde{\mathbf{x}}$.

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy nieosobliwej A wskaźnik uwarunkowania $\text{cond } A \geq 1$. Ponadto jeśli macierze A i B są nieosobliwe oraz $C = AB$, to $\text{cond } C \leq \text{cond } A \text{ cond } B$. Metody rozwiązywania układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, takie jak eliminacja Gaussa, polegają na rozłożeniu macierzy A na czynniki, które mają taką postać, że układ z taką macierzą jest szczególnie łatwy do rozwiązania. Na przykład, mając $A = P^{-1}LRQ$, gdzie macierze P^{-1} i Q są macierzami permutacji, a L i R są macierzami trójkątnymi, rozwiązanie układu otrzymujemy w drodze obliczeń polegających na rozwiązaniu kolejno układów

$$P^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad L\mathbf{d} = \mathbf{c}, \quad R\mathbf{e} = \mathbf{d}, \quad \text{ i } Q\mathbf{x} = \mathbf{e}.$$

Wskaźniki uwarunkowania macierzy permutacji P i Q są równe 1, natomiast iloczyn wskaźników uwarunkowania macierzy L i R nigdy nie jest mniejszy niż $\text{cond } A$. Jeśli jest dużo większy, to może to być przyczyną znacznej utraty dokładności wyniku.

Analiza procesu eliminacji Gaussa

Zbadamy skutki błędów zaokrągleń wytworzonych (albo, jak kto woli, popełnionych) podczas dokonywania rozkładu na czynniki trójkątne L i R nieosobliwej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ponieważ skutki przestawiania wierszy i kolumn macierzy A w trakcie eliminacji są równoważne odpowiedniemu ich

uporządkowaniu przed przystąpieniem do eliminacji, uznamy, że eliminację można wykonać bez przestawiania. Wtedy mamy $A^{(0)} = A$ i $A^{(k)} = L_k^{-1}A^{(k-1)}$ dla $k = 1, \dots, n-1$ oraz $L = L_1 \dots L_{n-1}$, $R = A^{(n-1)}$. Zamiast tych „dokładnych” macierzy, w k -tym kroku otrzymamy macierze \tilde{L}_k i $\tilde{A}^{(k)}$, których współczynniki są obciążone błędami zaokrągleń.

Zbadajmy najpierw skutki błędów zaokrągleń w pierwszym kroku eliminacji. Zamiast współczynnika $l_{i1} = a_{i1}/a_{11}$ macierzy L , otrzymamy liczbę

$$\tilde{l}_{i1} = \text{fl}(a_{i1}/a_{11}) = (a_{i1}/a_{11})(1 + \alpha_{i1}) = \tilde{a}_{i1}/a_{11},$$

gdzie $\tilde{a}_{i1} = a_{i1}(1 + \alpha_{i1})$, $|\alpha_{i1}| \leq \nu = 2^{-t}$.

Następnie, zamiast współczynnika $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}$ macierzy $A^{(1)}$ obliczymy

$$\tilde{a}_{ij}^{(1)} = \text{fl}(a_{ij} - \tilde{l}_{i1}a_{1j}) = (a_{ij} - \tilde{l}_{i1}a_{1j}(1 + \beta_{ij}))(1 + \gamma_{ij}) = a_{ij} - \tilde{l}_{i1}a_{1j} + b_{ij}.$$

Liczba b_{ij} jest błędem (bezwzględny), który obciąża współczynnik $a_{ij}^{(1)}$ macierzy $A^{(1)}$, ale możemy go „doczepić” także do współczynnika a_{ij} macierzy A . Przekształcając to wyrażenie (ewentualnie na ćwiczeniach) można otrzymać oszacowanie

$$|b_{ij}| \leq (|a_{ij}| + 2|\tilde{a}_{ij}^{(1)}|)\nu,$$

skąd wynika, że macierz B_0 , taka że skutki błędów zaokrągleń powodują otrzymanie wyniku identycznego z wynikiem pierwszego kroku eliminacji (z działaniami wykonywanymi dokładnie) dla macierzy $A + B_0$, spełnia warunek

$$|B_0| \leq (|A| + 2|M_1|)\nu,$$

gdzie M_1 oznacza macierz $n \times n$ otrzymaną przez wpisanie zer do pierwszego wiersza i kolumny macierzy $\tilde{A}^{(1)}$, a nierówność macierzy oznacza spełnienie tej nierówności przez współczynniki na odpowiadających sobie pozycjach. Jeśli użyjemy *monotonicznej* normy $\|\cdot\|$ (np. normy $\|\cdot\|_1$ lub $\|\cdot\|_\infty$), to możemy stąd napisać

$$\|B_0\| \leq (\|A\| + 2\|M_1\|)\nu.$$

W taki sam sposób możemy dla $k = 1, \dots, n-1$ otrzymać oszacowanie

$$\|B_{k-1}\| \leq (\|M_{(k-1)}\| + 2\|M_k\|)\nu,$$

przy czym $M_0 = A$, a dla $k > 0$ macierz M_k otrzymujemy z macierzy $\tilde{A}^{(k)}$ przez wypełnienie zerami początkowych k kolumn i wierszy.

Cały proces eliminacji Gaussa z błędami zaokrągleń możemy więc zapisać w postaci rekurencyjnych wzorów

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(0)} &= A, \\ \tilde{A}^{(k)} &= \tilde{L}_k^{-1}(\tilde{A}^{(k-1)} + B_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

W wyniku otrzymujemy macierz trójkątną górną $\tilde{R} = \tilde{A}^{(n-1)}$. Jeśli rozwiniemy powyższe wzory rekurencyjne, to dostaniemy

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \tilde{A}^{(n-1)} = \tilde{L}_{n-1}^{-1}(\tilde{A}^{(n-2)} + B_{n-2}) = \tilde{L}_{n-1}^{-1}(\tilde{L}_{n-2}^{-1}(\tilde{A}^{(n-3)} + B_{n-3}) + B_{n-2}) = \dots \\ &= \tilde{L}_{n-1}^{-1} \dots \tilde{L}_1^{-1} \tilde{A}^{(0)} + \tilde{L}_{n-1}^{-1} \dots \tilde{L}_1^{-1} B_0 + \tilde{L}_{n-1}^{-1} \dots \tilde{L}_2^{-1} B_1 + \dots + \tilde{L}_{n-1}^{-1} B_{n-2}.\end{aligned}$$

Mnożąc strony tej równości przez macierz trójkątną dolną $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \dots \tilde{L}_{n-1}$, otrzymamy

$$\tilde{L}\tilde{R} = A + B_0 + \tilde{L}_1 B_1 + \tilde{L}_1 \tilde{L}_2 B_2 + \dots + \tilde{L}_1 \dots \tilde{L}_{n-2} B_{n-2} = A + E.$$

Zauważmy, że w początkowych k wierszach macierzy B_k wszystkie współczynniki są równe 0, zaś kolumny o numerach $k+1, \dots, n$ macierzy $\tilde{L}_1 \dots \tilde{L}_k$ są kolumnami macierzy jednostkowej. Dlatego zachodzą równości

$$\tilde{L}_1 \dots \tilde{L}_k B_k = B_k,$$

z których wynika, że macierz E , której dodanie do A jest równoważne skutkom błędów zaokrągleń podczas dokonywania rozkładu, jest równa

$$E = B_0 + \dots + B_{n-2},$$

a stąd mamy oszacowanie

$$\|E\| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \|B_k\| \leq (\|A\| + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \|M_k\|)\nu.$$

Przyjmując oznaczenie

$$F_n(A) = \frac{\|A\| + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \|M_k\|}{\|A\|}$$

możemy napisać to oszacowanie w postaci

$$\frac{\|E\|}{\|A\|} \leq F_n(A)\nu.$$

Jeśli liczba $F_n(A)$ jest mała, to błędy zaokrągleń wytworzone podczas wykonywania rozkładu trójkątnego metodą eliminacji Gaussa są równoważne

niewielkiemu zaburzeniu macierzy A . Dla konkretnej macierzy A liczbę $F_n(A)$ możemy znaleźć wykonując dodatkowe obliczenie podczas eliminacji, otrzymując w ten sposób oszacowanie błędu *a posteriori*. Przyglądając się wyrażeniu na $F_n(A)$ zauważamy, że jest ono tym większe, im większe współczynniki macierzy $\tilde{A}^{(k)}$ otrzymamy podczas obliczeń (natomiast współczynniki macierzy \tilde{L} nie są istotne w tym oszacowaniu).

Mamy stąd wniosek praktyczny: aby zmniejszyć skutki błędów zaokrągleń, powinniśmy tak przestawić wiersze lub kolumny (przed lub w trakcie eliminacji), aby współczynniki otrzymanych „po drodze” macierzy miały jak najmniejsze wartości bezwzględne. Niekontrolowany wzrost wartości bezwzględnych współczynników może nastąpić, jeśli liczby \tilde{l}_{ij} , tj. współczynniki macierzy \tilde{L} będą duże. Wybór elementu głównego, tj. takie przestawianie równań, aby na diagonalu znalazł się największy współczynnik w kolumnie, zapewnia, że wszystkie te współczynniki będą nie większe niż 1, co ogranicza wzrost współczynników macierzy $\tilde{A}^{(k)}$.

Jeśli dokonujemy wyboru elementu głównego w kolumnie, to spełniona jest nierówność $\|M_k\|_{\infty} \leq 2\|M_{k-1}\|_{\infty}$, a ponadto $\|A\|_{\infty} = \|A\|_{\infty}$, skąd wynika $F_n(A) \leq 3 \cdot 2^n - 5$, przy czym to oszacowanie jest bardzo pesymistyczne w większości zadań praktycznych. W każdym razie algorytm wyznaczania rozkładu trójkątnego macierzy nieosobliwej metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego jest numerycznie poprawny.

Ważną klasą macierzy, dla których można bezpiecznie stosować algorytm eliminacji Gaussa *bez wyboru elementu głównego*, jest zbiór macierzy diagonalnie dominujących. Podczas eliminacji (w arytmetyce dokładnej) otrzymane macierze $A^{(k)}$ są również diagonalnie dominujące. Jeśli błędy zaokrągleń (zależne od dokładności arytmetyki) są na tyle małe, że otrzymane macierze $\tilde{A}^{(k)}$ są również diagonalnie dominujące, to algorytm jest numerycznie poprawny, z oszacowaniem $F(A) \leq 3n$ (w normie $\|\cdot\|_{\infty}$).

Iteracyjne poprawianie rozwiązania

Def. Wektor $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ nazywamy residuum układu równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dla ustalonego wektora \mathbf{x} .

Wektor \mathbf{x} jest rozwiązaniem układu wtedy, gdy odpowiadające mu residuum jest wektorem zerowym. Jeśli rozwiązujemy układ równań liniowych numerycznie (czyli z błędami zaokrągleń), to otrzymamy w wyniku pewien wektor $\tilde{\mathbf{x}}$, który nie

jest rozwiązaniem, a tylko pewnym jego przybliżeniem. Możemy przekonać się, jaki jest błąd tego przybliżenia, obliczając residuum, a następnie jego normę.

Niech wektor \mathbf{x} będzie przybliżeniem rozwiązania dokładnego \mathbf{x}_0 . Na podstawie definicji residuum, mamy

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}.$$

Jeśli umiemy oszacować normę macierzy \mathbf{A}^{-1} , to znając residuum możemy oszacować błąd rozwiązania:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{r}\|.$$

Jeśli ten błąd jest (dla konkretnych celów) zbyt duży, to można znaleźć dokładniejsze przybliżenie rozwiązania. Metoda jest następująca:

1. Dokonujemy rozkładu macierzy A (albo \mathbf{PAQ}^{-1} — dalej pominię skutki przestawiania) na czynniki trójkątne \tilde{L} i \tilde{R} (czynniki te są obciążone błędami zaokrągleń). Krok ten wymaga wykonania $O(n^3)$ działań.
2. Rozwiązujemy układy równań $\tilde{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ i $\tilde{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Wykonujemy przy tym $O(n^2)$ działań i otrzymujemy wektor \mathbf{x} , który wskutek błędów zaokrągleń jest tylko przybliżeniem rozwiązania.
3. Obliczamy wektor residuum $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ (wykonując $O(n^2)$ działań). Jeśli błąd rozwiązania, który możemy ocenić na podstawie residuum, jest zbyt duży, to rozwiązujemy układ równań $\mathbf{Az} = \mathbf{r}$ (możemy to zrobić kosztem $O(n^2)$ działań korzystając ze znalezionych wcześniej macierzy \tilde{L} i \tilde{R}), a następnie obliczamy kolejne przybliżenie rozwiązania, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{z}$. Możemy ponownie zbadać jego dokładność i ewentualnie powtórzyć ten krok algorytmu.

Opisany wyżej algorytm zawiera pewien delikatny element. Otóż obliczając wektor residuum, podobnie jak wszystko inne, popełniamy błędy zaokrągleń, które mogą sprawić, że obliczona następnie poprawka nie doprowadzi do zmniejszenia błędu rozwiązania. Aby temu zapobiec, należy zapewnić obliczenie residuum z możliwie małym błędem. Najprościej jest użyć w tym kroku *dokładniejszej arytmetyki*, tj. podwójnej lub rozszerzonej precyzji, jeśli pozostałe obliczenia realizujemy w arytmetyce pojedynczej precyzji.

Zadania i problemy

1. Oblicz wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

w normie $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$.

2. Niech
- $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$
- będzie macierzą diagonalnie dominującą, taką że
- $0 < m \leq |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq M$
- . Znajdź górne oszacowanie normy
- $\|A^{-1}\|_\infty$
- w zależności od liczb
- m
- i
- M
- .

Wskazówka: Wybierz wektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, taki że $\|\mathbf{b}\|_\infty = 1$, a następnie znajdź oszacowania współczynników wektora \mathbf{x} spełniającego układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. Oszacuj wskaźnik uwarunkowania w normie
- $\|\cdot\|_\infty$
- i
- $\|\cdot\|_1$
- macierzy trójdzielnej
- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$
- , której wszystkie współczynniki na diagonalu są równe 4, a na kodiagonalach (tj. w miejscach sąsiadujących w każdym wierszu ze współczynnikiem na diagonalu) 1.

4. Oblicz liczbę
- $F_n(A)$
- (określoną w analizie błędów zaokrągleń eliminacji Gaussa) dla macierzy
- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$
- o postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ -1 & 1 & & & 1 \\ -1 & -1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

przy założeniu, że dokonujemy wyboru elementu głównego w kolumnie.

Współczynniki nad diagonalą, z wyjątkiem ostatniej kolumny, są równe 0.

5. Wprowadź wzór

$$|b_{ij}| \leq (|a_{ij}| + 2|a_{ij}^{(1)}|)\nu,$$

użyty w analizie błędów zaokrągleń w eliminacji Gaussa.

Wskazówka: Napisz wyrażenie

$$\tilde{a}_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - \tilde{l}_{i1}a_{1j}(1 + \beta))(1 + \gamma) = a_{ij} - \tilde{l}_{i1}a_{1j} + b_{ij},$$

a następnie oblicz

$$\frac{\tilde{a}_{ij}^{(1)}}{(1 + \gamma)} = a_{ij} - \tilde{l}_{i1}a_{1j}(1 + \beta) = \tilde{a}_{ij} - b_{ij} + \tilde{l}_{i1}a_{1j}\beta$$

i dalej

$$b_{ij} = \tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\gamma}{1 + \gamma} + \tilde{l}_{i1}a_{1j}\beta = \tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\gamma}{1 + \gamma} + (a_{ij} + b_{ij} - \tilde{a}_{ij}^{(1)})\beta,$$

skąd po odrzuceniu wielkości małych wyższego rzędu wyniknie

$$b_{ij} \approx (a_{ij}\beta + \tilde{a}_{ij}^{(1)}(\gamma - \beta))(1 + \beta).$$

Wyznaczniki

Def. Wyznacznikiem stopnia n nazywamy funkcję $\det_n: \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$, taką że

- jeśli określimy funkcję $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ wzorem $f(\mathbf{x}) = \det_n[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}]$, to dla dowolnych ustalonych wektorów $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbb{K}^n$ funkcja ta jest funkcjonałem liniowym,
- jeśli macierz A' otrzymamy przez przestawienie dwóch sąsiednich kolumn macierzy A , to $\det_n A' = -\det_n A$,
- $\det_n I_n = 1$.

Def. Wyznacznikiem macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ nazywamy skalar (liczbę) $\det_n A$.

Dalej zamiast \det_n na ogół będziemy pisać \det . Mając definicję sformułowaną przez podanie pewnych warunków musimy upewnić się, czy definiowany obiekt jest *dobrze określony*, a zatem czy istnieje funkcja mająca wymienione własności i czy jest tylko jedna taka funkcja. To pierwsze możemy sprawdzić jeśli zgadniemy dowolny wzór, który określa funkcję spełniającą te warunki. To drugie jest prawdą, jeśli nałożone warunki (nie wystarczy, jeśli odgadnięty wzór) umożliwiają *jednoznaczne* obliczenie wartości takiej funkcji dla ustalonej macierzy.

Łatwo jest zauważyć, że z podanych warunków wynikają następujące własności funkcji \det : zamiana miejscami dowolnych dwóch kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika na przeciwny. Ogólniej, poddanie kolumn macierzy dowolnej permutacji powoduje zmianę znaku na przeciwny wtedy, gdy permutacja ta jest nieparzysta (czyli zawiera nieparzystą liczbę *nieporządków*, str. 1.11, zad. 7), a więc można ją przedstawić jako złożenie nieparzystej liczby transpozycji. W przeciwnym razie przestawienie kolumn nie zmienia wartości wyznacznika. Ponadto wyznacznik jest funkcjonałem liniowym ze względu na każdą (nie tylko ostatnią) kolumnę macierzy (bo wystarczy zamienić tę kolumnę z ostatnią, sprawdzić liniowość i przestawić z powrotem). Wreszcie, wyznacznik macierzy osobliwej jest równy 0; przypuśćmy bowiem, że ostatnia kolumna macierzy jest kombinacją liniową pozostałych. Wtedy

$$\det_n \left[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{a}_i \right] = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \det_n [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_i],$$

ale jeśli macierz ma dwie kolumny identyczne, to jej wyznacznik jest równy 0 bo

$$\det_n [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_i] = -\det_n [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_i].$$

(zakładamy tu, że \mathbb{K} nie jest ciałem charakterystyki 2).

Jawny wzór opisujący wyznacznik jest taki:

$$\det_n [a_{ij}]_{i,j} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

Suma w tym wzorze przebiega po wszystkich permutacjach σ zbioru n -elementowego, których jest $n!$. Znak permutacji, $\operatorname{sgn} \sigma$, jest równy $+1$ jeśli permutacja σ jest parzysta, albo -1 jeśli nieparzysta. Współczynniki macierzy, których iloczyn (opatrzone odpowiednim znakiem) jest składnikiem sumy, są brane po jednym z każdego wiersza (dla $i = 1, \dots, n$), a także po jednym z każdej kolumny (bo dla $i = 1, \dots, n$ wartość $\sigma(i)$ przebiega zbiór $\{1, \dots, n\}$).

Uwaga: Podany wyżej wzór przyda nam się do rozważań teoretycznych, ale nie należy na jego podstawie obliczać wyznacznika numerycznie (chyba, że macierz ma wymiary 3×3 lub mniejsze). Obliczenie takie byłoby bardzo czasochłonne i niedokładne. Poznamy dużo lepszą metodę obliczania wyznacznika.

Sprawdźmy, że funkcja określona powyższym wzorem spełnia podane warunki. W każdym składniku występuje dokładnie 1 współczynnik z ostatniej kolumny. Jeśli w miejsce tej kolumny podstawimy dowolną kombinację liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{K}^n$, to w każdym składniku będziemy mieli czynnik, który jest kombinacją liniową (z tymi samymi współczynnikami) odpowiednich współczynników wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Zamiana miejscami dwóch sąsiednich (a nawet dowolnych) kolumn powoduje złożenie każdej permutacji σ z transpozycją T opisującą tę zamianę. Złożenie takie ma znak przeciwny niż σ i wszystkie takie złożenia przebiegają cały zbiór S_n . Zatem zamiana kolumn powoduje zmianę na przeciwny znaku wszystkich składników.

Podstawiając macierz jednostkową I_n przekonamy się, że tylko jeden składnik sumy we wzorze jest różny od 0: ten, który odpowiada permutacji identycznościowej. Składnik ten jest iloczynem samych jedynek.

Tak więc funkcja spełniająca podane warunki istnieje.

Aby sprawdzić, że istnieje tylko jedna funkcja, która odpowiada definicji wyznacznika stopnia n , założmy, że macierz A jest nieosobliwa (dla osobliwej każda taka funkcja ma wartość 0, a więc funkcje takie obcięte do zbioru macierzy osobliwych są identyczne) i rozważmy ciąg przekształceń macierzy, który prowadzi do otrzymania macierzy jednostkowej. Proces ten jest ciągiem przekształceń, z których każde jest przestawianiem kolumn (znak wyznacznika się zmienia, zapamiętujemy czynnik -1), mnożeniem kolumny przez pewną liczbę $a \neq 0$ (zapamiętujemy czynnik $1/a$) i dodawaniem pewnej kolumny do innej (ta operacja

nie zmienia wartości wyznacznika). Postępując w sposób przypominający eliminację Gaussa-Jordana (z działaniami na kolumnach zamiast wierszy) możemy w ten sposób otrzymać macierz jednostkową. Wyznacznik macierzy wyjściowej jest równy iloczynowi zapamiętanych czynników i nie może być inny (bo w którymś kroku nie zachowalibyśmy przyjętych własności wyznacznika).

Dalsze własności wyznaczników

Każda permutacja σ ma taki sam znak jak jej permutacja odwrotna. Ponadto, jeśli σ przebiega zbiór S_n wszystkich permutacji zbioru n -elementowego, to σ^{-1} też przebiega cały ten zbiór. Dlatego

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j), j},$$

skąd wynika, że $\det A = \det A^T$. Konsekwencją tego spostrzeżenia jest fakt, że wszystkie własności wyznacznika sformułowane dla kolumn obowiązują także dla wierszy.

Wyznaczniki można opisać (i czasem tak się je definiuje) za pomocą wzoru rekurencyjnego, zwanego rozwinięciem Laplace'a:

$$\det_1[a_{11}] = a_{11},$$

$$\det_n[a_{ij}]_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} (\det_{n-1} A_{ij}) a_{ij}.$$

We wzorze tym symbol A_{ij} oznacza macierz $(n-1) \times (n-1)$ otrzymaną z $A = [a_{ij}]_{i,j}$ przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. Wyznacznik (stopnia $n-1$) tej macierzy nazywa się minorem macierzy A . We wzorze tym wyróżniona jest j -ta kolumna (j może być dowolne od 1 do n); żaden z minorów nie zależy od współczynników w tej kolumnie. Dlatego mówi się o rozwinięciu względem j -tej kolumny. Dowód, że wzór jawny i wzór rekurencyjny są równoważne, pozostawiam na ćwiczenia. Tymczasem zauważmy, że można napisać wzór rekurencyjny, który przedstawia rozwinięcie wyznacznika względem dowolnego wiersza.

Macierz A można przedstawić w postaci blokowej, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, w której bloki A_{11} i A_{22} są macierzami kwadratowymi $k \times k$ oraz $l \times l$ (jest $n = l + k$). Jeśli blok A_{12} lub A_{21} ma wszystkie współczynniki równe 0, to $\det A = \det A_{11} \det A_{22}$. Istotnie, założmy, że blok A_{12} zawiera same zera. Rozważmy składnik sumy

w jawnym wzorze na wyznacznik, w którym jednym z czynników jest współczynnik a_{ij} z bloku A_{21} . Pozostałe czynniki pochodzą z wierszy o numerach innych niż i i kolumn innych niż j -ta.

Musimy wybrać jeszcze $k + l - 1$ czynników. Wybierając współczynnik z bloku A_{11} lub A_{21} musimy odrzucić odpowiednią kolumnę każdego z tych bloków (a zatem wybierzemy najwyżej $k - 1$ takich współczynników), a także odpowiedni wiersz całej macierzy. Odrzuciliśmy zatem wszystkie k kolumn bloków A_{11} i A_{21} , oraz k wierszy bloków A_{12} i A_{22} , w tym co najmniej 1 wiersz bloku A_{22} . Pozostałe czynniki trzeba znaleźć w macierzy kwadratowej utworzonej z pozostałych l wierszy bloków A_{12} i A_{22} . Ale co najmniej jeden z tych wierszy należy do bloku A_{12} , czyli zawiera same zera. Tak więc każdy składnik, który zawiera czynnik z bloku A_{21} zawiera również czynnik z bloku A_{12} , równy 0. Wszystkie te składniki są więc równe 0. Sumę pozostałych składników otrzymamy mnożąc sumy opisujące wyznaczniki bloków A_{11} i A_{22} .

Rozumowanie to możemy powtórzyć zakładając, że wszystkie współczynniki w bloku A_{21} są równe 0. Wnioski z obu tych rozważań są takie: jeśli macierz A jest blokowo-trójkątna (górną lub dolną), przy czym wszystkie bloki diagonalne są macierzami kwadratowymi, to wyznacznik macierzy A jest równy iloczynowi wyznaczników tych bloków. W szczególności, jeśli macierz A jest trójkątna, to jej wyznacznik jest iloczynem współczynników na diagonalu. W szczególności stwierdzenia te dotyczą macierzy blokowo-diagonalnych i diagonalnych.

Twierdzenie Cauchy'ego: Jeśli $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, to $\det(AB) = \det A \det B$.

Dowód: Rozważmy macierz C o wymiarach $2n \times 2n$, o następującej strukturze blokowej:

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix}.$$

Na podstawie wcześniejszego stwierdzenia $\det C = \det A \det B$. Obliczmy iloczyn macierzy C i macierzy

$$D = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

Macierz $C' = CD$ ma następującą postać:

$$C' = \begin{bmatrix} A & AB \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeśli kolumny macierzy C oznaczymy symbolami $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{2n}$, to wykonane mnożenie jest równoważne dodaniu do $n + j$ -tej kolumny macierzy C wektora

$\sum_{k=1}^n c_k b_{kj}$, dla $j = 1, \dots, n$, a zatem wyznacznik macierzy C' jest równy $\det C$. Możemy jeszcze zamienić kolumnę j -tą z $n + j$ -tą dla $j = 1, \dots, n$, co spowoduje zmianę znaku wyznacznika jeśli n jest nieparzyste, a potem pomnożyć ostatnie n kolumn przez -1 , (co n -krotnie zmieni znak na przeciwny). W wyniku tego postępowania otrzymamy macierz

$$C'' = \begin{bmatrix} AB & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

Mamy $\det C'' = \det(AB)$, ale także $\det C'' = \det C$, co kończy dowód. \square

Wniosek: Jeśli macierz A jest nieosobliwa, to $\det A \neq 0$.

Dowód: $1 = \det I_n = \det A \det A^{-1}$. \square

Wyznaczniki, baza dualna i wzory Cramera

Rozważmy układ n równań liniowych z n niewiadomymi, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, z nieosobliwą macierzą A , który zapiszemy w postaci

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}.$$

Kolumny $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ macierzy A są liniowo niezależne, zatem stanowią bazę przestrzeni \mathbb{K}^n i istnieje jej baza dualna $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Znając funkcjonały wchodzące w skład tej bazy możemy obliczyć każdą z niewiadomych w taki sposób:

$$\varphi_i(\mathbf{b}) = \varphi_i(\mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) = \varphi_i(\mathbf{a}_1) x_1 + \dots + \varphi_i(\mathbf{a}_n) x_n = x_i.$$

Zobaczmy sposób znalezienia tych funkcjonałów. Rozważmy wyrażenie

$$\beta_i(\mathbf{y}) = \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n].$$

Definiuje ono pewien funkcjonał liniowy β_i , którego argumentem może być dowolny wektor $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$. Dla $i \neq j$ mamy $\beta_i(\mathbf{a}_j) = 0$, natomiast

$\beta_i(\mathbf{a}_i) = \det A \neq 0$. Dlatego funkcjonał φ_i , który jest i -tym elementem bazy dualnej do $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, jest równy

$$\varphi_i = \frac{\beta_i}{\beta_i(\mathbf{a}_i)}.$$

Stąd mamy dla $i = 1, \dots, n$ wzory Cramera:

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{b}) = \frac{\beta_i(\mathbf{b})}{\beta_i(\mathbf{a}_i)} = \frac{\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]}{\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]}.$$

Wzory Cramera w szkole bywają przedstawiane jako praktyczny sposób rozwiązywania układów równań liniowych, w związku z czym konieczny jest pewien komentarz. W pewnych sytuacjach rzeczywiście można ich użyć, głównie wtedy, gdy liczba równań i niewiadomych jest mała (np. 2 lub 3), albo gdy informacja o zadaniu umożliwia szczególnie łatwe obliczanie odpowiednich wyznaczników. Jednak już nawet dla $n = 2$ algorytm oparty na wzorach Cramera nie jest numerycznie poprawny (tylko stabilny), a zatem jest gorszy niż eliminacja Gaussa. Ponadto obliczanie wyznacznika zwykle jest kosztowne; stosunkowo tania i dokładna metoda polega na dokonaniu rozkładu macierzy A na czynniki trójkątne (metodą eliminacji Gaussa), a następnie obliczenie iloczynu wyznaczników tych czynników (tj. iloczynu ich współczynników na diagonalach). W świetle powyższych uwag stosowanie wzorów Cramera w obliczeniach numerycznych jest zwykle bezsensowne.

Wyznaczniki i odwrotność macierzy

Def. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j}$ oznacza macierz $n \times n$. Dopełnieniem algebraicznym współczynnika a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$, gdzie macierz A_{ji} powstaje przez skreślenie w macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Dopełnienie algebraiczne jest więc minorem macierzy, opatrzonym odpowiednim znakiem. Udowodnimy, że jeśli macierz A jest nieosobliwa, to macierz $A^{-1} = [b_{ij}]_{i,j}$ ma współczynniki

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A},$$

a zatem jest to transponowana macierz dopełnień algebraicznych poszczególnych współczynników macierzy A , pomnożona przez $\frac{1}{\det A}$. Istotnie, dla ustalonego $j \in \{1, \dots, n\}$ niech $\mathbf{y}_j^H = [(-1)^{1+j} \det A_{1j}, \dots, (-1)^{n+j} \det A_{nj}]$. Jeśli \mathbf{a}_k oznacza k -tą kolumnę macierzy A , to liczba $\mathbf{y}_j^H \mathbf{a}_k$ jest równa $\det A$, jeśli $j = k$ (wyrażenie $\mathbf{y}_j^H \mathbf{a}_k$ opisuje rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy A względem j -tej kolumny), albo 0 jeśli $j \neq k$. Stąd wynika równość

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^H \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] = \det A \cdot I_n$$

i na tym koniec dowodu. \square

Uwaga: Macierz wierszowa $\frac{1}{\det A} \mathbf{y}_j^H$ użyta w powyższym dowodzie jest funkcjonałem φ_j , należącym do bazy przestrzeni $\mathbb{K}^{1,n} = (\mathbb{K}^n)^*$ dualnej do bazy $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

Wyznacznik przekształcenia liniowego

Niech $f: V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni V , której wymiar jest skończony. Ustalmy dowolną bazę $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, z której utworzymy macierz $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$. Wtedy wyrażenie $A = X^{-1}fX$ opisuje macierz A tego przekształcenia w ustalonej bazie (macierz X^{-1} reprezentuje bazę dualną do $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$). Udowodnimy, że wyznacznik macierzy przekształcenia nie zależy od wyboru bazy.

Istotnie, niech macierz $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ reprezentuje dowolną inną bazę przestrzeni V . Macierz przejścia od bazy Y do X jest równa $B = X^{-1}Y$. Zatem, macierz przekształcenia f w bazie Y jest równa $C = B^{-1}AB$ (mówimy, że macierze A i C są podobne). Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego $\det C = \det B^{-1} \det A \det B = \frac{1}{\det B} \det A \det B = \det A$, co kończy dowód. \square

Ponieważ wyznacznik każdej macierzy reprezentującej ustalone przekształcenie jest taki sam (nie zależy od wyboru bazy), więc możemy zdefiniować pojęcie wyznacznika przekształcenia liniowego. Dla ustalonego przekształcenia liniowego $f: V \rightarrow V$ jest to liczba, równa wyznacznikowi macierzy reprezentującej to przekształcenie w dowolnej bazie.

Orientacja bazy i układu współrzędnych

Niech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ oraz $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ będą bazami pewnej rzeczywistej przestrzeni liniowej V (dowolnej, niekoniecznie \mathbb{R}^n). Bazy te mogą służyć do określenia różnych układów współrzędnych, o czym była mowa wcześniej. Istnieje macierz C przejścia od jednej bazy do drugiej. Macierz ta jest nieosobliwa, a więc jej wyznacznik jest liczbą rzeczywistą dodatnią albo ujemną. Możemy między bazami wprowadzić relację zgodności orientacji: dwie bazy są zgodnie zorientowane jeśli wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni i przeciwnie zorientowane, jeśli jest ujemny. Oczywiście, orientacja bazy jest związana z kolejnością jej elementów; zmiana tej kolejności może zmienić orientację bazy.

Łatwo jest sprawdzić (na podstawie twierdzenia Cauchy'ego), że określona wyżej relacja jest równoważnością, która ma dwie klasy abstrakcji. Jest sprawą arbitralnej umowy, na podstawie której układy współrzędnych określone przez bazy z jednej z tych klas nazwiemy prawoskrętnymi i wtedy układy współrzędnych określone przez bazy z drugiej klasy będą lewoskrętne. Co ciekawe, nie mając wzorca (czyli pewnej bazy w rozpatrywanej przez nas przestrzeni, o której *ktoś powiedział*, że określa ona układ prawoskrętny), nie mamy żadnej

szansy na to, aby skonstruować układ np. prawoskrętny na podstawie informacji, która takiego wzorca nie definiuje.

Iloczyn wektorowe

Def. Iloczynem wektorowym w przestrzeni \mathbb{K}^n nazywamy przekształcenie $f: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n-1} \rightarrow (\mathbb{K}^n)^*$ określone wzorem

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \quad f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})(\mathbf{y}) = \det[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}].$$

Tak więc iloczynem wektorowym ustalonych $n-1$ wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \in \mathbb{K}^n$ jest pewien funkcjonal liniowy w przestrzeni \mathbb{K}^n . Możemy go utożsamić z pewnym wektorem $\mathbf{n} \in \mathbb{K}^n$, takim że dla każdego $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ jest $\det[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}] = \mathbf{n}^t \mathbf{y}$. W związku z tym mówimy, że iloczyn wektorowy wektorów jest wektorem. Kolejne współczynniki wektora \mathbf{n} możemy otrzymać następująco: tworzymy macierz kwadratową $A = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}]$ (dla dowolnego wektora $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$), a następnie obliczamy dopełnienia algebraiczne kolejnych współczynników w kolumnie \mathbf{y} (i w przypadku zespolonym bierzemy liczbę sprzężoną).

Uwaga: To nie jest praktyczny algorytm numeryczny obliczania iloczynu wektorowego, tylko fakt, na którym opierając się można różne praktyczne algorytmy znaleźć.

Iloczyn wektorowy wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ oznaczamy symbolem

$$\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{n-1}, \quad \text{albo} \quad \mathbf{x}_1 \times \dots \times \mathbf{x}_{n-1}$$

(drugie oznaczenie może mylić się z iloczynem kartezjańskim zbiorów, więc obojętnie wolę to pierwsze).

Większość własności iloczynu wektorowego w łatwy sposób wynika z własności wyznaczników. Na przykład, iloczyn wektorowy jest przekształceniem liniowym ze względu na każdy argument. Przetworzenie dwóch argumentów jest równoważne pomnożeniu iloczynu przez -1 . Jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ są liniowo zależne, to ich iloczyn wektorowy jest funkcjonałem zerowym.

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że wzór jawny na wyznacznik i wzór rekurencyjny (rozwińnięcie Laplace'a) są równoważne. Zaczynij od udowodnienia indukcyjnego równoważności wzoru jawnego i rozwinięcia względem ostatniej kolumny, a następnie udowodnij (rozpatrując odpowiednie przestawienia kolumn), że ten sam wynik daje rozwinięcie względem dowolnej kolumny.
2. Udowodnij reguły Sarrusa, tj. znane ze szkoły schematy pozwalające obliczać wyznaczniki macierzy 2×2 i 3×3 .
3. Udowodnij, że macierz antysymetryczna (tj. taka, że $A^T = -A$) o wymiarach $n \times n$ jest osobliwa jeśli n jest nieparzyste.
Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest antyhermitowska, jeśli $A^H = -A$. Co można powiedzieć o wyznaczniku takiej macierzy w zależności od jej wymiarów?
4. Def. Macierz cykliczna dwudiagonalna jest to macierz $A = [a_{ij}]_{i,j}$ o wymiarach $n \times n$, której wszystkie współczynniki z wyjątkiem a_{ii} dla $i = 1, \dots, n$ oraz $a_{i,i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$ i a_{n1} są równe 0.
Znajdź wzór opisujący wyznacznik takiej macierzy i warunek (równanie, w którym występują współczynniki) konieczny i dostateczny nieosobliwości takiej macierzy.
5. Oblicz współczynniki macierzy odwrotnych do

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

na podstawie jawnego wzoru.

6. Oblicz iloczyn wektorowy wektorów

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Zbadaj, czy zbiór \mathbb{R}^3 z działaniem dwuargumentowym — iloczynem wektorowym — jest grupą (w tym i w następnym zadaniu utożsamiamy przestrzenie \mathbb{R}^3 i $\mathbb{R}^{1,3}$). Jeśli tak, to czy to jest grupa abelowa? Jeśli nie, to które własności działania w grupie nie są spełnione?
8. Dla ustalonego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ przekształcenie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dane wzorem $f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, jest liniowe. Znajdź macierz jego przekształcenia.
9. Oblicz wyznacznik przekształcenia liniowego $f: \mathbb{R}[x]_4 \rightarrow \mathbb{R}[x]_4$, danego wzorem $f(w)(x) = (x+1)w'(x) + w(x)$.

10. Znajdź ogólny wzór na wyznacznik macierzy

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Def. Macierz Vandermonde'a jest to macierz $n+1 \times n+1$ o postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix},$$

dla ustalonych liczb x_0, \dots, x_n . Udowodnij, że wyznacznik takiej macierzy jest równy

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

(wynika stąd wniosek, że taka macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy nie wszystkie liczby x_i są parami różne).

Pierwszy sposób: Zastosuj jeden krok eliminacji Gaussa, a następnie przekształć blok $n \times n$ w prawym dolnym rogu (wykonując pewne działania na wierszach i kolumnach) tak, aby otrzymać macierz Vandermonde'a $n \times n$. Następnie użyj indukcji.

Drugi sposób: Napisz macierz Vandermonde'a zamieniając liczbę x_n na zmienną x . Wyznacznik tej macierzy jest wielomianem zmiennej x stopnia co najwyżej n , a jego miejscami zerowymi są liczby x_0, \dots, x_{n-1} . Zatem wielomian ten można przedstawić w postaci

$$\varepsilon(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Liczba ε jest współczynnikiem przy x^n , a więc jest to również wyznacznik macierzy \dots . Następnie użyj indukcji.

Który sposób bardziej Ci się podoba? (odpowiedź na to pytanie nie jest punktowana).

Przestrzenie i przekształcenia afiniczne

O funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = ax + b$ często mówi się, że jest to funkcja liniowa (bo jej wykres jest linią prostą), ale z punktu widzenia algebry jest to prawda tylko gdy $b = 0$. Aby nie wprowadzać siebie i innych w błąd, lepiej jest nazwać taką funkcję funkcją afiniczną. Badanie analogicznych przekształceń przestrzeni o dowolnych wymiarach prowadzi do teorii przestrzeni afinicznych, czyli geometrii afinicznej. Będzie tu ona przedstawiona w krótkim zarysie.

Określenie przestrzeni afinicznej

Def. Niech E oznacza pewien zbiór, którego elementy nazwiemy punktami, zaś V — ustaloną przestrzeń liniową nad ciałem \mathbb{K} . Jeśli istnieje funkcja $-: E \times E \rightarrow V$, taka że

- dla każdego punktu $p \in E$ oraz wektora $v \in V$ istnieje dokładnie 1 punkt $q \in E$, taki że $v = q - p$, oraz
- dla dowolnych punktów $p, q, r \in E$ zachodzi równość (tzw. równość trójkąta)

$$r - p = (r - q) + (q - p),$$

to zbiór E nazywamy przestrzenią afiniczną nad ciałem \mathbb{K} . Przestrzeń liniowa V , występująca w tym określeniu, jest nazywana przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni E . Wprowadzimy dla niej oznaczenie $S(E)$ dla podkreślenia jej związku z przestrzenią afiniczną E . Wymiar przestrzeni afinicznej E jest liczbą równą wymiarowi przestrzeni liniowej $S(E)$.

Podstawową rolę w powyższej definicji odgrywa działanie odejmowania punktów, którego wynik jest wektorem swobodnym. Definicja zapewnia również istnienie działania komplementarnego, czyli dodawania punktu i wektora, dającego w wyniku punkt. Istnienie takiego punktu jest zagwarantowane przez pierwszy warunek w definicji przestrzeni afinicznej. Jeśli więc $v = q - p \in S(E)$, to $q = p + v$.

Najprostszym przykładem przestrzeni afinicznej jest zbiór elementów dowolnej przestrzeni liniowej V . Przestrzenią wektorów swobodnych jest sama przestrzeń V , a działanie „-” jest „zwykłym” odejmowaniem wektorów; łatwo jest sprawdzić, że spełnia ono oba podane warunki. Charakterystyczną różnicą między przestrzenią liniową a przestrzenią afiniczną, która ma ten sam zbiór elementów (a tylko inne działania) jest szczególna rola wektora zerowego w przestrzeni liniowej i brak takiego wyróżnienia żadnego elementu przestrzeni afinicznej.

Możemy też zauważyć, że mając dowolną przestrzeń afiniczną E , można określić w zbiorze jej elementów działania, z którymi będzie to przestrzeń liniowa.

Wystarczy odpowiednio określić dodawanie punktów i mnożenie punktu przez dowolny element ciała \mathbb{K} i wtedy punkty będą wektorami. W tym celu wybieramy dowolny punkt przestrzeni afinicznej i uznajemy go za wektor zerowy, oznaczając go w związku z tym symbolem 0 . Dla dowolnych punktów $p, q \in E$, za ich sumę $p + q$ przyjmujemy punkt $0 + (p - 0) + (q - 0)$ (zwróćmy uwagę, że to wyrażenie jest dobrze określone dzięki równości trójkąta, mimo że drugi symbol „+” jest dwuznaczny). Podobnie, jako iloczyn punktu p i skalara a bierzemy punkt $0 + a(p - 0)$. Oczywiście, wynik każdego z tych działań zależy od wyboru wektora zerowego.

Kombinacje afiniczne

Rozważmy $k + 1$ punktów, p_0, p_1, \dots, p_k , takich że wektory swobodne $v_1 = p_1 - p_0, \dots, v_k = p_k - p_0$ są liniowo niezależne. Mówimy wtedy, że układ punktów p_0, \dots, p_k jest w położeniu ogólnym. Jeśli wektory v_1, \dots, v_k są liniowo zależne, to punkty p_0, \dots, p_k są w położeniu szczególnym. Określenie rodzaju położenia punktów nie zależy od ich uporządkowania (dowód to świetne ćwiczenie).

Przypuśćmy, że

$$q = p_0 + \sum_{i=1}^k a_i(p_i - p_0). \quad \text{Oczywiście} \quad q = p_0 + \sum_{i=0}^k a_i(p_i - p_0),$$

ponieważ $p_0 - p_0 = 0 \in S(E)$. Współczynnik a_0 powyżej możemy przyjąć dowolnie, przyjmijmy zatem $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^k a_i$, czyli $\sum_{i=0}^k a_i = 1$. Wtedy możemy wybrać dowolny punkt $r \in E$ i napisać

$$\begin{aligned} q &= r + (p_0 - r) + \sum_{i=1}^k a_i(p_i - p_0) = r + \sum_{i=0}^k a_i((p_0 - r) + (p_i - p_0)) = \\ &= r + \sum_{i=0}^k a_i(p_i - r). \end{aligned}$$

Jak widać, wybór punktu r nie ma żadnego wpływu na wartość powyższego wyrażenia, którą jest zawsze punkt q . Dlatego jeśli $\sum_{i=0}^k a_i = 1$, to wyrażenie

$$\sum_{i=0}^k a_i p_i, \quad \text{które oznacza} \quad r + \sum_{i=0}^k a_i(p_i - r),$$

jest dobrze określone, tj. jednoznacznie określa pewien punkt przestrzeni E .

Wyrażenie takie będziemy nazywać kombinacją afiniczną punktów p_0, \dots, p_k o współczynnikach a_0, \dots, a_k .

Uwaga: Żaden składnik kombinacji afinicznej z osobna nie ma sensu, a ściślej nie reprezentuje (na ogół) żadnego punktu przestrzeni E . Na przykład, zbiór wielomianów postaci $ax^3 + x^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, jest trójwymiarową przestrzenią afiniczną. Każda kombinacja afiniczna takich wielomianów też ma taką postać, ale ich kombinacje liniowe, które nie są afiniczne, już nie.

Jeśli wymiar przestrzeni E jest równy n , to możemy znaleźć co najwyżej $n + 1$ punktów w położeniu ogólnym. Liniowo niezależny zbiór wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ rozpina przestrzeń wektorów swobodnych (jest jej bazą), a więc wektor $\mathbf{w} = \mathbf{q} - \mathbf{p}_0$ jest ich kombinacją liniową o jednoznacznie określonych współczynnikach: $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$. Stąd wniosek, że dowolny punkt $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{w}$ może być *jednoznacznie* przedstawiony w postaci kombinacji afinicznej punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ w położeniu ogólnym. Ponadto każda kombinacja afiniczna tych punktów jest punktem przestrzeni E ; dlatego przez analogię do bazy przestrzeni liniowej wprowadza się pojęcie bazy afinicznej. Jest nią dowolny układ punktów w położeniu ogólnym, taki że dołączenie dowolnego punktu daje układ w położeniu szczególnym. Każda baza przestrzeni afinicznej o wymiarze n ma $n + 1$ elementów.

Wyliczmy jeszcze kilka pojęć i faktów:

- Podzbiór F przestrzeni afinicznej E , który jest przestrzenią afiniczną (przy czym przestrzeń $S(F)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $S(E)$), nazywa się podprzestrzenią afiniczną. Wymiar podprzestrzeni nie jest większy niż wymiar przestrzeni, a jeśli jest równy, to podprzestrzeń jest całą przestrzenią. Podprzestrzeń o wymiarze 0 składa się z jednego punktu.
- Dowolny układ punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ w położeniu ogólnym jest bazą podprzestrzeni afinicznej, która jest zbiorem wszystkich kombinacji afinicznych tych punktów.
- Szczególnym przypadkiem kombinacji afinicznej jest kombinacja wypukła — wszystkie jej współczynniki są nieujemne (Uwaga: Dla przestrzeni zespolonej są to liczby *rzeczywiste!*).
- Zbiór wszystkich kombinacji wypukłych punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ w położeniu ogólnym nazywa się sympleksem k -wymiarowym. Dla $k = 1$ sympleks jest odcinkiem, jeśli $k = 2$, to mamy trójkąt, a sympleks trójwymiarowy to czworoscian. Punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ są nazywane wierzchołkami sympleksu. Sympleks o wierzchołkach $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ będziemy oznaczać symbolem $\overline{\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_k}$ (np. odcinek $\overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1}$).
- Jeśli uznamy, że w punktach $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k \in E$ są rozmieszczone odważniki o masach a_0, \dots, a_k , których suma jest równa 1, to punkt $\mathbf{q} = \sum_{i=0}^k a_i \mathbf{p}_i$ (czyli kombinacja afiniczna punktów \mathbf{p}_i o współczynnikach a_i) jest środkiem ciężkości układu tych odważników.

Jeśli punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ są w położeniu ogólnym, to każdy ich środek ciężkości jednoznacznie określa masy odważników. W takim razie w przestrzeni afinicznej, której bazą jest układ punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$, mamy układ współrzędnych (przyporządkowanie każdemu punktowi \mathbf{q} takich mas odważników, dla których punkt \mathbf{q} jest środkiem ciężkości). Współrzędne te nazywają się współrzędnymi barycentrycznymi.

Przekształcenia afiniczne

Def. Przekształcenie afiniczne przestrzeni E_1 w E_2 (zakładamy, że obie przestrzenie są określone nad tym samym ciałem \mathbb{K}) jest to przekształcenie $f: E_1 \rightarrow E_2$, zachowujące wszystkie kombinacje afiniczne, tj.

$$\forall \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k \in E_1 \quad \forall a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}, a_0 + \dots + a_k = 1 \quad f\left(\sum_{i=0}^k a_i \mathbf{p}_i\right) = \sum_{i=0}^k a_i f(\mathbf{p}_i).$$

Powyższa definicja stanowi analogię do definicji przekształcenia liniowego.

Twierdzenie: Każde przekształcenie afiniczne przestrzeni E_1 w E_2 , dla ustalonego punktu $\mathbf{p}_0 \in E_1$, można przedstawić w postaci

$$f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}_0) + g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0),$$

gdzie funkcja $g: S(E_1) \rightarrow S(E_2)$ jest przekształceniem liniowym, przy czym przekształcenie g nie zależy od wyboru punktu \mathbf{p}_0 .

Każde przekształcenie f o tej postaci jest afiniczne.

Dowód: Niech $\mathbf{p}_0 \in E_1$. Określmy przekształcenie $g: S(E_1) \rightarrow S(E_2)$, takie że dla każdego $\mathbf{p} \in E_1$ jest spełniona równość $g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}_0)$. Udowodnimy, że przekształcenie g jest liniowe. Jeśli $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in E$ oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, to

$$\begin{aligned} g(a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)) &= g(a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0) + (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0)) = \\ &= f(a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0) + \mathbf{p}_0) - f(\mathbf{p}_0) = \\ &= f(a_1 \mathbf{p}_1 + a_2 \mathbf{p}_2 + (1 - a_1 - a_2)\mathbf{p}_0) - f(\mathbf{p}_0). \end{aligned}$$

Argument przekształcenia f jest tu kombinacją afiniczną punktów $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, a zatem całe powyższe wyrażenie jest równe

$$\begin{aligned} a_1 f(\mathbf{p}_1) + a_2 f(\mathbf{p}_2) - (a_1 + a_2) f(\mathbf{p}_0) &= \\ a_1 (f(\mathbf{p}_1) - f(\mathbf{p}_0)) + a_2 (f(\mathbf{p}_2) - f(\mathbf{p}_0)) &= a_1 g(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + a_2 g(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0), \end{aligned}$$

co dowodzi, że przekształcenie g jest liniowe. Dowód, że wybierając dowolny punkt \mathbf{p}_0 i znajdując rozpatrywaną reprezentację przekształcenia f dostaniemy zawsze to samo przekształcenie liniowe g jest do zrobienia na ćwiczeniach.

Dowód, że dowolne przekształcenie f określone wzorem podanym w twierdzeniu jest afiniczne, jest też ćwiczeniem. \square

W zbiorze przekształceń afinicznych ustalonej przestrzeni E_1 w E_2 wyróżnimy klasę podobieństw afinicznych, która składa się z przekształceń różnowartościowych.

Twierdzenie: Przekształcenie afiniczne $f: E_1 \rightarrow E_2$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $g: S(E_1) \rightarrow S(E_2)$, takie że $\forall \mathbf{p} \in E_1, f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}_0) + g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, jest różnowartościowe.
Dowód polecam jako ćwiczenie.

Ponieważ przestrzenie liniowe możemy traktować jak przestrzenie afiniczne, więc naturalne jest rozpatrywanie przekształceń afinicznych takich przestrzeni. W szczególności, niech f będzie przekształceniem afinicznym przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^m . Każde takie przekształcenie możemy przedstawić w postaci

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

Macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ reprezentuje część liniową przekształcenia f , zaś wektor $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^m$ opisuje przesunięcie (wektor ten jest obrazem wektora $\mathbf{0}$).

Niezmienniki przekształceń afinicznych

Niech A oznacza dowolny podzbiór przestrzeni E_1 , a $f(A) \subset E_2$ jego obraz w przekształceniu f . Niezmiennikiem przekształcenia f nazywamy każdą własność zbioru A , którą ma także zbiór $f(A)$. Przekształcenia, a także klasy przekształceń charakteryzują się swoimi niezmiennikami, które można wykorzystać do ich badania.

Można też użyć niezmienników do zdefiniowania przekształceń i ich klas. Na przykład przypuśćmy, że punkt \mathbf{q} jest kombinacją afiniczną punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$. Żądanie, aby wtedy punkt $f(\mathbf{q})$ był kombinacją afiniczną punktów $f(\mathbf{p}_0), \dots, f(\mathbf{p}_k)$ o tych samych współczynnikach, wyróżnia klasę przekształceń f , których niezmiennikiem jest ta własność każdego układu punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}$. Jest to właśnie klasa przekształceń afinicznych. Jeśli zażądamy spełnienia dodatkowych niezmienników, to oczywiście zawężymy klasę przekształceń.

Wymienimy najpierw kilka najważniejszych niezmienników wszystkich przekształceń afinicznych, a następnie niezmienniki podobieństw afinicznych.

- Wypukłość zbioru. Zbiór A jest wypukły, jeśli dla dowolnych punktów $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$ odcinek $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ jest zawarty w A . Obraz w przekształceniu afinicznym zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym.

- Szczególne położenie punktów. Obraz w przekształceniu afinicznym zbioru punktów w położeniu szczególnym jest zbiorem punktów w położeniu szczególnym.
- Bycie podprzestrzenią afiniczną. Jeśli zbiór A jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E_1 , to zbiór $f(A)$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E_2 . Nie jest niezmiennikiem afinicznym wymiar podprzestrzeni. Jest natomiast zawsze $\dim f(A) \leq \dim A$.
- Równoległość podprzestrzeni. Przyjmijmy następującą definicję: podprzestrzeń A_1 przestrzeni E_1 jest równoległa do podprzestrzeni A_2 , jeśli istnieje wektor $\mathbf{t} \in S(E_1)$, taki że $\forall \mathbf{p} \in A_1, \mathbf{p} + \mathbf{t} \in A_2$ (Uwaga: Nie jest to relacja równoważności, chyba, że bierzemy pod uwagę tylko podprzestrzenie o tym samym wymiarze). Jeśli podprzestrzeń A_1 jest równoległa do A_2 , to podprzestrzeń $f(A_1) \subset E_2$ jest równoległa do $f(A_2)$.
- Spójność zbioru. Dokładna definicja spójności (i innych własności topologicznych) zbioru wykracza poza ten wykład, ale możemy rozumieć to pojęcie intuicyjnie (i na razie to nam wystarczy).

Podobieństwa afiniczne zachowują wszystkie własności wymienione wyżej i dodatkowo następujące:

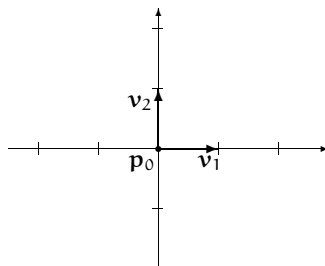
- Wymiar przestrzeni afinicznej, a także każdej jej podprzestrzeni.
- Ogólne położenie punktów. Wynika z tego m.in., że obrazem sympleksu k -wymiarowego w podobieństwie jest sympleks k -wymiarowy, a więc każde takie dwa sympleksy (np. trójkąty dla $k = 2$) są afinicznie podobne.
- Brak spójności zbioru.
- Brak równoległości podprzestrzeni.

Przekształcenia afiniczne przestrzeni E w przestrzeń E , które są podobieństwami, mają przekształcenia odwrotne. Przekształcenie identycznościowe jest afiniczne, złożenie przekształceń afinicznych oczywiście też, mamy tu więc grupę (na ogół nieabelową) podobieństw afinicznych przestrzeni E . Zawiera ona różne podgrupy, np. grupę przesunięć (albo: translacji); przesunięcie o wektor $\mathbf{t} \in S(E)$ każdemu punktowi $\mathbf{p} \in E$ przyporządkowują punkt $\mathbf{p} + \mathbf{t}$, oraz grupę jednokładności (inaczej: homotetii) o ustalonym środku \mathbf{o} : taka jednokładność o skali $s \neq 0$ przyporządkowuje punktowi \mathbf{p} punkt $\mathbf{o} + s(\mathbf{p} - \mathbf{o})$. Przykładowym niezmiennikiem podobieństw należących do obu tych podgrup jest kierunek dowolnej podprzestrzeni afinicznej, tj. jeśli A jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E , to jej obraz $f(A)$ jest podprzestrzenią równoległą do A .

Współrzędne kartezjańskie i jednorodne

Niech układ punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ będzie bazą afiniczną przestrzeni E . Możemy określić za jej pomocą układ współrzędnych barycentrycznych, ale nie tylko. Dowolny punkt $\mathbf{q} \in E$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0)$. Liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są współrzędnymi kartezjańskimi punktu \mathbf{q} w zdefiniowanym w ten sposób układzie. Często za układ odniesienia układu współrzędnych kartezjańskich przyjmuje się początek układu, czyli punkt \mathbf{p}_0 i układ tak zwanych wersorów osi, składający się z wektorów $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$.

Uwaga: Docieramy tu do matematycznego sedna powszechnie stosowanej praktyki, która polega na rysowaniu na kartce, na tablicy albo gdziekolwiek czegoś w rodzaju rysunku obok.



Mając układ współrzędnych kartezjańskich możemy utożsamiać punkty z wektorami liczbowymi złożonymi ze współrzędnych, oraz przekształcenia afiniczne z parami (macierz A , wektor \mathbf{t}), które występują we wzorze

$$f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + \mathbf{t}.$$

Prowadzi to do dwóch problemów. Po pierwsze, taka reprezentacja nie rozróżnia punktów i wektorów swobodnych (a to są na ogół różne obiekty). Aby otrzymać obraz wektora swobodnego w przekształceniu g , które jest częścią liniową przekształcenia f , trzeba użyć wzoru

$$g(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

czyli pamiętać o niedodawaniu wektora przesunięcia \mathbf{t} (np. podczas pisania programu komputerowego). Po drugie, wzór opisujący złożenie przekształceń afinicznych,

$$f_2(f_1(\mathbf{p})) = A_2(A_1\mathbf{p} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = A_2A_1\mathbf{p} + (A_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2),$$

jest skomplikowany, a utworzone w taki sam sposób wzory opisujące złożenie wielu przekształceń są bardzo niewygodne.

Rozwiązaniem obu opisanych problemów jest wprowadzenie współrzędnych jednorodnych. Do wektora $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^n$ współrzędnych kartezjańskich punktu $\mathbf{p} \in E$

dopisujemy dodatkową współrzędną, równą 1. Do wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ współrzędnych wektora $\mathbf{v} \in S(E)$ dopisujemy 0, w każdym przypadku otrzymując wektor w przestrzeni \mathbb{K}^{n+1} . Przekształcenie f (i jednocześnie jego część liniową g) opisujemy za pomocą macierzy o strukturze blokowej (blok 0 ma wymiary $1 \times n$):

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dowód, że taka reprezentacja przekształcenia afinicznego jest równoważna poprzedniej (przy założeniu, że wektor współrzędnych jednorodnych mnożymy przez taką macierz), a także dowód, że iloczyn takich macierzy ma taką samą strukturę (tj. identyczny ostatni wiersz) i opisuje złożenie odpowiednich przekształceń, jest prostym ćwiczeniem.

Odległość w przestrzeni afinicznej

Def. Dowolną funkcję $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy metryką w zbiorze E , jeśli ma następujące trzy własności: jest nieujemna oraz równa 0 wtedy i tylko wtedy gdy argumenty są równe, nie zmienia wartości po przestawieniu argumentów, a ponadto spełnia nierówność trójkąta: $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \geq \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ dla dowolnych elementów $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ zbioru E . Zbiór wyposażony w metrykę nazywa się przestrzenią metryczną. Wartość metryki dla ustalonych argumentów (punktów) \mathbf{p} i \mathbf{q} nazywa się odległością tych punktów.

Powyższa definicja jest przypomnieniem tego, co było powiedziane przy okazji norm. Każda norma określa metrykę w przestrzeni liniowej, która jest jej dziedziną. Ponieważ dowolnej parze punktów \mathbf{p}, \mathbf{q} w przestrzeni afinicznej E możemy przyporządkować wektor $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{q} \in S(E)$, więc mając normę określoną w przestrzeni $S(E)$ mamy też metrykę w przestrzeni E . Tak jak w przestrzeni liniowej, również w przestrzeni afinicznej możemy wprowadzić wiele różnych metryk (z których każda odpowiada innej normie w przestrzeni wektorów swobodnych; ponadto istnieją metryki nie związane z normami, ale nimi się nie zajmujemy).

Wiele własności zbiorów punktów, które można przyjmować za niezmienniki przekształceń (definiując w ten sposób klasy przekształceń), formułuje się za pomocą ustalonej metryki. Na przykład proporcje odległości dowolnych trzech lub więcej punktów współliniowych (tj. leżących w ustalonej jednowymiarowej podprzestrzeni afinicznej) są niezmiennikiem podobieństw afinicznych.

Przekształcenia zachowujące proporcje odległości dowolnych punktów (niekoniecznie współliniowych), nazywają się podobieństwami geometrycznymi. Podklasą klasy podobieństw geometrycznych są izometrie, które zachowują wszystkie odległości, tj. $\rho(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q})) = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ dla dowolnych punktów \mathbf{p}, \mathbf{q} . Łatwo jest udowodnić, że przesunięcia (tj. przekształcenia $E \rightarrow E$, których część liniowa jest reprezentowana przez macierz jednostkową) są izometriami. To, jakie inne izometrie oprócz przesunięć istnieją w przestrzeni afinicznej E wyposażonej w metrykę, zależy od tej metryki. Wkrótce zajmiemy się metrykami euklidesowymi. W przestrzeni wyposażonej w taką metrykę (tzw. przestrzeni euklidesowej) izometriami są na przykład obroty (ale dopiero będziemy je pracownie i porządnie definiować — potrzebujemy do tego m.in. pojęcia kąta).

Zadania i problemy

1. Wskaż dowolną bazę afiniczną przestrzeni E , której elementami są wszystkie wielomiany postaci $ax^3 + x^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wskaż przestrzeń wektorów swobodnych przestrzeni E .
2. Określ pojęcie kombinacji afinicznej przekształceń przestrzeni E_1 w E_2 . Udowodnij, że zbiór wszystkich przekształceń afinicznych $f: E_1 \rightarrow E_2$ jest przestrzenią afiniczną. Znajdź wymiar tej przestrzeni, w zależności od wymiarów przestrzeni E_1 i E_2 .
3. Dokończ dowód twierdzenia z wykładu: udowodnij, że w przedstawieniu przekształcenia afinicznego $f: E \rightarrow E$, $f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}_0) + g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, przekształcenie liniowe $g: S(E) \rightarrow S(E)$ nie zależy od punktu \mathbf{p}_0 .
4. Udowodnij twierdzenie podające warunek konieczny i dostateczny różnowartościowości przekształcenia afinicznego.
5. Zgodnie ze stwierdzeniem z wykładu, przestrzeń afiniczną możemy otrzymać z dowolnej przestrzeni liniowej V , „zapominając” o wyróżnionym elemencie (wektorze zerowym). Udowodnij, że każda warstwa k -wymiarowa przestrzeni V jest k -wymiarową podprzestrzenią afiniczną otrzymanej przestrzeni afinicznej (i każda podprzestrzeń afiniczna jest warstwą przestrzeni V).
6. Dane są 4 punkty na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 : $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0$ i \mathbf{q}_1 . Napisz układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest punkt wspólny prostych $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1$. Przedyskutuj jego możliwe rozwiązania.
7. Dane jest 5 punktów w przestrzeni \mathbb{R}^3 : $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_0$ i \mathbf{q}_1 . Napisz układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest punkt wspólny płaszczyzny zawierającej punkty $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ i prostej $\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1$. Przedyskutuj jego możliwe rozwiązania.
8. Udowodnij jak najwięcej wymienionych na wykładzie niezmienników przekształceń afinicznych.

9. Udowodnij, że wymienione na wykładzie niezmienniki podobieństw afinicznych, które nie były przedstawione jako niezmienniki *wszystkich* przekształceń afinicznych, mogą nie być zachowane przez przekształcenia afiniczne nieróżnowartościowe.
10. Def. Zbiór F nazywa się zbiorem gwiaździstym ze względu na punkt \mathbf{p} , jeśli dla każdego punktu $\mathbf{q} \in F$ zbiór F zawiera wszystkie punkty odcinka $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$.
Udowodnij, że gwiaździstość zbioru jest niezmiennikiem afinicznym, tj. jeśli zbiór A jest gwiaździsty ze względu na punkt \mathbf{p} , to zbiór $f(A)$ jest gwiaździsty względem punktu $f(\mathbf{p})$.
Udowodnij, że brak gwiaździstości jest niezmiennikiem podobieństw afinicznych.
11. Utwórz układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest wektor współrzędnych barycentrycznych $[a_0, \dots, a_n]^T$ dowolnego danego punktu \mathbf{q} w układzie określonym przez bazę afiniczną $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ przestrzeni \mathbb{R}^n (traktowanej jak przestrzeń afiniczna).
12. Udowodnij podane na wykładzie własności jednorodnej reprezentacji przekształceń afinicznych.
13. Wskaż związek między przestrzenią przekształceń afinicznych przestrzeni E w E a zbiorem macierzy jednorodnych reprezentacji takich przekształceń.
14. Udowodnij, że funkcja $\rho(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$, dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ określonej w przestrzeni $S(E)$, jest metryką w przestrzeni afinicznej E .
15. Udowodnij, że dla dowolnego układu punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in E_1$ ($\dim E_1 = n$) w położeniu ogólnym oraz $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n \in E_2$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f: E_1 \rightarrow E_2$, takie że $f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$ dla $i = 0, \dots, n$.

Formy kwadratowe, dwuliniowe i półtoraliniowe

Def. Niech V_1, \dots, V_n oraz V będą przestrzeniami liniowymi nad ustalonym ciałem \mathbb{K} . Funkcję $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$ nazywamy przekształceniem n-liniowym, jeśli dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$, przy ustalonych wszystkich argumentach z wyjątkiem k -tego, funkcja ta jest przekształceniem liniowym przestrzeni V_k w V .

Na przykład, jeśli utożsamimy przestrzeń $\mathbb{K}^{n,n}$ z $(\mathbb{K}^n)^n$, to funkcja \det_n (wyznacznik) jest przekształceniem n -liniowym (bo jest to przekształcenie liniowe ze względu na każdą kolumnę macierzy, przy ustalonych wszystkich pozostałych).

Odtąd przez najbliższe kilkanaście wykładów będziemy się zajmować przekształceniami dwuliniowymi i symetrycznymi, $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Przekształcenie dwuliniowe φ jest symetryczne, jeśli dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ zachodzi równość $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Przekształcenia takie będziemy nazywać formami dwuliniowymi.

Def. Niech V oznacza przestrzeń liniową nad ciałem \mathbb{K} . Formą kwadratową w przestrzeni V nazywamy dowolną funkcję $\Phi: V \rightarrow \mathbb{K}$, określoną wzorem $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, za pomocą pewnej formy dwuliniowej $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Określone wyżej formy kwadratowe spełniają warunek $\Phi(a\mathbf{x}) = a^2\Phi(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in V$ oraz $a \in \mathbb{K}$. Własność funkcji $\Phi: \Phi(a\mathbf{x}) = h(a)\Phi(\mathbf{x})$ dla każdego \mathbf{x} i a , gdzie h jest pewną ustaloną funkcją, nazywa się jednorodnością przekształcenia Φ . Przekształcenia liniowe są jednorodne, z funkcją $h(a) = a$. W poprzednim wykładzie była mowa o współrzędnych jednorodnych. W związku z tym zauważmy, że przekształcenie afiniczne nie jest jednorodne, ale reprezentowaliśmy je przez pewne przekształcenie liniowe; stąd nazwa „współrzędne jednorodne”. Można uogólnić to postępowanie, np. na formy kwadratowe w przestrzeniach afinicznych — będzie jeszcze o tym mowa.

Obliczmy, korzystając z dwuliniowości i symetrii

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

skąd wynika

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})).$$

Podstawiając do powyższego wzoru dowolną formę kwadratową Φ otrzymamy pewną jednoznacznie określoną formę dwuliniową φ . Jednoznaczność związku

symetrycznych przekształceń dwuliniowych i form kwadratowych nosi nazwę zasady polaryzacji, a właściwie jest szczególnym przypadkiem bardzo ogólnego twierdzenia o tej nazwie, dotyczącego symetrycznych przekształceń n -liniowych dla dowolnego n .

Jeśli $V = \mathbb{K}^n$, to każdą formę dwuliniową φ oraz formę kwadratową Φ możemy przedstawić wzorami

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

dla pewnej jednoznacznie określonej macierzy symetrycznej A . Mając dowolną bazę $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ ustalonej przestrzeni liniowej V możemy odpowiednie formy w tej przestrzeni przedstawić w postaci

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (X^{-1}\mathbf{y})^T A X^{-1}\mathbf{x}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = (X^{-1}\mathbf{x})^T A X^{-1}\mathbf{x},$$

za pomocą macierzy bazy dualnej X^{-1} oraz pewnej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Zauważmy, że formę kwadratową otrzymamy biorąc niekoniecznie symetryczną macierz A ; symetria macierzy jest konieczna do zapewnienia symetrii formy dwuliniowej. Założenie o symetrii zapewnia jednoznaczność związku form dwuliniowych i kwadratowych.

W przestrzeni nad ciałem liczb zespolonych możemy wykonać wszystkie konstrukcje opisane wyżej bez problemu. Chcielibyśmy jednak, aby wartości form kwadratowych w przestrzeni nad dowolnym ciałem liczbowym (tj. \mathbb{Q} , \mathbb{R} i \mathbb{C}) były liczbami rzeczywistymi (a dokładniej, aby część urojona wartości formy kwadratowej w przestrzeni zespolonej była równa 0). Dlatego musimy nieco zmienić warunek jednorodności. Trzeba, aby dla każdego wektora $\mathbf{x} \in V$ i liczby a była spełniona równość $\Phi(a\mathbf{x}) = |a|^2\Phi(\mathbf{x})$. Określamy w ten sposób formy kwadratowe drugiego rodzaju; w przestrzeniach nad ciałem liczb rzeczywistych lub wymiernych dostajemy to samo, co przedtem.

Dowolną formę kwadratową (dalej dla skrótowi pomijamy słowa „drugiego rodzaju”, ale tylko takimi formami będziemy się zajmować) w przestrzeni \mathbb{C}^n możemy przedstawić wzorem

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x},$$

w którym występuje macierz hermitowska A (tj. $A^H = A$; sprawdzenie, że dla każdego wektora \mathbf{x} część urojona wartości formy jest równa 0, jest prostym ćwiczeniem). Dla ustalonej bazy $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, dowolną formę kwadratową Φ w przestrzeni V możemy przedstawić wzorem

$$\Phi(\mathbf{x}) = (X^{-1}\mathbf{x})^H A X^{-1}\mathbf{x},$$

z macierzą hermitowską A . Z tak określoną formą kwadratową możemy związać przekształcenie φ , określone wzorem

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{y})^H A \mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}.$$

Natychmiast możemy zauważyć, że przekształcenie to, z wyjątkiem przypadku gdy macierz A jest zerowa, *nie jest* ani symetryczne, ani dwuliniowe!

Przekształcenie $\varphi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, określone wzorem

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H A \mathbf{x},$$

który jest szczególnym, najłatwiejszym do zbadania przypadkiem wzoru poprzedniego, spełnia następujące warunki dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ i liczb a_1, a_2 :

$$\begin{aligned}\varphi(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= a_1\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + a_2\varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \\ \varphi(\mathbf{x}, a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2) &= \overline{a_1}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \overline{a_2}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})}.\end{aligned}$$

Przekształcenie spełniające powyższe warunki jest nazywane formą półtoraliniową. Przekształcenia dowolnej przestrzeni, opisane ogólniejszym wzorem podanym wcześniej, też spełniają te warunki.

Między formami półtoraliniowymi a formami kwadratowymi drugiego rodzaju również zachodzi jednoznaczna odpowiedniość. Sposób obliczania wartości formy kwadratowej za pomocą półtoraliniowej jest oczywisty, zaś w drugą stronę mamy

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\operatorname{Re} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \\ \varphi(\mathbf{x} + i\mathbf{y}, \mathbf{x} + i\mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + i\overline{\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})} + i\overline{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + i\overline{i\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y})} = \\ &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2i\operatorname{Im} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}),\end{aligned}$$

skąd wynika następująca tożsamość polaryzacyjna:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})) + \frac{i}{2}(\Phi(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})).$$

Znając formę kwadratową umiemy więc obliczyć odpowiadającą jej formę półtoraliniową, a z jej pomocą możemy obliczyć współczynniki macierzy $A = [a_{pq}]_{p,q}$, która reprezentuje obie te formy w ustalonej bazie $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$:

$$a_{pq} = \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_p).$$

Dygresja. Formy kwadratowe i dwuliniowe lub półtoraliniowe określa się także w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych. Niech np. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i niech V oznacza zbiór funkcji rzeczywistych lub zespolonych na odcinku $[a, b]$, zaś ρ oznacza ustaloną funkcję rzeczywistą na $[a, b]$. Możemy wtedy określić następujące formy:

$$\begin{aligned}\Phi(f) &= \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx, \\ \varphi(f, g) &= \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx,\end{aligned}$$

przy czym bierzemy pod uwagę tylko te funkcje, dla których powyższe całki są określone i skończone (należy mieć nadzieję, że całka Lebesgue'a będzie przedstawiona na wykładzie z Analizy II). O funkcjach takich mówi się, że są całkowalne w kwadracie z wagą ρ na odcinku $[a, b]$; ich zbiór jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią przestrzeni V). Zauważmy, że przyjęta forma kwadratowa jest istotnym elementem użytym do zdefiniowania przestrzeni liniowej. Koniec dygresji.

Kongruencje macierzy

Jeśli macierz hermitowska A reprezentuje formę półtoraliniową φ w bazie $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, zaś $C = X^{-1}Y$, gdzie $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ jest macierzą innej bazy, to macierz $B = C^H A C$ reprezentuje formę φ w bazie Y . Łatwo jest sprawdzić, że macierz B jest hermitowska. Ponieważ każda nieosobliwa macierz C jest macierzą zmiany bazy, więc każda macierz równa $C^H A C$ reprezentuje tę samą formę φ w pewnej bazie.

Def. Przekształcenie, które macierzy hermitowskiej A przyporządkowuje macierz $C^H A C$ (dla pewnej nieosobliwej macierzy C) nazywamy przystawianiem albo kongruencją macierzy.

Kongruencje stanowią grupę (nieabelową) z działaniem złożenia. Działanie to jest realizowane przez mnożenie macierzy kongruencji. Istotnie,

$$B = C^H A C, \quad D = E^H B E = E^H C^H A C E = (CE)^H A (CE).$$

Łączność złożenia kongruencji wynika z łączności mnożenia macierzy, elementem neutralnym w grupie kongruencji jest przekształcenie tożsamościowe (reprezentowane przez macierz jednostkową), a kongruencja odwrotna do realizowanej przez macierz C jest realizowana przez macierz C^{-1} .

W grupie kongruencji można wskazać różne podgrupy, realizowane przez macierze należące do odpowiednich podgrup grupy macierzy nieosobliwych $n \times n$ z działaniem mnożenia. Mamy np. kongruencje realizowane przez macierze permutacji, kongruencje trójkątne górne, kongruencje trójkątne dolne i kongruencje diagonalne — ta ostatnia podgrupa jest abelowa.

Mając dowolną grupę przekształceń warto znać jej niezmienniki. Oczywistym niezmiennikiem kongruencji jest rząd macierzy poddawanej przekształceniu. Inne niezmienniki poznamy dalej.

Przystawanie macierzy jest relacją w zbiorze macierzy hermitowskich $n \times n$: dwie macierze, A i B , są przystające, jeśli istnieje macierz nieosobliwa C , taka że $B = C^H A C$. Relacja przystawania jest równoważnością w zbiorze macierzy hermitowskich, a zatem dzieli ten zbiór na klasy abstrakcji. Przekonamy się, że klas tych jest skończenie wiele.

Uwaga: Mieliśmy już do czynienia z inną relacją równoważności w zbiorze macierzy $n \times n$, mianowicie z podobieństwem. Przypomnijmy, że macierze A i B są podobne, jeśli istnieje macierz C taka że $B = C^{-1} A C$. Istnieją macierze C , takie że $C^{-1} = C^H$, a więc w tym przypadku (i tylko w tym) podobieństwo jest jednocześnie przystawaniem. Zwróćmy uwagę, że macierz podobieństwa C jest określona z dokładnością do czynnika stałego, tj. jeśli $B = C^{-1} A C$, to również $B = (aC)^{-1} A (aC)$ dla każdego $a \neq 0$. Dla przystawania tak nie jest.

Podsumowując: macierze A i B są podobne, jeśli reprezentują to samo przekształcenie liniowe $f: V \rightarrow V$ w dwóch różnych bazach. Macierze hermitowskie A i B są przystające, jeśli reprezentują tę samą formę półtoraliniową $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ w dwóch różnych bazach. Proszę tych pojęć nie mylić.

Twierdzenie Sylwestra

Twierdzenie Sylwestra (macierzowe): Dla każdej macierzy hermitowskiej A istnieje macierz nieosobliwa C , taka że macierz $C^H A C$ ma następującą strukturę blokowo-diagonalną:

$$D = \begin{bmatrix} I_\pi & & \\ & -I_\nu & \\ & & 0_\zeta \end{bmatrix}.$$

Macierz C może nie być określona jednoznacznie, ale wymiary poszczególnych bloków, π , ν i ζ , są przez macierz A określone jednoznacznie.

Dowód: Przeprowadzony niżej dowód istnienia odpowiedniej macierzy C polega na wskazaniu sposobu jej znalezienia. Kongruencja realizowana przez macierz C jest złożeniem kongruencji, które kolejno

1. doprowadzają macierz A do postaci blokowo-diagonalnej z blokami 1×1 lub 2×2 na diagonalu,
2. przekształcają bloki diagonalne 2×2 w macierze diagonalne,
3. doprowadzają do otrzymania macierzy diagonalnej o postaci podanej w twierdzeniu.

Najpierw udowodnimy następujący Lemat: Dla macierzy hermitowskiej A o podziale blokowym

$$A = \begin{bmatrix} M & G \\ G^H & W \end{bmatrix},$$

z blokami M i W o wymiarach odpowiednio $s \times s$ i $n - s \times n - s$, takiej że blok M jest macierzą nieosobliwą, kongruencja realizowana przez macierz

$$R = \begin{bmatrix} I_s & -M^{-1}G \\ 0 & I_{n-s} \end{bmatrix}$$

doprowadza macierz A do postaci blokowo-diagonalnej.

Dowód lematu: Wystarczy przeprowadzić odpowiednie rachunki, tj. obliczyć bloki macierzy $R^H A R$. Skorzystamy ze schematu

$$\begin{array}{ccc} & A & R \\ & \downarrow & \downarrow \\ R^H & \rightarrow R^H A & \rightarrow R^H A R \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ -G^H M^{-1} & I_{n-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & G \\ G^H & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s & -M^{-1}G \\ 0 & I_{n-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -G^H M^{-1}G + W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & W - G^H M^{-1}G \end{bmatrix}$$

□

Dowód twierdzenia:

Krok 1. Dowód istnienia kongruencji, której efektem jest otrzymanie macierzy blokowo-diagonalnej jest indukcyjny ze względu na wymiary macierzy. Dla macierzy 1×1 i 2×2 wystarczy kongruencja tożsamościowa, przypuśćmy więc, że istnieje odpowiednia kongruencja dla wszystkich macierzy o wymiarach mniejszych niż $n \times n$. Jeśli macierz A jest zerowa, to jest diagonalna, a więc nie trzeba jej przekształcać. Jeśli macierz A jest niezerowa, to mamy dwie możliwości:

1. Pewien współczynnik na diagonalu, a_{pp} , jest różny od zera. Macierz $T_{1p}^H A T_{1p}$ ma „w górnym lewym rogu” nieosobliwy blok $M = [a_{pp}]$ o wymiarach 1×1 (Uwaga: Macierz transpozycji T_{pq} jest jednostkowa, jeśli $p = q$).
2. Wszystkie współczynniki na diagonalu macierzy A są równe 0, ale istnieje niezerowy współczynnik a_{pq} poza diagonalą. Macierz $(T_{1p} T_{2q})^H A (T_{1p} T_{2q})$ ma „w górnym lewym rogu” blok M o wymiarach 2×2 , o postaci $\begin{bmatrix} 0 & c \\ \bar{c} & 0 \end{bmatrix}$, nieosobliwy, bo $|c| = |a_{pq}| \neq 0$.

Po odpowiednim przestawieniu wierszy i kolumn uzyskujemy nieosobliwy blok M o wymiarach 1×1 lub 2×2 . Na podstawie lematu możemy wskazać macierz R , taką że macierz $R^H A R$ ma zera w pierwszym wierszu i kolumnie, albo w pierwszych dwóch wierszach i kolumnach, poza blokiem diagonalnym.

Następnie możemy wskazać macierz blokowo-diagonalną, o postaci $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$, z blokiem diagonalnym I — macierzą jednostkową 1×1 lub 2×2 i blokiem C , który jest macierzą kongruencji sprowadzającej drugi blok diagonalny naszej macierzy po przekształceniu do pożądanej postaci. Na mocy założenia indukcyjnego taka macierz istnieje.

Krok 2. Macierz kongruencji zastosowanej w kroku pierwszym jest złożeniem macierzy permutacji i macierzy trójkątnych górnych. Aby przekształcić otrzymane na diagonalu bloki 2×2 to nie wystarczy. Mając blok

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g \\ \bar{g} & 0 \end{bmatrix} = |g| \begin{bmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \text{ stosujemy macierz } E_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & e^{i\varphi} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo możemy sprawdzić, że $E_\varphi^H G E_\varphi = 2|g| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Aby otrzymać macierz diagonalną $n \times n$ z macierzy blokowo-diagonalnej otrzymanej w pierwszym kroku, stosujemy kongruencję reprezentowaną przez macierz blokowo-diagonalną z blokami o takich samych wymiarach; każdy z bloków 1×1 ma współczynnik równy 1, a bloki 2×2 są macierzami E_φ , dla odpowiednio wybranych φ .

Krok 3. Po wykonaniu kroku drugiego mamy hermitowską macierz diagonalną, zatem wszystkie jej współczynniki są liczbami rzeczywistymi. Teraz należy odpowiednio uporządkować i przeskalować współczynniki diagonalne, aby mieć na diagonalu kolejno $+1$, -1 i 0 . W tym celu stosujemy transpozycje T_{pq} tak, aby poprzestawiać na początek wiersze (i kolumny) zawierające dodatnie współczynniki diagonalne, następnie ujemne i na końcu zera. Po przestawieniu mamy macierz $D' = \text{diag}(d_1, \dots, d_\pi, -d_{\pi+1}, \dots, -d_{\pi+\nu}, 0, \dots, 0)$, gdzie wszystkie liczby $d_1, \dots, d_{\pi+\nu}$ są dodatnie. Aby otrzymać macierz D , wystarczy zastosować kongruencję diagonalną realizowaną przez macierz $\text{diag}(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_{\pi+\nu}}}, 1, \dots, 1)$.

Jest oczywiste, że powyższa konstrukcja jest w ogólnym przypadku niejednoznaczna (tj. że istnieje więcej niż jedna macierz C , taka że macierz $C^H A C$ ma postać opisaną w tezie twierdzenia). Pozostało dowiedzieć, że niezależnie od sposobu przekształcania macierzy, zawsze otrzymamy te same liczby π , ν i ζ współczynników 1 , -1 i 0 na diagonalu.

Ponieważ kongruencje zachowują rząd macierzy, więc jasne jest, że zawsze $\zeta = n - \text{rank } A$. Rozważmy nieosobliwe macierze C_1 i C_2 , takie że $C_1^H A C_1 = D_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\pi}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\nu}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\zeta})$. Podprzestrzeń liniowa

przestrzeni K^n , której bazą jest zbiór pierwszych π_1 kolumn macierzy C_1 oznaczmy symbolem V_1 . Symbolem V_2 oznaczmy podprzestrzeń rozpiętą przez ostatnie $\nu_2 + \zeta$ kolumn macierzy C_2 .

Rozważmy formę kwadratową $\Phi: \Phi(x) = x^H A x$. Dla każdego niezerowego wektora $x \in V_1$ mamy $\Phi(x) > 0$, podobnie dla każdego $x \in V_2$ jest $\Phi(x) \leq 0$. Przypuśćmy, że $\pi_1 > \pi_2$. Wtedy $\dim V_1 + \dim V_2 = \pi_1 + \nu_2 + \zeta > \pi_2 + \nu_2 + \zeta = n$, zatem wymiar podprzestrzeni $V_1 \cap V_2$ jest większy od zera (nie może być mniejszy niż $\pi_1 - \pi_2$). Stąd wynika istnienie niezerowego wektora $x \in K^n$ ($x \in V_1 \cap V_2$), takiego że $\Phi(x) > 0$ i $\Phi(x) \leq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\pi_1 \leq \pi_2$. W podobny sposób można dowiedzieć, że $\pi_2 \leq \pi_1$, co kończy dowód. \square

Twierdzenie Sylwestra (ogólne): Niech Φ oznacza dowolną formę kwadratową (drugiego rodzaju) w przestrzeni V o wymiarze n i niech φ oznacza związaną z nią formę półtoraliniową. Istnieją podprzestrzenie V_+ , V_- i V_0 przestrzeni V , takie że

1. dla każdego $x \in V_+$, $x \neq 0$, zachodzi równość $\Phi(x) > 0$,
2. dla każdego $x \in V_-$, $x \neq 0$, zachodzi równość $\Phi(x) < 0$,
3. dla każdego $x \in V_0$, $y \in V$, jest spełniona równość $\varphi(x, y) = 0$,
4. jeśli $x \in V_+$ i $y \in V_-$ to $\varphi(x, y) = 0$.

Wymiary podprzestrzeni V_+ , V_- i V_0 , odpowiednio π , ν i ζ , są określone jednoznacznie przez formę Φ . Przestrzeń V jest sumą prostą tych podprzestrzeni. Ponadto istnieje baza przestrzeni V , taka że macierz formy Φ w tej bazie ma postać $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\pi}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\nu}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\zeta})$.

Powyższe twierdzenie jest wnioskiem z twierdzenia macierzowego. Dodajmy jeszcze kilka uwag.

- Niezależność liczb π , ν , ζ od konkretnych podprzestrzeni V_+ i V_- nazywa się bezwładnością formy Φ . Twierdzenie Sylwestra bywa w związku z tym nazywane twierdzeniem o bezwładności.
- Jeśli znamy macierz A formy kwadratowej Φ w bazie $X = [x_1, \dots, x_n]$ oraz macierz C kongruencji sprowadzającej macierz A do postaci D takiej jak w macierzowym twierdzeniu Sylwestra (tzw. postaci kanonicznej), to macierz D reprezentuje formę Φ w bazie $XC = [y_1, \dots, y_n] = Y$. Początkowe π elementów tej bazy rozpina podprzestrzeń V_+ , kolejne ν wektorów tworzy bazę V_- , zaś bazę podprzestrzeni V_0 otrzymamy biorąc ζ ostatnich wektorów bazy Y .
- Z wyjątkiem sytuacji, gdy jedna z podprzestrzeni, V_+ lub V_- , jest całą przestrzenią V (czyli gdy $\pi = n$ albo $\nu = n$), jedynie podprzestrzeń V_0 jest przez formę Φ określona jednoznacznie. Przestrzeń tę nazywamy jądrem formy kwadratowej Φ . W przestrzeni \mathbb{K}^n jest nią oczywiście podprzestrzeń $\ker A$, gdzie A jest macierzą formy Φ .
- Forma, dla której podprzestrzeń V_+ jest całą przestrzenią V , nazywa się formą dodatnio określoną. Jeśli $V_- = V$ to mamy formę ujemnie określoną. Oprócz tego możemy mieć do czynienia z formą nieujemnie określoną, jeśli $V_- = \{0\}$ albo z formą niedodatnio określoną, gdy $V_+ = \{0\}$.
Forma kwadratowa Φ , dla której istnieją wektory x i y , takie że $\Phi(x) > 0$ i $\Phi(y) < 0$, nazywa się nieokreślona.

Przestrzenie ortogonalne

Def. Niech φ oznacza formę półtoraliniową w przestrzeni V . Jeśli dla pewnych wektorów $x, y \in V$ zachodzi równość $\varphi(x, y) = 0$, to mówimy, że wektory x i y są ortogonalne ze względu na formę φ , albo φ -ortogonalne.

Def. Parę (V, φ) , w której V jest przestrzenią liniową nad ciałem liczbowym \mathbb{K} , a φ — formą półtoraliniową w tej przestrzeni, nazywamy przestrzenią ortogonalną.

Oczywiście, wybierając różne formy półtoraliniowe w ustalonej przestrzeni V dostaniemy różne przestrzenie ortogonalne. Z twierdzenia Sylwestra wynika, że dla ustalonego wymiaru n istnieje tylko skończenie wiele (mianowicie $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$) typów przestrzeni ortogonalnych, różniących się wymiarami podprzestrzeni V_+ , V_- i V_0 , które można w nich znaleźć. Najważniejsze znaczenie w zastosowaniach praktycznych mają przestrzenie, w których macierz formy jest dodatnio określona (tzw. przestrzenie euklidesowe, w przypadku zespolonym mówi się „unitarne”), ale nie tylko. Na przykład przestrzenie Minkowskiego, dla których $\pi = n - 1$, $\nu = 1$, $\zeta = 0$, są podstawą teorii względności.

Def. Bazę przestrzeni ortogonalnej, w której forma φ jest reprezentowana przez macierz diagonalną, nazywamy bazą ortogonalną. Jeśli w szczególności wszystkie współczynniki tej macierzy są równe 1, -1 lub 0, to mamy bazę ortonormalną.

Def. Jeśli przestrzeń ortogonalna V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni V_1, \dots, V_k i jest spełniony warunek, że jeśli $i \neq j$ to dowolne wektory $x \in V_i$ i $y \in V_j$ są ortogonalne ze względu na formę φ , to mówimy, że przestrzeń V jest sumą ortogonalną podprzestrzeni V_1, \dots, V_k .

Def. Niezerowe wektory x w przestrzeni ortogonalnej V , które są miejscami zerowymi formy kwadratowej Φ , nazywają się wektorami izotropowymi. Są to wszystkie elementy jądra tej formy, ale w przypadku, gdy jest ona nieokreślona, istnieją także inne wektory izotropowe. Przykład zobaczymy na ćwiczeniach.

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że każdej formie kwadratowej w \mathbb{K}^n odpowiada jednoznacznie określona macierz symetryczna (Uwaga: *Nie należy wierzyć w zapewnienia na wykładzie, jeśli nie były udowodnione*).

Wskazówka: Udowodnij, że każdej formie dwuliniowej pierwszego rodzaju odpowiada jednoznacznie określona macierz symetryczna, a następnie powołaj się na jednoznaczność odpowiedniości między formami dwuliniowymi i kwadratowymi.

2. Znajdź macierz C taką, że jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & & \\ 2 & 5 & 2 & \\ & 2 & 5 & 2 \\ & & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

to macierz $C^H A C$ ma postać kanoniczną Sylwestra.

3. Udowodnij, że zbiór kongruencji ortogonalnych, realizowanych przez macierze C , takie że $C^{-1} = C^H$, jest podgrupą grupy kongruencji. Czy jest to podgrupa abelowa?

Udowodnij, że zbiór kongruencji realizowanych przez macierze permutacji jest podgrupą grupy kongruencji ortogonalnych. Czy jest to podgrupa właściwa?

4. Forma kwadratowa Φ w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ jest określona wzorem

$$\Phi(f) = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx.$$

Znajdź macierz tej formy w bazie $[1, x, x^2]$.

Szczególna teoria względności

5. Rzeczywista przestrzeń afiniczna E , z ortogonalną przestrzenią wektorów swobodnych V , której forma kwadratowa Φ jest taka że $\nu = 1$, $\zeta = 0$, nazywa się przestrzenią Minkowskiego, albo czasoprzestrzenią. W fizyce bada się czasoprzestrzeń czterowymiarową, my ograniczymy się do dwuwymiarowej. Jej przestrzeń wektorów swobodnych V jest sumą ortogonalną dwóch podprzestrzeni jednowymiarowych, w których forma Φ jest odpowiednio dodatnio określona i ujemnie określona.

Punkty przestrzeni E nazywają się zdarzeniami.

Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby macierz A formy Φ miała postać

kanoniczną, tj. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Współrzędne wektora $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$ określają

przemieszczenie w przestrzeni (na odległość x) i w czasie (na odległość t).

Wartość formy $\Phi(\mathbf{v})$ nazywa się interwałem czasoprzestrzennym.

Obserwator w czasoprzestrzeni E (której przestrzenią wektorów swobodnych jest przestrzeń V z formą Φ) może mierzyć przyrosty czasu (swoim zegarkiem) i przemieszczenia (swoją linijką). Szczególna teoria względności jest konsekwencją stwierdzenia, że jeśli mamy wielu obserwatorów poruszających się względem siebie, to każdy z nich między ustalonymi dwoma zdarzeniami zmierzy zawsze tę samą wartość interwału czasoprzestrzennego.

6. Pierwszy obserwator (dajmy na to, Asia) zmierzył między dwoma zdarzeniami $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$ i obliczył $\Phi(\mathbf{v}) = x^2 - t^2$. Drugi obserwator (niech będzie Basia) zmierzy między tymi samymi zdarzeniami wektor $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$ i musi dostać

$$x'^2 - t'^2 = x^2 - t^2.$$

Znajdźmy macierz kongruencji C , która nie zmienia macierzy A , tj. spełnia warunek $C^T A C = A$:

$$\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 - g^2 & ef - gh \\ ef - gh & f^2 - h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że $e^2 - g^2 = 1$, $ef - gh = 0$ i $f^2 - h^2 = -1$.

Przypuśćmy, że Asia stwierdziła, że $x = tv$, a Basia zaobserwowała $x' = 0$, $t' = ?$.

A więc Basia porusza się względem Asi z prędkością v (w STW rozpatrujemy tylko ruchy ze stałą prędkością) i oba zdarzenia zaobserwowała „w tym samym miejscu”. Zatem,

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tv \\ t \end{bmatrix}.$$

Mamy więc $ft' = tv$ oraz $ht' = t$. Dzieląc to stronami dostajemy $\frac{f}{h} = v$.

Podstawiając $f = hv$ do $f^2 - h^2 = -1$ dostajemy $h^2(v^2 - 1) = -1$, czyli $h^2 = \frac{1}{1-v^2}$.

Dalej przyjmijmy $h = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, bo w przeciwnym razie zegarki Asi i Basi chodziłyby w przeciwne strony. Mamy zatem $f = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ i dalej podobnie możemy obliczyć (proszę zrobić to osobiście) $e = h$, $g = f$. Stąd macierz kongruencji, która zależy od parametru v (prędkości ruchu Basi względem Asi) jest symetryczna:

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix}.$$

Aby ta macierz była rzeczywista i nieosobliwa, musi być $|v| < 1$.

7. Kongruencje opisane przez macierze o powyższej postaci (dla $|v| < 1$) nazywają się przekształceniami Lorentza.

Udowodnij, że zbiór przekształceń Lorentza (z działaniem złożenia) jest grupą abelową. Znajdź przy tym wzór opisujący składanie prędkości (trzeba w tym celu obliczyć współczynnik poza diagonalą iloczynu macierzy $C_w C_v$, który opisuje złożenie przekształceń opisujących ruch z prędkościami v i w).

Przekonaj się przy tym, że jeśli $|v| < 1$ i $|w| < 1$, to prędkość ruchu powstałego ze złożenia ruchów z tymi prędkościami jest co do modułu mniejsza niż 1, czyli prędkość światła.

Jeśli Basia ucieka od Asi z połową prędkości światła ($v = \frac{1}{2}$), zaś Cesia tak samo ucieka przed Basią, to jaką prędkością Cesia oddala się od Asi?

8. Wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ są wektorami izotropowymi. Każdy z nich opisuje ruch z prędkością światła (w jedną lub drugą stronę). Udowodnij, że jeśli coś porusza się z prędkością światła względem pewnego obserwatora, to ma też tę samą prędkość ruchu względem każdego innego obserwatora.

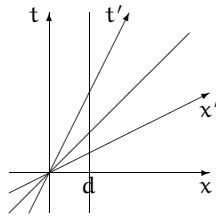
9. Asia zauważyła pewne zdarzenia (punkty czasoprzestrzeni) odległe od siebie o wektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$ (a więc zaobserwowała je jednocześnie).

Basia zobaczyła te same zdarzenia, które jej zdaniem różniły się o wektor

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/\sqrt{1-v^2} \\ -dv/\sqrt{1-v^2} \end{bmatrix},$$

a więc zaobserwowała je w różnych chwilach.

Przypuśćmy, że obserwatorzy mają do czynienia ze zjawiskami trwającymi w czasie. Asia zwraca uwagę na proste $x = 0$ i $x = d$ (tj. Asia obserwuje „dwa nieruchome punkty”). Basia jednocześnie ze zdarzeniem $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ zaobserwuje zdarzenie, którego współrzędnymi w układzie Asi są liczby d i d/v . Interwał czasoprzestrzenny tych zdarzeń jest równy $\Phi\left(\begin{bmatrix} d \\ d/v \end{bmatrix}\right) = d^2(1-v^2)$. Ale Basia „te dwa punkty” też obserwuje cały czas, widząc jak poruszają się względem niej,



pozostając w stałej odległości od siebie. Tak więc odległość „tych samych” punktów zmierzona przez Basię jest równa $d\sqrt{1-v^2}$, czyli jest mniejsza.

Zjawisko to nazywa się relatywistycznym skróceniem długości. Kiedy dwaj obserwatorzy mijają się, każdy z nich uważa, że to ten drugi jest krótszy.

10. Asia i Basia są bliźniaczkami w tym samym wieku. Asia obserwuje, jak Basia wyrusza w drogę, podróżuje w jedną stronę przez czas $t/2$, i natychmiast po osiągnięciu celu podróży zawraca i przez drugie tyle samo czasu wraca z tą samą prędkością v .

Dla Asi zdarzenie, którym było zawrócenie Basi z drogi, ma współrzędne $vt/2$ i $t/2$. Basia zawróciła w punkcie (zdaniem Basi)

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} vt/2 \\ t/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{1-v^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -v^2t + t \end{bmatrix},$$

a więc do tego momentu upłynęło jej $t\sqrt{1-v^2}/2$ czasu. Droga powrotna zajęła Basi tyle samo, a więc cała wyprawa trwała $t' = t\sqrt{1-v^2}$ czasu zmierzonego przez jej zegarek.

Tak więc po powrocie Basia jest młodsza od siostry. Wniosek: Należy jak najczęściej podróżować, wtedy człowiek wolniej się starzeje. Można też szybko spacerować po (nawet niewielkim) pomieszczeniu w tę i z powrotem (to wyjaśnia dosyć rozpowszechniony zwyczaj spacerowania po celi).

Równania drugiego stopnia

Zbiory algebraiczne

Def. Podzbiór A przestrzeni \mathbb{K}^n nazywamy zbiorem algebraicznym, jeśli istnieje układ wielomianów n zmiennych, p_1, \dots, p_k , taki że $\mathbf{x} \in A$ wtedy i tylko wtedy gdy $p_i(\mathbf{x}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$.

Zbiory algebraiczne możemy określić w dowolnej przestrzeni liniowej lub afinicznej, wybierając odpowiedni (kartezjański) układ współrzędnych i żądając, aby współrzędne punktów spełniały pewne równania. Jest oczywiste, że reprezentowanie zbiorów algebraicznych za pomocą wielomianów nie jest jednoznaczne. Nie każdy zbiór jest algebraiczny, np. kula (w sensie dowolnej normy) zbiorem algebraicznym nie jest.

Skończona suma (teoriomnogościowa), a także przecięcie zbiorów algebraicznych jest zbiorem algebraicznym. Zauważmy też, że każdy zbiór jednopunktowy jest algebraiczny. Tak więc każdy zbiór skończony jest algebraiczny.

Def. Stopniem zbioru algebraicznego A nazywamy najmniejszą liczbę, którą można otrzymać wybierając pewien układ wielomianów reprezentujących ten zbiór i obliczając iloczyn stopni tych wielomianów.

Jedynym zbiorem algebraicznym stopnia 0 jest zbiór pusty. Ponieważ miejsca zerowe wielomianów stopnia 1 spełniają równania liniowe, więc zbiory algebraiczne stopnia 1 to warstwy przestrzeni \mathbb{K}^n (albo, jeśli traktujemy przestrzeń \mathbb{K}^n jak afiniczną, to zbiorami algebraicznymi stopnia 1 są jej podprzestrzenie afiniczne).

Równania drugiego stopnia

Zbadamy zbiory algebraiczne drugiego stopnia w przestrzeni \mathbb{R}^n , traktując ją jak przestrzeń afiniczną, tj. rezerwując sobie możliwość dowolnego wybierania układu współrzędnych kartezjańskich (w szczególności o początku w dowolnym punkcie).

Wystarczy zająć się zbiorami, które są miejscami zerowymi jednego wielomianu drugiego stopnia. Jeśli mamy do tego jakieś równania liniowe, to z ich pomocą możemy wyeliminować niektóre zmienne, otrzymując równanie drugiego stopnia zbioru w przestrzeni o mniejszym wymiarze. Przekonamy się, że każde równanie drugiego stopnia w przestrzeni \mathbb{R}^n możemy, przez odpowiednią zamianę zmiennych, przedstawić w „najprostszej” postaci.

Dowolny wielomian drugiego stopnia możemy przedstawić w postaci macierzowej:

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c.$$

Wielomian p jest tu sumą formy kwadratowej i wielomianu pierwszego stopnia. Bez straty ogólności, macierz formy jest symetryczna, przy czym założymy, że nie jest to macierz zerowa (bo wtedy mielibyśmy równanie liniowe). Ten sam wielomian możemy przedstawić w postaci jednorodnej:

$$p(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stosowanie jednego lub drugiego zapisu jest kwestią wygody. Zbadamy kolejne kroki (polegające na zamianie zmiennych), jakie prowadzą do otrzymania „najprostszej” postaci równania $p(\mathbf{x}) = 0$, którą nazwiemy postacią kanoniczną.

Pierwszy krok jest przekształceniem liniowym, dzięki któremu zamiast macierzy symetrycznej A otrzymamy macierz diagonalną D ze współczynnikami diagonalnymi 1, -1 i 0. Na podstawie twierdzenia Sylwestra istnieje taka macierz nieosobliwa C , że $C^T A C = D$. Mamy zatem

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C^{-T} D C^{-1} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T C C^{-1} \mathbf{x} + c = \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' + 2\mathbf{b}'^T \mathbf{x}' + c,$$

gdzie $\mathbf{b}' = C^T \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{x}' = C^{-1} \mathbf{x}$. Uwaga: Symbol „'” *nie jest* w tym wykładzie symbolem pochodnej.

Możemy założyć, że liczba diagonalnych współczynników macierzy D równych 1, tj. π , jest nie mniejsza niż liczba współczynników -1 . Jeśli bowiem $\pi < \nu$, to zajmiemy się równaniem $-p(\mathbf{x}) = 0$, które ma ten sam zbiór rozwiązań.

W kroku drugim przypuścimy najpierw, że układ równań liniowych $D\mathbf{t} = -\mathbf{b}'$ z niewiadomym wektorem \mathbf{t} jest niesprzeczny. Możemy zatem wziąć dowolne jego rozwiązanie \mathbf{t} i podstawiając $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{t}$, otrzymać

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}'' + \mathbf{t})^T D (\mathbf{x}'' + \mathbf{t}) + 2\mathbf{b}'^T (\mathbf{x}'' + \mathbf{t}) + c = \\ &= \mathbf{x}''^T D \mathbf{x}'' + 2(D\mathbf{t})^T \mathbf{x}'' + 2\mathbf{b}'^T \mathbf{x}'' + \mathbf{t}^T D \mathbf{t} + 2\mathbf{b}'^T \mathbf{t} + c = \\ &= \mathbf{x}''^T D \mathbf{x}'' + c'', \end{aligned}$$

gdzie $c'' = -\mathbf{t}^T D \mathbf{t} + c$. W ten sposób „pozbyliśmy się” liniowego składnika wielomianu p .

Zanim poddamy równanie dalszym przekształceniom, zauważmy, że jeśli dla pewnego wektora \mathbf{y} zachodzi równość $\mathbf{y}^T D \mathbf{y} + c'' = 0$, to również $(-\mathbf{y})^T D (-\mathbf{y}) + c'' = 0$. Punkt 0 jest więc środkiem symetrii zbioru rozwiązań

równania $\mathbf{y}^T D \mathbf{y} + c'' = 0$, skąd wnioskujemy, że punkt \mathbf{t} jest środkiem symetrii zbioru rozwiązań równania $\mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' + 2\mathbf{b}'^T \mathbf{x}' + c = 0$ (z niewiadomym wektorem \mathbf{x}'). Zbiór rozwiązań równania $p(\mathbf{x}) = 0$ ma środek symetrii w punkcie $\mathbf{s} = C\mathbf{t}$. Dalej przekonamy się, że nie ma innych środków symetrii, a zatem zbiór środków symetrii dowolnego zbioru algebraicznego drugiego stopnia jest warstwą (albo podprzestrzenią afiniczną) przestrzeni \mathbb{R}^n , albo jest pusty.

Jeśli udało się przedstawić wielomian p w postaci $\mathbf{x}''^T D \mathbf{x}'' + c''$, to możliwe są dwa przypadki: może być $c'' = 0$ albo $c'' \neq 0$. Jeśli $c'' = 0$, to mamy już postać kanoniczną, która w rozwiniętej postaci wygląda tak:

$$y_1^2 + \dots + y_\pi^2 - y_{\pi+1}^2 - \dots - y_{\pi+\nu}^2 = 0$$

(symbole y_1, \dots, y_n oznaczają teraz zmienne, które są współrzędnymi w układzie, w którym ostatecznie przedstawiliśmy nasze równanie). Jeśli $c'' \neq 0$, to po podstawieniu $\mathbf{x}'' = \sqrt{|c''|} \mathbf{x}'''$ otrzymamy wielomian $|c''|(\mathbf{x}'''^T D \mathbf{x}''' \pm 1)$, który możemy podzielić przez $|c''|$ i otrzymać wielomian o tych samych miejscach zerowych. Postać kanoniczna równania otrzymana w tym przypadku wygląda następująco:

$$y_1^2 + \dots + y_\pi^2 - y_{\pi+1}^2 - \dots - y_{\pi+\nu}^2 \pm 1 = 0.$$

Pozostał do zbadania przypadek, gdy układ równań $D\mathbf{t} = -\mathbf{b}'$ jest sprzeczny (czyli, jak się przekonamy, gdy zbiór rozwiązań nie ma środka symetrii). Wektor \mathbf{b}' możemy przedstawić w postaci sumy dwóch wektorów, $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ i \mathbf{b}_2 , takich że $\mathbf{b}_1 \in \ker D$ i $\mathbf{b}_2 \in \text{im } D$. Wektory te spełniają warunek $\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_2 = 0$.

Uwaga: W pierwszym semestrze (str. 4.4) udowodniliśmy takie twierdzenie: dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ jest $\ker A \oplus \text{im } A^H = \mathbb{C}^n$ oraz $\text{im } A \oplus \ker A^H = \mathbb{C}^m$. W przypadku, gdy macierz A jest rzeczywista i symetryczna, wynika stąd $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \text{im } A$. Szczególnie łatwo jest to widoczne dla macierzy diagonalnej, z jaką mamy teraz do czynienia.

Pierwsze $\pi + \nu = \text{rank } D$ współczynników wektora \mathbf{b}_1 to zera, a pozostałe są odpowiednimi współczynnikami wektora \mathbf{b}' . Wektor \mathbf{b}_2 otrzymamy zamieniając na zera ostatnie $\zeta = n - \text{rank } D$ współczynników wektora \mathbf{b}' . Układ równań $D\mathbf{t} = -\mathbf{b}_2$ jest niesprzeczny i istnieje (być może więcej niż jedno) jego rozwiązanie \mathbf{t} spełniające warunek $\mathbf{b}_1^T \mathbf{t} = 0$. Za pomocą takiego rozwiązania określimy wektor \mathbf{x}'' , taki że $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{t} + s\mathbf{b}_1$; parametr s dobierzemy za chwilę. Liczymy

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}'' + \mathbf{t} + s\mathbf{b}_1)^T D (\mathbf{x}'' + \mathbf{t} + s\mathbf{b}_1) + 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^T (\mathbf{x}'' + \mathbf{t} + s\mathbf{b}_1) + c = \\ &= \mathbf{x}''^T D \mathbf{x}'' + 2\mathbf{t}^T D \mathbf{x}'' + 2\mathbf{b}_2^T \mathbf{x}'' + \mathbf{t}^T D \mathbf{t} + 2\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}'' + 2\mathbf{b}_2^T \mathbf{t} + 2s\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 + c = \\ &= \mathbf{x}''^T D \mathbf{x}'' + 2\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}'' + (c - \mathbf{t}^T D \mathbf{t} + 2s\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1). \end{aligned}$$

Podstawiając $s = (\mathbf{t}^T D \mathbf{t} - c) / (2\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1)$ dostajemy

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}''^T D \mathbf{x}'' + 2\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}'' ,$$

a zatem „pozbywamy się” wyrazu wolnego.

Niech E oznacza macierz $n \times n$, $E = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\pi+\nu}, 2\mathbf{b}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_\zeta]$, której początkowe kolumny są kolumnami macierzy jednostkowej, dalej mamy wektor $2\mathbf{b}_1$, a po nim wektory $\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_\zeta$ wybrane spośród wektorów $\mathbf{e}_{\pi+\nu+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ tak, aby macierz E była nieosobliwa. Podstawiając $\mathbf{x}''' = E^{-T} \mathbf{x}''$ otrzymamy

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'''^T E^{-1} D E^{-T} \mathbf{x}''' + 2\mathbf{b}_1^T E^{-T} \mathbf{x}''' .$$

Macierz E skonstruowana w opisany wyżej sposób spełnia następujące warunki: $E^{-1} D E^{-T} = D$ oraz $E^{-1} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\pi+\nu+1}$. Dlatego po tym podstawieniu mamy

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'''^T D \mathbf{x}''' + \mathbf{e}_{\pi+\nu+1}^T \mathbf{x}''' .$$

To jest właśnie trzecia postać kanoniczna wielomianu drugiego stopnia:

$$y_1^2 + \dots + y_\pi^2 - y_{\pi+1}^2 - \dots - y_{\pi+\nu}^2 + y_{\pi+\nu+1} = 0.$$

(zmienne y_i są współrzędnymi wektora \mathbf{x}'''). Zbiór rozwiązań powyższego równania jest niepusty (bo jego elementem jest wektor zerowy). Dowód, że zbiór rozwiązań równania $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$, takiego że układ $A\mathbf{s} = -\mathbf{b}$ jest sprzeczny (czyli każdego równania drugiego stopnia, które można przez afiniczne przekształcenie wektora niewiadomych sprowadzić do tej postaci), nie ma środka symetrii jest umiarkowanie trudny i pozostawiam go na ćwiczenia.

Rachunki przeprowadzone wyżej są z jednej strony procedurą sprowadzania równań do postaci kanonicznej, z drugiej zaś są dowodem poniższego twierdzenia.

Twierdzenie: Dowolne równanie drugiego stopnia n niewiadomych o współczynnikach rzeczywistych może być, poprzez odpowiednie afiniczne przekształcenie wektora niewiadomych, przedstawione w jednej (i tylko jednej) z trzech tzw. afinicznych postaci kanonicznych:

$$\begin{aligned} y_1^2 + \dots + y_\pi^2 - y_{\pi+1}^2 - \dots - y_{\pi+\nu}^2 &= 0, \\ y_1^2 + \dots + y_\pi^2 - y_{\pi+1}^2 - \dots - y_{\pi+\nu}^2 \pm 1 &= 0, \\ y_1^2 + \dots + y_\pi^2 - y_{\pi+1}^2 - \dots - y_{\pi+\nu}^2 + y_{\pi+\nu+1} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym $\pi \geq \nu$. W ogólności może istnieć więcej niż jedno przekształcenie sprowadzające dane równanie do którejś z tych postaci, ale liczby π i ν są zawsze takie same.

Klasyfikacja zbiorów stopnia 2 w płaszczyźnie

Ponieważ każde równanie dwóch zmiennych 2-go stopnia ma jedną ze skończenie wielu postaci kanonicznych, określenie czym jest zbiór rozwiązań sprowadza się do odpowiedniego nazwania zbioru rozwiązań równania w postaci kanonicznej. Dowlone dwa równania o tej samej postaci kanonicznej mają zbiory rozwiązań identyczne z dokładnością to podobieństwa afinicznego. Mamy zatem takie przypadki (symbole x i y oznaczają niewiadome):

$x^2 = 0$:	Zbiorem rozwiązań jest prosta $x = 0$.
$x^2 + y^2 = 0$:	Zbiór jednopunktowy, $x = y = 0$.
$x^2 - y^2 = 0$:	Dwie proste, o równaniach $x + y = 0$ i $x - y = 0$.
$x^2 - 1 = 0$:	Dwie proste równoległe, $x = 1$ i $x = -1$.
$x^2 + 1 = 0$:	Zbiór pusty.
$x^2 + y^2 + 1 = 0$:	Zbiór tym bardziej pusty.
$x^2 - y^2 + 1 = 0$:	Hiperbola.
$x^2 + y^2 - 1 = 0$:	Elipsa.
$x^2 + y = 0$:	Parabola.

Klasyfikacja zbiorów stopnia 2 w przestrzeni trójwymiarowej

$x^2 = 0$:	Płaszczyzna $x = 0$.
$x^2 + y^2 = 0$:	Prosta $x = y = 0$.
$x^2 - y^2 = 0$:	Dwie płaszczyzny, o równaniach $x + y = 0$ i $x - y = 0$.
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$:	Zbiór jednopunktowy, $x = y = z = 0$.
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$:	Stożek.
$x^2 - 1 = 0$:	Dwie płaszczyzny równoległe, $x = 1$ i $x = -1$.
$x^2 + 1 = 0$:	Zbiór pusty.
$x^2 + y^2 + 1 = 0$:	Zbiór jak wyżej pusty.
$x^2 - y^2 + 1 = 0$:	Walec hiperboliczny.
$x^2 + y^2 - 1 = 0$:	Walec eliptyczny.
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$:	Zbir pusty.
$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$:	Hiperboloida dwupowłokowa.
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$:	Hiperboloida jednopowłokowa.
$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$:	Elipsoida.
$x^2 + y = 0$:	Walec paraboliczny.
$x^2 + y^2 + z = 0$:	Paraboloida eliptyczna.
$x^2 - y^2 + z = 0$:	Paraboloida hiperboliczna.

Powierzchnie drugiego stopnia, tj. elipsoida, stożek, walce, paraboloidy i hiperboloidy są nazywane kwadrykami.

Zbiory prostokreślne

Def. Zbiór S rozwiązań równania drugiego stopnia nazywa się zbiorem prostokreślnym, jeśli każdy jego punkt leży na pewnej prostej afinicznej, która jest zawarta w zbiorze S .

Na przykład zbiór rozwiązań równania $x^2 - y^2 = 0$ na płaszczyźnie jest zbiorem prostokreślnym, ponieważ składa się on z dwóch prostych. Nie jest zbiorem prostokreślnym elipsa, tj. zbiór rozwiązań równania $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Znacznie ciekawiej to wygląda w przypadku zbiorów rozwiązań równań z trzema niewiadomymi. My spróbujmy rozwiązać w przypadku ogólnym (dla równań z dowolną liczbą niewiadomych) następujący problem: mając dane równanie, należy stwierdzić, czy jego zbiór rozwiązań S jest prostokreślny i jeśli tak, to znaleźć wszystkie proste przechodzące przez dowolny punkt $\mathbf{x}_0 \in S$, zawarte w zbiorze S .

Niech $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$. Jeśli $p(\mathbf{x}_0) = 0$, to dowolny punkt $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, taki że $p(\mathbf{x}) = 0$, jest rozwiązaniem równania

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{A} \mathbf{x}' + 2\mathbf{b}'^T \mathbf{x}' = 0.$$

Jeśli $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$, to mamy równanie $\mathbf{x}'^T \mathbf{A} \mathbf{x}' = 0$, którego rozwiązaniem jest każdy wektor izotropowy formy kwadratowej reprezentowanej przez macierz \mathbf{A} .

Jeśli $\mathbf{b}' \neq \mathbf{0}$, to dowolny wektor $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ możemy (jednoznacznie) przedstawić w postaci sumy: $\mathbf{x}' = d\mathbf{b}' + \mathbf{z}$, dla pewnego wektora \mathbf{z} spełniającego warunek $\mathbf{b}'^T \mathbf{z} = 0$ (dowód na ćwiczeniach). Podstawiając tę sumę, otrzymujemy

$$p(\mathbf{x}) = p'(\mathbf{x}') = (d\mathbf{b}' + \mathbf{z})^T \mathbf{A} (d\mathbf{b}' + \mathbf{z}) + 2\mathbf{b}'^T (d\mathbf{b}' + \mathbf{z}) = d^2 \mathbf{b}'^T \mathbf{A} \mathbf{b}' + 2d\mathbf{b}'^T \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} + 2d\mathbf{b}'^T \mathbf{b}'.$$

Jeśli powyższe wyrażenie ma wartość 0 dla pewnego wektora $\mathbf{x}' = d\mathbf{b}' + \mathbf{z}$, to chcemy, aby było $p'(e\mathbf{x}') = 0$ dla każdego $e \in \mathbb{R}$. Ponieważ jednak $\mathbf{b}'^T \mathbf{b}' \neq 0$, więc musimy przyjąć $d = 0$. Istnieje niezależny liniowo układ wektorów $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n-1}$, taki że $\mathbf{b}'^T \mathbf{z}_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n-1$ (sposób znalezienia takich wektorów będzie tematem dalszych wykładów). Możemy więc przyjąć $\mathbf{x}' = \mathbf{Z} \mathbf{y}$, gdzie macierz $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n, n-1}$ jest kolumnowo regularna. Ponieważ $\mathbf{b}'^T \mathbf{z} = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, więc

$$p'(\mathbf{Z} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}) \mathbf{y}.$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie jednorodne $p'(\mathbf{Z} \mathbf{y}) = 0$, którego rozwiązania określają kierunki prostych zawartych w zbiorze rozwiązań równania $p(\mathbf{x}) = 0$,

przechodzących przez punkt x_0 . Wektory y spełniające to równanie są wektorami izotropowymi formy kwadratowej reprezentowanej przez macierz $Z^T A Z \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$.

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że punkt s spełniający układ równań $As = -b$ jest środkiem symetrii zbioru rozwiązań równania $x^T A x + 2b^T x + c = 0$.

Wykaż, że niesprzeczność układu równań $As = -b$ jest równoważna niesprzeczności układu $Dt = -b'$, gdzie $D = C^T A C$, $b' = C^T b$, dla dowolnej macierzy nieosobliwej C . Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia środka symetrii zbioru rozwiązań równania drugiego stopnia jest więc niesprzeczność dowolnego z tych układów.

2. Udowodnij, że zbiór rozwiązań równania $x^T A x + 2b^T x + c = 0$, takiego że układ równań liniowych $As = -b$ jest sprzeczny, nie ma środka symetrii.

Wskazówka: Uzasadnij, że wystarczy zrobić to dla macierzy A w postaci kanonicznej. Udowodnij, że jeśli układ z taką macierzą jest sprzeczny, to punkt 0 nie jest środkiem symetrii zbioru rozwiązań równania $x^T A x + 2b^T x + c = 0$.

3. Oblicz, ile różnych rodzajów zbiorów drugiego stopnia (tj. zbiorów rozwiązań równań drugiego stopnia) w sensie klasyfikacji afinicznej jest w przestrzeni \mathbb{R}^n dla dowolnego n .

Podaj ile jest w tej klasyfikacji rodzajów zbiorów, które mają środki symetrii.

Uwaga: Zbiór pusty jest zbiorem rozwiązań więcej niż jednego równania w postaci kanonicznej.

4. Znajdź wzory, które dla ustalonych wektorów $b \neq 0$ i x umożliwiają obliczenie wektora z i liczby d , takich że $x = db + z$ oraz $b^T z = 0$.
5. Znajdź postać kanoniczną D macierzy trójdzielnej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napisz macierz kongruencji R , takiej że $D = R^T A R$.

6. Zapisz w postaci macierzowej, a następnie sprowadź do postaci kanonicznej równania

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$,

b) $x^2 + 2xy - 2yz - z^2 + x - z = 0$.

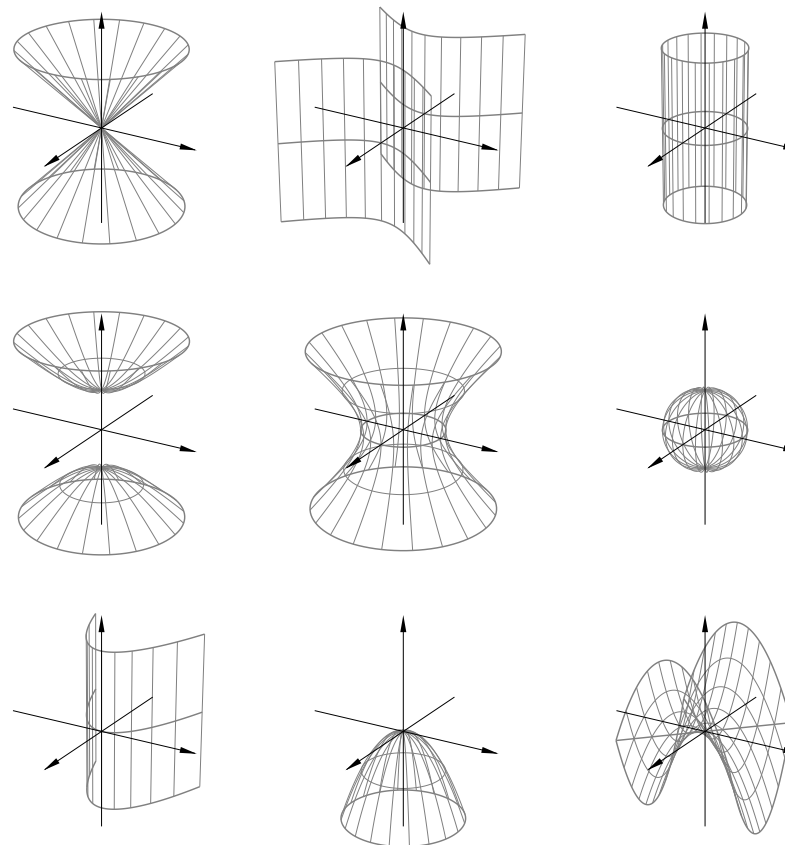
Zidentyfikuj zbiory rozwiązań tych równań.

7. Zidentyfikuj zbiory rozwiązań równania

$$x^2 + ay^2 + (a-2)z^2 + (1-a)^2 = 0$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

8. Zidentyfikuj (tj. dobierz odpowiednie nazwy i równania) powierzchnie drugiego stopnia, których fragmenty są przedstawione na rysunku.



9. Które spośród kwadryk (powierzchni drugiego stopnia w przestrzeni trójwymiarowej) są prostokreślne?

Ile prostych zawartych w takiej powierzchni przechodzi przez każdy jej punkt?

10. Wskaż zbiór środków symetrii każdej z kwadryk.

11. Znajdź wszystkie proste zawarte w zbiorze rozwiązań równania

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

przechodzące przez punkt $[1, 2, 2]^T$.

Przestrzenie euklidesowe i unitarne

Macierze dodatnio określone

Pojęcia macierzy dodatnio, nieujemnie, ujemnie i niedodatnio określonej, a także macierzy nieokreślonej, wiążą się z formami kwadratowymi reprezentowanymi przez te macierze. I tak np. macierz hermitowska (czyli symetryczna w przypadku rzeczywistym) $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest dodatnio określona, jeśli dla każdego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, jest spełniona nierówność

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0.$$

Często symbolicznie zapisuje się to tak: $A > 0$, ale uwaga: niech to się nikomu nie myli z napisami takimi jak $A > B$, oznaczającymi relację częściowego porządku między macierzami A i B (ta relacja pojawiła się w wykładach w pierwszym semestrze).

Twierdzenie (kryterium Sylwestra): Niech $A^{(k)}$ oznacza macierz o wymiarach $k \times k$, która jest blokiem macierzy hermitowskiej A o wymiarach $n \times n$, powstałym przez odrzucenie końcowych $n - k$ kolumn i wierszy. Macierz A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy $\det A^{(k)} > 0$ dla $k = 1, \dots, n$.
Dowód: Jest oczywiste, że warunek $A^{(k)} > 0$ dla $k = 1, \dots, n - 1$ jest konieczny dla dodatniej określoności macierzy $A = A^{(n)}$. Istotnie, gdyby było inaczej, tj. gdyby istniał wektor $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^k$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, taki że $\mathbf{y}^H A^{(k)} \mathbf{y} \leq 0$, to dla wektora \mathbf{x} otrzymanego przez dopisanie $n - k$ zer do wektora \mathbf{y} mielibyśmy $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^H A^{(k)} \mathbf{y} \leq 0$.

Dla macierzy dodatnio określonej $A^{(k)}$ istnieje macierz nieosobliwa C_k , taka że $C_k^H A^{(k)} C_k = I_k$. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego mamy $|\det C_k|^2 \det A^{(k)} = 1$, skąd wynika nierówność $\det A^{(k)} > 0$. Zatem wyznaczniki wszystkich macierzy $A^{(k)}$ otrzymanych z macierzy dodatnio określonej A są dodatnie.

Należy jeszcze dowieść, że spełnienie nierówności $\det A^{(k)} > 0$ dla $k = 1, \dots, n$ jest warunkiem dostatecznym dodatniej określoności macierzy A . Udowodnimy to indukcyjnie. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, założmy więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich macierzy hermitowskich o wymiarach mniejszych niż $n \times n$. Macierz A przedstawimy w postaci blokowej,

$$A = \begin{bmatrix} A^{(n-1)} & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^H & a_{nn} \end{bmatrix}$$

i założymy, że $\det A^{(k)} > 0$ dla $k = 1, \dots, n$. Stąd i z założenia indukcyjnego

wynika, że macierz $A^{(n-1)}$ jest dodatnio określona. Kongruencja o macierzy

$$R = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -(A^{(n-1)})^{-1} \mathbf{g} \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{bmatrix}$$

sprowadza macierz A do postaci blokowo-diagonalnej (zobacz dowód macierzowego twierdzenia Sylwestra):

$$A' = R^H A R = \begin{bmatrix} A^{(n-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^H & a'_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } a'_{nn} = a_{nn} - \mathbf{g}^H (A^{(n-1)})^{-1} \mathbf{g}.$$

Wyznacznik macierzy R jest równy 1, a zatem $\det A' = \det A > 0$. Ponieważ $\det A^{(n-1)} > 0$, więc musi być $a'_{nn} > 0$. Dlatego dla dowolnego wektora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_n \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ mamy $\mathbf{x}^H A' \mathbf{x} = \mathbf{y}^H A^{(n-1)} \mathbf{y} + |y_n|^2 a'_{nn} > 0$, a zatem macierz A' , czyli także macierz A , która jest macierzą przystającą do A' , jest dodatnio określona. \square

Iloczynny skalarne

Def. Niech V oznacza rzeczywistą lub zespoloną przestrzeń liniową. Forma dwuliniowa (albo półtoraliniowa) φ , taka że odpowiednia forma kwadratowa Φ jest dodatnio określona, nazywa się iloczynem skalarnym w przestrzeni V . Przestrzeń V z iloczynem skalarnym φ w przypadku rzeczywistym nazywa się przestrzenią euklidesową, a w przypadku zespolonym przestrzenią unitarną.

Dalej w przypadku gdy forma φ jest iloczynem skalarnym, zamiast pisać $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ będziemy używać krótszej notacji $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Liniowa przestrzeń euklidesowa lub unitarna jest więc szczególnym przypadkiem przestrzeni ortogonalnej. Przy okazji zdefiniujemy najważniejsze (niewątpliwie) pojęcie geometrii:

Def. Przestrzeń afiniczna E , której przestrzeń wektorów swobodnych V jest euklidesowa, nazywa się przestrzenią afiniczną euklidesową.

W poprzednich wykładach pojawiło się wiele faktów mających bezpośredni związek z iloczynami skalarnymi. Możemy je teraz zebrać i dokonać ponownej interpretacji.

- Dla dowolnego iloczynu skalarnego w przestrzeni V o wymiarze n istnieje baza $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, taka że macierz iloczynu skalarnego w tej bazie jest jednostkowa. Zatem jeśli wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} reprezentujemy za pomocą kolumnowych macierzy współczynników w bazie X , odpowiednio \mathbf{a} i $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ (czyli $\mathbf{x} = X\mathbf{a}$ i $\mathbf{y} = X\mathbf{b}$), to

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{b}^H \mathbf{a}.$$

- W pierwszym semestrze udowodniliśmy następującą nierówność Schwarz: dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ (gdzie \mathbb{K} oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych) jest $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$, gdzie $\|\mathbf{x}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}$. Udowodnimy ponownie tę nierówność dla wektorów w *dowolnej* przestrzeni euklidesowej lub unitarnej:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Dowód: Jeśli istnieje liczba α , taka że $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$ lub $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$, to oczywiście zachodzi równość $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$. Wystarczy zatem zbadać przypadek, gdy wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są liniowo niezależne. Wtedy rozpinają one przestrzeń dwuwymiarową, w której naszym iloczynowi skalarnemu odpowiada macierz

$$A = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{bmatrix}.$$

Na podstawie kryterium Sylwestra $\det A > 0$, czyli $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$. \square

- Funkcja $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ dla dowolnego ustalonego iloczynu skalarnego ma następujące własności: jest dodatnia dla każdego wektora $\mathbf{x} \in V$ z wyjątkiem $\mathbf{0}$, jest półliniowa, tj. $f(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha| f(\mathbf{x})$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{K}$, $\mathbf{x} \in V$ i spełnia nierówność trójkąta: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Ten ostatni warunek wynika z nierówności Schwarz (dowód — ćwiczenie). Dlatego funkcja f jest normą i zamiast oznaczenia literowego będziemy pisać

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Przestrzeń liniowa euklidesowa lub unitarna jest więc przestrzenią unormowaną. Oczywiście, przyjmując różne iloczyny skalarne w ustalonej przestrzeni V (lub w innej przestrzeni o tym samym wymiarze) otrzymamy różne przestrzenie unormowane, ale wszystkie te przestrzenie są izomorficzne, a przy tym dla każdego iloczynu skalarnego istnieje baza (a nawet wiele baz), w której macierz tego iloczynu jest jednostkowa; jeśli pewien fakt wyrażalny za pomocą iloczynu skalarnego jest prawdziwy w jednej z tych przestrzeni, to ma on miejsce również we wszystkich pozostałych.

Norma przestrzeni \mathbb{K}^n dana wzorem $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}$, o której wspomniałem, że bywa nazywana normą euklidesową, jest w szczególności związana z iloczynem skalarnym, którego macierz w bazie $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jest jednostkowa.

- Dowolna norma w przestrzeni liniowej V określa metrykę w tej przestrzeni, za pomocą wzoru $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Podobnie określamy metrykę w przestrzeni afinicznej E , której przestrzenią wektorów swobodnych jest V . W szczególności może to być metryka euklidesowa, jeśli zastosowana norma jest związana z iloczynem skalarnym. W związku z tą metryką będziemy używać określeń długość wektora \mathbf{x} oraz długość odcinka $\overline{\mathbf{ab}}$ (która jest odległością punktów \mathbf{a} i \mathbf{b} , czyli długością wektora $\mathbf{a} - \mathbf{b}$).

W pewnych zastosowaniach konieczne jest użycie różnych iloczynów skalarnych w tej samej przestrzeni liniowej (na przykład w celu szacowania normy pewnego wektora przez inną normę tego wektora) i wtedy spotyka się oznaczenia w rodzaju $\|\mathbf{x}\|_a = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_a}$, które mają na celu identyfikację użytych iloczynów skalarnych i norm. Zauważmy, że pojęcie długości wektora jest związane z konkretnym iloczynem skalarnym, i w szczególności w przestrzeni o wymiarze większym niż 1 istnieją wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} oraz iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$, takie że $\|\mathbf{x}\|_a = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_a} < \|\mathbf{y}\|_a = \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_a}$ oraz $\|\mathbf{x}\|_b = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_b} > \|\mathbf{y}\|_b = \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_b}$.

Izometrie przestrzeni euklidesowych i unitarnych

Def. Dowolne przekształcenie f przestrzeni metrycznych $X_1 \rightarrow X_2$ nazywa się zanurzeniem izometrycznym, jeśli dla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X_1$ jest $\rho_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \rho_2(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}))$, tj. odległość każdych dwóch punktów jest niezmiennikiem przekształcenia f . Jeśli istnieje przekształcenie odwrotne do zanurzenia izometrycznego f , to przekształcenie to (a także jego odwrotność) nazywa się izometrią przestrzeni X_1 i X_2 .

Twierdzenie: Niech f oznacza przekształcenie liniowe przestrzeni euklidesowej lub unitarnej V_1 na przestrzeń euklidesową lub unitarną V_2 . Przekształcenie f jest zanurzeniem izometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje iloczyn skalarny, tj. dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ zachodzi równość $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle_2$.

Dowód: Jeśli iloczyn skalarny wektorów jest niezmiennikiem przekształcenia f , to dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ jest

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_1} = \sqrt{\langle f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \rangle_2} = \\ &= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \rho_2(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})), \end{aligned}$$

a zatem przekształcenie f jest zanurzeniem izometrycznym. Z drugiej strony, jeśli f jest zanurzeniem izometrycznym, czyli zachowuje normę każdego wektora, to fakt, że zachowuje również iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów wynika z tożsamości polaryzacyjnej. \square

Jeśli wymiary przestrzeni V_1 i V_2 są skończone, to przekształcenie odwrotne do liniowego przekształcenia f istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wymiary przestrzeni są równe. W tym przypadku zanurzenie izometryczne f jest izometrią.

Pojęcia kąta

Def. Wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są prostopadłe (w sensie ustalonego iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$) jeśli $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Prostopadłość wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} będziemy zapisywać symbolicznie $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Twierdzenie Pitagorasa:

- Jeśli wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są prostopadłe, to $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
- Jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są parami prostopadłe, to $\|\sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i\|^2 = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i\|^2$.

Dowód tego twierdzenia, jako oczywisty, pominię (należy umieć go przeprowadzić).

Def. Podprzestrzenie V_1 i V_2 przestrzeni euklidesowej (lub unitarnej) V są prostopadłe jeśli $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{x} \in V_1$ oraz $\mathbf{y} \in V_2$.

Def. Niech \mathbf{x} i \mathbf{y} będą niezerowymi wektorami w przestrzeni euklidesowej V . Na podstawie nierówności Schwarz'a liczba c , taka że $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, spełnia warunek $|c| \leq 1$. Dlatego istnieje liczba rzeczywista $\alpha \in [0, \pi]$, taka że $c = \cos \alpha$. Liczbę tę nazywamy miarą kąta niezorientowanego między wektorami \mathbf{x} i \mathbf{y} . Oznaczać ją będziemy symbolem $\text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Jest oczywiste, że zawsze $\text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{arc}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, a ponadto dla dowolnych liczb dodatnich a, b , $\text{arc}(a\mathbf{x}, b\mathbf{y}) = \text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Łatwo jest dowieść, że miara kąta między wektorami jest niezmiennikiem każdej izometrii. Można też dowieść, że jeśli dla pewnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ zachodzi równość $\text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{arc}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, to istnieje taka izometria f oraz liczby dodatnie a i b , że $\mathbf{u} = a\mathbf{f}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{v} = b\mathbf{f}(\mathbf{y})$. Na tej podstawie można zdefiniować pojęcie kąta niezorientowanego przy użyciu zasady abstrakcji.

Def. Niech \sim oznacza relację w zbiorze par (nieuporządkowanych) niezerowych wektorów w przestrzeni euklidesowej V , określoną przez warunek $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \sim \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje izometria $f: V \rightarrow V$ i liczby dodatnie a, b , takie że $\mathbf{u} = a\mathbf{f}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{v} = b\mathbf{f}(\mathbf{y})$. Relacja \sim jest równoważnością; każdą jej klasę abstrakcji nazywamy kątem niezorientowanym. Klasę, której reprezentantem jest para $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, będziemy oznaczali symbolem $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Na podstawie rozważań poprzedzających powyższą definicję możemy orzec, że miara kąta niezorientowanego jest funkcją stałą w każdej klasie abstrakcji relacji \sim i jej wartość jest inna w każdej klasie abstrakcji. Ponadto miara kąta niezorientowanego jest niezmiennikiem wszystkich izometrii.

Pojęcie kąta niezorientowanego jest określone w przestrzeni euklidesowej o dowolnym wymiarze. W odróżnieniu od niego, pojęcie kąta zorientowanego możemy określić tylko w przestrzeni dwuwymiarowej. W tym celu wprowadzimy następującą relację „ \sim' ” w zbiorze uporządkowanych par niezerowych wektorów z takiej przestrzeni: $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \sim' \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje izometria f , której wyznacznik jest dodatni (czyli równy $+1$) oraz dodatnie liczby a i b , takie że $\mathbf{u} = a\mathbf{f}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{v} = b\mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Przypomnijmy, że dwie bazy dowolnej przestrzeni liniowej są zorientowane zgodnie, jeśli wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni, oraz przeciwnie, jeśli jest ujemny. Każdą bazę zorientowaną zgodnie z bazą $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (lub z dowolną ustaloną bazą ortonormalną w przestrzeni innej niż \mathbb{R}^2) nazwiemy bazą dodatnio zorientowaną.

Def. Kątem zorientowanym nazywamy każdą klasę abstrakcji relacji \sim' określonej wyżej. Jeśli para (\mathbf{x}, \mathbf{y}) jest reprezentantem pewnej takiej klasy abstrakcji, to miarą kąta zorientowanego nazywamy liczbę $\phi \in (-\pi, \pi]$, taką że $\cos \phi = \cos \text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ oraz jeśli wektory \mathbf{x}, \mathbf{y} stanowią bazę dodatnio zorientowaną, to $\sin \phi > 0$, a w przeciwnym razie $\sin \phi \leq 0$. Miarę kąta zorientowanego oznaczymy symbolem $\text{Arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

W powyższej definicji zawarte jest twierdzenie, że miara kąta zorientowanego jest funkcją stałą w każdej klasie abstrakcji relacji \sim' , tj. liczba $\phi = \text{Arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nie zależy od wyboru reprezentanta klasy, tj. pary (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Często za miarę kąta zorientowanego wygodnie jest przyjąć każdą z liczb $\text{Arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Niewątpliwie przydadzą się bardziej praktyczne wzory. Zatem, miara kąta niezorientowanego między wektorami \mathbf{x} i \mathbf{y} jest to liczba α , taka że

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Miara kąta zorientowanego między wektorami $\mathbf{x} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ oraz $\mathbf{y} = c\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_2$ w przestrzeni dwuwymiarowej, której baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jest dodatnio zorientowana i ortonormalna, jest to liczba ϕ , taka że

$$\cos \phi = \frac{ac + bd}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}, \quad \sin \phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}.$$

Miara kąta zorientowanego jest niezmiennikiem izometrii zachowującej orientację (tj. o dodatnim wyznaczniku). Miara kąta niezorientowanego jest niezmiennikiem każdej izometrii.

Macierze Grama

Niech φ oznacza pewną formę półtoraliniową w przestrzeni V . Dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ możemy w rachunkach formalnych napis $\mathbf{y}^H \cdot \mathbf{x}$ interpretować jako $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (trzeba tylko pamiętać, jaką formę φ ustaliliśmy; jeśli ktoś nie czuje się z tą notacją zbyt pewnie, to może pisać $\mathbf{y}^H_{\varphi} \cdot \mathbf{x}$).

Weźmy dowolne dwie bazy przestrzeni V , mianowicie $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ i $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$. Możemy utworzyć macierz $A = [\varphi(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i)]_{i,j}$ i wtedy jeśli

$\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ jest wektorem współczynników pewnego wektora $\mathbf{x} \in V$ w bazie X , zaś $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ jest wektorem współczynników wektora $\mathbf{y} \in V$ w bazie Y , to $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{b}^H \mathbf{A} \mathbf{a}$.

W rachunkach symbolicznych powyższą macierz możemy oznaczać symbolem $\varphi(X, Y)$ albo $Y^H \cdot X$. Okazuje się, że wtedy możemy stosować zwykłe reguły przekształcania iloczynów macierzy i takie „mnożenie” jest w szczególności łączne. Na przykład dla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ mamy

$$\varphi(X\mathbf{a}, Y\mathbf{b}) = \mathbf{b}^H Y^H \cdot X\mathbf{a} = (Y\mathbf{b})^H \cdot (X\mathbf{a}).$$

Powyższe spostrzeżenia stosują się w szczególności do iloczynów skalarnych. Dla ustalonych baz X i Y będziemy pisać $\langle X, Y \rangle$ albo $Y^H \cdot X$. Na podstawie kryterium Sylwestra macierz $\langle X, X \rangle = X^H \cdot X$ jest dodatnio określona (i w szczególności nieosobliwa). Macierz ta nazywa się macierzą Grama bazy X .

Uwaga: Kropka odróżnia w tej notacji mnożenie polegające na obliczaniu wartości formy φ lub iloczynu skalarnego od zwykłego mnożenia macierzy, w celu uniknięcia niejednoznaczności. W szczególności równość $Y^H \cdot X = Y^H X$ odpowiada sytuacji, gdy macierze X i Y są liczbowe i $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$.

Rzuty prostopadłe

Def. Rzutem na podprzestrzeń V_1 przestrzeni liniowej V nazywamy przekształcenie liniowe $p: V \rightarrow V_1 \subset V$, takie że dla każdego $\mathbf{x} \in V_1$ $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Przestrzeń V_1 nazywamy podprzestrzenią niezmienniczą przekształcenia p . W szczególności przekształcenie tożsamościowe jest rzutem, którego podprzestrzenią niezmienniczą jest cała przestrzeń V ; inny trywialny przykład rzutu to przekształcenie zerowe.

Rzuty są przekształceniami idempotentnymi, tj. $p = p^2$. Zauważmy, że w określeniu rzutu nie występuje pojęcie iloczynu skalarnego. Istotnie, możemy określić rzut w dowolnej przestrzeni liniowej. W tym celu wybieramy podprzestrzenie V_1 i V_2 , takie że $V = V_1 \oplus V_2$. Dowolny wektor \mathbf{x} możemy jednoznacznie przedstawić w postaci sumy wektorów $\mathbf{x}_1 \in V_1$ i $\mathbf{x}_2 \in V_2$. Przekształcenie p , które wektorowi \mathbf{x} przyporządkowuje wektor \mathbf{x}_1 , jest rzutem na podprzestrzeń V_1 . Przekształcenie $\text{id} - p$ jest również rzutem, na podprzestrzeń V_2 .

Jeśli wymiar podprzestrzeni V_1 jest równy r , to rząd macierzy A rzutu na tę podprzestrzeń jest równy r . Macierz ta musi spełniać warunek $A^2 = A$. W ogólności możemy wybrać dowolną bazę przestrzeni V_1 i uzupełnić ją (przez dołączenie wektorów rozpinających podprzestrzeń V_2) do bazy całej przestrzeni V . Macierz dowolnego rzutu na podprzestrzeń V_1 w takiej bazie składa się z r początkowych kolumn macierzy jednostkowej i $n - r$ kolumn będących dowolnymi kombinacjami liniowymi początkowych r kolumn.

Def. Rzutem prostopadłym na podprzestrzeń V_1 przestrzeni euklidesowej lub unitarnej V nazywamy rzut p , taki że dla każdego wektora $\mathbf{x} \in V$ wektory $p(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x} - p(\mathbf{x})$ są prostopadłe.

Można udowodnić (ćwiczenie), że dla dowolnej podprzestrzeni V_1 istnieje dokładnie jeden rzut prostopadły na tę podprzestrzeń.

Twierdzenie: Rzut prostopadły p przestrzeni V na podprzestrzeń V_1 , której bazą jest $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r]$, można zapisać w postaci wyrażenia macierzowego $p(\mathbf{x}) = X(X^H \cdot X)^{-1} X^H \cdot \mathbf{x}$, gdzie wyrażenie $X^H \cdot X$ oznacza macierz Grama bazy X . Dowód: Wystarczy dowieść, że jeśli $p = X(X^H \cdot X)^{-1} X^H$ to $\text{im } p = V_1$, $p^2 = p$ i dla każdego wektora \mathbf{x} prostopadłego do podprzestrzeni V_1 (czyli do wszystkich wektorów w tej podprzestrzeni) $p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Obliczając

$$p(X) = X(X^H \cdot X)^{-1} X^H \cdot X = X$$

przekonujemy się, że obrazem bazy X podprzestrzeni V_1 jest baza X , skąd pierwsze dwa warunki wynikają natychmiast. Warunek $\mathbf{y} \perp V_1$ jest równoważny warunkom $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}_i$ dla $i = 1, \dots, r$, a zatem $X^H \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$, skąd wynika równość $p(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. \square

Jeśli $V = \mathbb{K}^n$ i stosujemy iloczyn skalarny $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$, to macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń $\text{im } A$, gdzie $A \in \mathbb{K}^{n,r}$, $\text{rank } A = r$, jest równa $A(A^H A)^{-1} A^H$.

Ważny przypadek szczególny rzutu prostopadłego to rzut na podprzestrzeń jednowymiarową, rozpiętą przez ustalony wektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. W tym przypadku macierz Grama ma wymiary 1×1 ; jej jedyny współczynnik jest równy $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ i rozpatrywany rzut prostopadły możemy przedstawić wzorem

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{v}^H \cdot \mathbf{v})^{-1} \mathbf{v}^H \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ i $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$, to macierz rzutu przestrzeni \mathbb{K}^n na podprzestrzeń $\text{lin}\{\mathbf{v}\}$ jest równa $\frac{1}{\mathbf{v}^H \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^H$. W przypadku rzeczywistym zamiast hermitowskiego sprzężenia we wszystkich podanych tu wzorach występuje transpozycja.

Zadania i problemy

- Podaj (i udowodnij) warunek konieczny i dostateczny, aby macierz hermitowska A była ujemnie określona, tj. aby dla każdego wektora $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ było $\mathbf{x}^H A \mathbf{x} < 0$.
- Udowodnij (na podstawie nierówności Schwarz'a) nierówność trójkąta dla norm generowanych przez iloczyny skalarne.
- Na wszelki wypadek jednak udowodnij twierdzenie Pitagorasa.
- Udowodnij, że macierz $\langle X, Y \rangle$, dla dowolnych baz $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ i $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ i dowolnego iloczynu skalarnego jest nieosobliwa. Czy zawsze jest ona dodatnio określona?
- Jaki warunek spełnia wartość wyznacznika dowolnego przekształcenia, które jest izometrią?
- Udowodnij podane na wykładzie wzory, które pozwalają obliczyć miarę kąta zorientowanego między wektorami.

Wskazówka: Trzeba udowodnić, że suma kwadratów wyrażeń opisujących sinus i cosinus jest równa 1, a ponadto że znak obliczonego w ten sposób sinusa zgadza się z definicją.

- Oblicz miarę kąta niezorientowanego i miarę kąta zorientowanego między wektorami $[0, 1]^T$ i $[-1, -1]^T$, przy założeniu, że

a) macierz iloczynu skalarnego w bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jest jednostkowa,

b) macierz iloczynu skalarnego w bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jest równa $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Znajdź macierz Grama iloczynu skalarnego w \mathbb{R}^3 , takiego że baza

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

jest ortonormalna (w sensie tego iloczynu).

- Znajdź macierz rzutu prostopadłego przestrzeni \mathbb{R}^3 na podprzestrzeń

a) rozpiętą przez wektor $[3, 4, 0]^T$,

b) rozpiętą przez wektory $[3, 4, 0]^T$ i $[8, -6, 1]^T$,

przy założeniu, że iloczyn skalarny jest dany wzorem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$.

- Niech

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

Znajdź obraz wielomianu $w(x) = x^2 + x$ w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń rozpiętą przez $\mathbf{a}(x) = 1$.

- Znajdź macierz rzutu prostopadłego przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ na przestrzeń $\mathbb{R}[x]_1$ w bazie $[1, x, x^2]$ dla iloczynu skalarnego

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1+x) dx$$

- Napisz procedurę obliczania rzutu wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ na podprzestrzeń jednowymiarową rozpiętą przez wektor \mathbf{v} , taki że $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$.

- Udowodnij, że dla dowolnej podprzestrzeni V_1 istnieje dokładnie jeden rzut prostopadły przestrzeni euklidesowej lub unitarnej V na tę podprzestrzeń.

- Niech $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ będą macierzami hermitowskimi, nieujemnie określonymi. Udowodnij, że jeśli dla dowolnego $s \in [0, 1]$ macierz $(1-s)A + sB$ jest dodatnio określona, to dla każdego $t \in (0, 1)$ macierz $(1-t)A + tB$ jest dodatnio określona.

Bazy ortogonalne

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie ustaloną przestrzenią euklidesową lub unitarną, a V_1 jej podprzestrzenią. Jak wiemy, istnieje dokładnie jeden rzut prostopadły przestrzeni V na podprzestrzeń V_1 . Jeśli rzut ten oznaczymy symbolem p_1 , to przekształcenie liniowe $p_2 = \text{id} - p_1$ jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń $V_2 \subset V$, taką że

- $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$, $\dim V_1 \cap V_2 = 0$, a zatem $V_1 \oplus V_2 = V$,
- $\mathbf{x} \in V_1$, $\mathbf{y} \in V_2 \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

W przypadku gdy dowolne podprzestrzenie V_1 i V_2 spełniają powyższe warunki mówimy, że przestrzeń V jest ich sumą ortogonalną.

Ponieważ dla dowolnej podprzestrzeni V_1 istnieje (dokładnie jeden) rzut prostopadły na tę podprzestrzeń, więc dla dowolnej przestrzeni V_1 istnieje (dokładnie jedna) przestrzeń prostopadła do niej, V_2 , taka że przestrzeń V jest sumą ortogonalną podprzestrzeni V_1 i V_2 .

Pojęcie sumy ortogonalnej można rozszerzyć na dowolną liczbę (a nawet nieskończenie wiele, ale nie jest to trywialne) podprzestrzeni parami prostopadłych. Pojęcie sumy ortogonalnej określa się też w przestrzeniach ortogonalnych innych niż euklidesowe i unitarne, tj. których forma półtoraliniowa nie jest iloczynem skalarnym (odpowiednia forma kwadratowa nie jest dodatnio określona) — postępowanie w dowodzie twierdzenia Sylwestra przedstawia pewien sposób znalezienia takich podprzestrzeni.

W szczególności przestrzeni V można przedstawić w postaci sumy ortogonalnej podprzestrzeni jednowymiarowych. Baza przestrzeni V , która jest sumą baz takich podprzestrzeni, nazywa się bazą ortogonalną. Każde dwa elementy takiej bazy są wektorami prostopadłymi.

Poniższe twierdzenie na temat baz w przestrzeniach z iloczynem skalarnym stanowi analogię (a właściwie wzmocnienie) ogólnego twierdzenia dotyczącego istnienia baz w przestrzeniach liniowych.

Twierdzenie: W dowolnej przestrzeni euklidesowej lub unitarnej istnieją bazy ortogonalne. Dowolny ortogonalny układ wektorów różnych od wektora zerowego możemy rozszerzyć do bazy ortogonalnej.

Uwaga: Twierdzenie to dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych zawiera kilka subtelności, których nie można pominąć, nawet jeśli teraz nie będziemy się wglębiać w ten temat. Po pierwsze, dotyczy ono innego pojęcia bazy.

Baza Hamela to układ wektorów taki, że dowolny element przestrzeni ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej (skończonej) tych wektorów. Baza Schaudera to układ wektorów w przestrzeni *unormowanej*, taki że każdy element tej przestrzeni ma jednoznaczne przedstawienie w postaci skończonej kombinacji liniowej albo nieskończonego szeregu (który musi być zbieżny w sensie używanej normy). Myślimy zajmowali się dotąd bazami Hamela, ale pojęcie bazy ortogonalnej w przestrzeni nieskończenie wymiarowej jest związane z bazami Schaudera. Oba pojęcia w przestrzeni skończenie wymiarowej są identyczne. Jeśli układ wektorów, który chcemy rozszerzyć do bazy ortogonalnej, jest nieskończony, to aby to było możliwe, trzeba jeszcze założyć, że długości (tj. normy) tych wektorów są zawarte między pewnymi dwiema liczbami dodatnimi.

Uwaga: Przymiotniki „prostopadły” i „ortogonalny” można w zasadzie stosować zamiennie. Jest jeszcze jeden przymiotnik występujący w tym znaczeniu, mianowicie „normalny” (ale później jeszcze pojawi się pojęcie „baza ortonormalna”; druga część przymiotnika w tym terminie oznacza co innego).

Ortogonalizacja Grama–Schmidta

Zajmiemy się następującym zadaniem: Mając bazę $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ przestrzeni euklidesowej (lub unitarnej) V , należy znaleźć bazę $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, taką że

- $\mathbf{y}_i \perp \mathbf{y}_k$ dla $i \neq k$ (baza $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ jest ortogonalna),
- $\text{lin}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \text{lin}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ dla $k = 1, \dots, n$, oraz
- $\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \rangle > 0$ dla $k = 1, \dots, n$.

W szczególności przekonamy się, że to zadanie ma jednoznaczne (z dokładnością do n stałych dodatnich) rozwiązanie.

Drugi z postawionych warunków oznacza, że dla każdego k wektor \mathbf{y}_k jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, albo, równoważnie, wektorów $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{x}_k$. Aby spełnić trzeci warunek, wystarczy przyjąć, że współczynnik tej kombinacji liniowej przy \mathbf{x}_k jest dodatni — najbardziej oczywisty wybór to 1.

Wektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ będziemy konstruować kolejno. Wektor \mathbf{y}_k otrzymamy dokonując rzutowania prostopadłego wektora \mathbf{x}_k na podprzestrzeń prostopadłą do przestrzeni rozpiętej przez wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$. Łatwo możemy się przekonać, że w ten sposób rzeczywiście dostaniemy wektory spełniające postawione warunki. Istotnie, mamy wtedy

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k + \mathbf{z}_k,$$

gdzie $z_k \in \text{lin}\{x_1, \dots, x_{k-1}\} = \text{lin}\{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ oraz $y_k \perp z_k$. Jest oczywiste, że wektor y_k jest prostopadły do wektorów y_1, \dots, y_{k-1} (czyli każdy z nich jest prostopadły do y_k — relacja prostopadłości wektorów jest symetryczna), a ponadto

$$\langle x_k, y_k \rangle = \langle y_k + z_k, y_k \rangle = \langle y_k, y_k \rangle + \langle z_k, y_k \rangle > 0.$$

Opisany rzut możemy konstruować na wiele sposobów, które różnią się kosztem realizacji. W szczególności, niech $X = [x_1, \dots, x_{k-1}]$ i $Y = [y_1, \dots, y_{k-1}]$. Wtedy (zgodnie z wcześniej udowodnionym twierdzeniem)

$$z_k = X(X^H \cdot X)^{-1} X^H \cdot x_k = Y(Y^H \cdot Y)^{-1} Y^H \cdot x_k.$$

Jest jasne, że mniej pracy wymaga zastosowanie bazy Y , ponieważ jej macierz Grama jest diagonalna, co znakomicie ułatwia znalezienie jej odwrotności. Zatem, na podstawie ostatniego wyrażenia możemy napisać

$$y_k = x_k - z_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} y_i \frac{\langle x_k, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle}$$

Na podstawie powyższego wzoru możemy napisać następującą procedurę, która realizuje algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta:

```
for k := 1 to n do begin
  y := x_k;
  for i := 1 to k-1 do
    y := y - y_i * (⟨x_k, y_i⟩ / ⟨y_i, y_i⟩);
  y_k := y
end;
```

Powyższa procedura może być zastosowana w celu znalezienia bazy ortogonalnej dowolnej przestrzeni euklidesowej lub unitarnej o wymiarze n . Stosując ją należy obliczyć $\frac{1}{2}n(n+1)$ iloczynów skalarnych.

Związek między bazami $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $Y = [y_1, \dots, y_n]$ możemy przedstawić w postaci równania macierzowego

$$X = YR,$$

w którym macierz $R = (r_{ij})_{i,j} \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest trójkątna górna: $r_{ij} = 0$ dla $i > j$ oraz $r_{ij} = \frac{\langle x_i, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle}$ dla $i \leq j$. Współczynniki diagonalne r_{ii} macierzy R są równe 1, a zatem $\det R = 1$.

Objętość równoległościanu

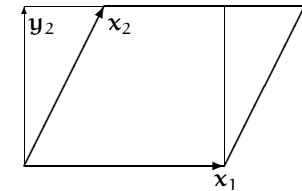
Def. Niech x_1, \dots, x_k będą ustalonymi wektorami w pewnej przestrzeni euklidesowej. Równoległościaniem k -wymiarowym rozpiętym przez te wektory nazywamy zbiór $\{x = \sum_{i=1}^k a_i x_i : a_i \in [0, 1]\}$.

Jednym z najważniejszych zadań geometrii i analizy jest badanie miary różnych zbiorów (w szczególności figur w przestrzeniach euklidesowych). Na przykład miarą odcinka może być długość tego odcinka. Innymi miarami są funkcje, które wyrażają pole figury płaskiej lub objętość bryły. Nie dotykając teorii miary powiedzmy, że:

- Miara w przestrzeni V jest rzeczywistą funkcją nieujemną, której dziedziną jest pewien podzbiór zbioru podzbiorów przestrzeni V (mogą istnieć tzw. zbiory niemierzalne).
- Znając miarę pewnego zbioru A możemy podzielić go na rozłączne, mierzalne podzbiory, a następnie poddać te podzbiory takim przekształceniom, które nie zmieniają miary. Jeśli ich obrazy są rozłączne, to ich suma jest zbiorem mierzalnym, którego miara jest równa mierze zbioru A . W ten sposób starożytni Grecy obliczali pola i objętości figur, tnąc je (w wyobraźni) na kawałki i układając z nich inne figury, których miary znali.
- W przestrzeni euklidesowej można określić pojęcie prostopadłościanu k -wymiarowego (jest to równoległoscian rozpięty przez k wektorów parami prostopadłych) i określić miarę każdego takiego prostopadłościanu jako iloczyn długości rozpinających go wektorów. Tak określoną miarę można uogólnić na inne podzbiory tej przestrzeni (to jest bardzo nietrywialna konstrukcja, ponieważ mierzone zbiory mogą mieć bardzo skomplikowany opis), przez co powstaje tzw. k -wymiarowa miara Lebesgue'a, zgodna z intuicyjnym pojęciem „długości” (dla $k = 1$), „pola” (dla $k = 2$), „objętości” (dla $k = 3$) itd. Każda miara Lebesgue'a jest funkcją ciągłą (ale ściśle wyjaśnienie co to oznacza jednak pominę) i na zbiorach mierzalnych (w sensie tej miary) identycznych z dokładnością do izometrii przyjmuje tę samą wartość.

Na obrazku obok mamy przykład

równoległościanu dwuwymiarowego, rozpiętego przez wektory x_1 i x_2 . Jest on równoważny przez rozkład (jak powiedzieliby starożytni Grecy, oczywiście w tłumaczeniu z języka polskiego) równoległoscianowi rozpiętemu przez wektory x_1 i y_2 ; oba równoległosciany mają więc tę samą miarę (objętość dwuwymiarową).



Wektor \mathbf{y}_2 jest obrazem \mathbf{x}_2 w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń prostopadłą do \mathbf{x}_1 . Ponieważ z równoległoboku (równoległocianu dwuwymiarowego) przez rozkład otrzymaliśmy prostokąt, którego miara jest równa iloczynowi długości boków, więc taka też jest miara równoległoboku wyjściowego. Widzimy też, że takie samo pole będą miały wszystkie równoległoboki rozpięte przez wektory \mathbf{x}_1 i $\mathbf{x}_2 + a\mathbf{x}_1$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

Podobnie wygląda sytuacja dla równoległocianów o innym wymiarze. Jeśli pewien równoległocian jest rozpięty przez wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, to dodanie do któregoś z tych wektorów dowolnej kombinacji liniowej pozostałych wektorów da nam równoległocian, którego k -wymiarowa objętość jest taka sama (równoważność przez rozkład obu równoległocianów można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem).

Rozważmy ponownie proces ortogonalizacji Grama–Schmidta. Przypuśćmy, że wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są liniowo niezależne, a zatem stanowią bazę pewnej przestrzeni liniowej. W wyniku ortogonalizacji dostaniemy pewien układ wektorów $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ i łatwo jest przekonać się, że w świetle poczynionych przed chwilą uwag równoległociany rozpięte przez te dwa układy wektorów są równoważne przez rozkład. Mają one zatem tę samą k -wymiarową objętość. Drugi z tych równoległocianów jest k -wymiarowym prostopadłością i jego miara jest równa iloczynowi długości krawędzi (tj. iloczynowi długości parami prostopadłych wektorów $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$).

Jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są liniowo zależne, tj. dla pewnego j wektor \mathbf{x}_j jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}$, to procedura ortogonalizacji da w wyniku wektor $\mathbf{y}_j = \mathbf{0}$; objętość równoległocianu rozpiętego przez te wektory jest równa 0.

Niech $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$, $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k]$ (uwaga: nie zakładamy liniowej niezależności wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ani otrzymanych z nich $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$). Istnieje macierz trójkątna górna R o wymiarach $k \times k$, taka że $X = YR$ i $\det R = 1$. Macierz Grama układu $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jest równa

$$\langle X, X \rangle = X^H \cdot X = (YR)^H \cdot YR = R^H Y^H \cdot YR = R^H \langle Y, Y \rangle R.$$

Zatem $\det \langle X, X \rangle = \det \langle Y, Y \rangle$. Ale macierz $\langle Y, Y \rangle$ jest diagonalna i jej współczynniki diagonalne są równe $\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle = \|\mathbf{y}_i\|^2$ (a zatem są to kwadraty długości wektorów \mathbf{y}_i w sensie normy związanej z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Stąd miara (objętość k -wymiarowa) równoległocianu P rozpiętego przez wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jest równa

$$\mu_k(P) = \sqrt{\det \langle X, X \rangle}$$

Zauważmy (wynika to z twierdzenia Pitagorasa), że jeśli układ $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ powstał z $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ w drodze ortogonalizacji, to $\|\mathbf{x}_i\| \geq \|\mathbf{y}_i\|$ dla $i = 1, \dots, k$, przy czym równość $\|\mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{y}_i\|$ zachodzi tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$. Na tej podstawie możemy napisać

$$\det \langle X, X \rangle = \det \langle Y, Y \rangle = \prod_{i=1}^k \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle = \prod_{i=1}^k \|\mathbf{y}_i\|^2 \leq \prod_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i\|^2.$$

Udowodniliśmy w ten sposób następującą nierówność Hadamarda: jeśli $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$, to

$$\det \langle X, X \rangle \leq \prod_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i\|^2.$$

Nierówność ta jest ostra z wyjątkiem przypadku, gdy wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są parami prostopadłe, lub gdy któryś z nich jest wektorem zerowym.

Iloczyn skalarny i funkcjonały liniowe

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oznacza skończenie wymiarową przestrzeń euklidesową lub unitarną. Weźmy pod uwagę wyrażenie $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Przy ustalonym wektorze \mathbf{y} opisuje ono funkcjonał liniowy; zatem dowolnemu wektorowi \mathbf{y} odpowiada dokładnie jeden funkcjonał liniowy f określony wzorem $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Udowodnimy, że przyporządkowanie elementom przestrzeni V (wektorom) elementów przestrzeni sprzężonej V^* (funkcjonałów), określone powyższym wzorem, jest wzajemnie jednoznaczne. Inaczej mówiąc, dla każdego funkcjonału $f \in V^*$ istnieje dokładnie jeden wektor \mathbf{y} , taki że dla każdego $\mathbf{x} \in V$ $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

W przestrzeni V istnieje baza ortogonalna $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Niech $\mathbf{z}_i = \frac{1}{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle} \mathbf{y}_i$. Łatwo jest przekonać się, że układ funkcjonałów f_1, \dots, f_n , takich że $f_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_i \rangle$ dla $i = 1, \dots, n$, jest bazą przestrzeni V^* , sprzężoną z bazą $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Wystarczy sprawdzić, że jeśli $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ i $Z = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n]$ to $\langle Y, Z \rangle = I_n$. Ponieważ elementy bazy przestrzeni V^* utożsamiliśmy z wektorami z przestrzeni V , więc możemy to samo zrobić z każdym elementem przestrzeni V^* . \square

Tak więc funkcjonały liniowe na przestrzeni V możemy utożsamiać z wektorami z tej przestrzeni. Izomorfizm przestrzeni V i V^* , w trochę węższym kontekście, rozpatrywaliśmy w pierwszym semestrze. Obecnie, znając pojęcie iloczynu skalarnego, możemy dokonać geometrycznej interpretacji funkcjonału liniowego. Zbiorem miejsc zerowych dowolnego niezerowego funkcjonału f jest pewna podprzestrzeń o wymiarze $n - 1$ (hiperpłaszczyzna). Jest ona zbiorem wektorów

prostopadłych (w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni V) do wektora \mathbf{y} , który utożsamiliśmy z funkcjonalem f . Wektor \mathbf{y} prostopadły do hiperpłaszczyzny $U \subset V$ zazwyczaj jest nazywany wektorem normalnym hiperpłaszczyzny U .

Uwaga: Nie w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni z iloczynem skalarnym dowolny funkcjonal liniowy można utożsamzić z pewnym wektorem; można to zrobić w tzw. przestrzeni Hilberta, czyli przestrzeni zupełnej (której elementami są granice wszystkich ciągów Cauchy'ego zawartych w tej przestrzeni) — orzeka o tym twierdzenie Riesz, ale to temat na wykład z innego przedmiotu.

Iloczyn wektorowy w \mathbb{R}^3

W wykładzie o wyznacznikach znajduje się definicja iloczynu wektorowego $\mathbf{n} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ wektorów w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Zbadamy, jak ta definicja ma się do bardziej znanej definicji „geometrycznej” iloczynu wektorowego dwóch wektorów w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 z iloczynem skalarnym $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, zdefiniowaliśmy jako funkcjonal liniowy f określony wzorem $f(\mathbf{z}) = \det[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$. Utożsamimy funkcjonal f z takim wektorem \mathbf{n} , że dla każdego wektora \mathbf{z} jest $f(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{n} \rangle$. Wiemy, że wektor \mathbf{n} jest prostopadły do wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} (kto nie wie, jak to udowodnić, niech powie to teraz, lub zamilknie na wieki).

Niech \mathbf{z} oznacza wektor prostopadły do wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} (o których założymy, że są liniowo niezależne) i taki, że $\|\mathbf{z}\|^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 1$ (wektor taki istnieje, bo potrafimy go skonstruować; dokładniej, istnieją dwa takie wektory). Wektor \mathbf{z} ma kierunek wektora \mathbf{n} , skąd wynika, że $|\langle \mathbf{z}, \mathbf{n} \rangle| = \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{n}\|$. Stąd $\|\mathbf{n}\|^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{n} \rangle^2 = \det G$, gdzie G oznacza macierz Grama układu wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Mamy

$$G = \langle [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \rangle = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że wyznacznik tej macierzy jest równy

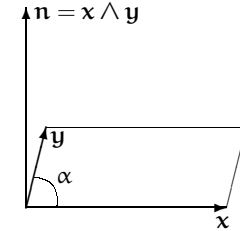
$$\|\mathbf{n}\|^2 = \det G = \det \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{bmatrix} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2$$

Jak widzimy, długość wektora \mathbf{n} jest równa mierze (polu) równoległoboku rozpiętego przez wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} . Korzystając w dalszych rachunkach z równości $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha$, gdzie $\alpha = \text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, możemy obliczyć

$$\|\mathbf{n}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \alpha.$$

Zatem definicja iloczynu wektorowego podana wcześniej na wykładzie, w przypadku iloczynu wektorowego dwóch wektorów w \mathbb{R}^3 , jest równoważna znanej definicji geometrycznej:

Def. Iloczynem wektorowym wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ jest wektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ prostopadły do \mathbf{x} i \mathbf{y} , którego długość jest równa $\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \alpha$, gdzie $\alpha = \text{arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (uwaga: zawsze $\sin \alpha \geq 0$) i jeśli wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są liniowo niezależne, to układ $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}$ jest zorientowany dodatnio.



Zadania i problemy

1. Udowodnij, że jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$ są różne od wektora zerowego i parami prostopadłe, tj. $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$, to są liniowo niezależne.
2. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że jeśli $\mathbf{y}_i \perp \mathbf{y}_j$ dla $i, j < k$, $i \neq j$, to dla każdego wektora \mathbf{x} zachodzi równość

$$\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{y}_i \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i \rangle}{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle} \rangle = 0.$$

Przy tym jeśli wektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{x}$ są liniowo niezależne, to drugi argument iloczynu skalarnego w wyrażeniu po lewej stronie nie jest wektorem zerowym.

3. Zastosuj ortogonalizację Grama-Schmidta do bazy $1, x, x^2$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ z iloczynem skalarnym określonym za pomocą wzoru

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

4. Znajdź wyrażenie macierzowe, które opisuje bazę sprzężoną z bazą $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, wiedząc że $X = YR$, gdzie macierz $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ reprezentuje bazę ortogonalną.
5. Udowodnij, że równoległoscian jest zbiorem wypukłym.
6. Oblicz objętość (trójwymiarową) równoległoscianu w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^4 z iloczynem skalarnym $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, rozpiętego przez wektory $[1, 2, 2, 0]^T$, $[-2, 2, 0, 1]$, $[1, -1, 1, -1]$. Oblicz długości krawędzi i pole powierzchni ścian tego równoległoscianu.
7. Oblicz kąty między wektorami rozpinającymi równoległoscian z poprzedniego zadania (wystarczy obliczyć cosinusy tych kątów).
8. Niech $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ oznacza ustalony wektor w \mathbb{R}^3 . Znajdź macierz X , taką że dla każdego wektora $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $X\mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

Wskazówka: Oblicz wektory $\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_2$ i $\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_3$ i skorzystaj z tego, że układ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jest bazą.

9. Udowodnij równoważność przez rozkład równoległościanu trójwymiarowego rozpiętego przez dowolne wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ i równoległościanu rozpiętego przez $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + a\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 + b\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_2$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: Trzeba zacząć od przypadku $a \in [0, 1], b = c = 0$, a następnie uogólnić wynik dla dowolnego a . Brzeg równoległościanu i jego kawałków należy przy tym zaniedbać (objętość brzegu jest równa 0).

10. Objętość k -wymiarowa sympleksu S , położonego w przestrzeni \mathbb{R}^n z iloczynem skalarnym $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, którego wierzchołkami są punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$, jest równa

$$\mu_k(S) = \frac{1}{k!} \sqrt{\det X^T X},$$

gdzie $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$ oraz $\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ dla każdego i . Równoległościan k -wymiarowy można podzielić na $k!$ sympleksów o jednakowej objętości, ale nie tędy droga, aby powyższy wzór wyprowadzić. Rzecz w tym, że dla $k > 2$ otrzymane sympleksy nie są równoważne przez rozkład, tj. nie można żadnego z nich podzielić na skończenie wiele części, z których można by złożyć każdy inny. Dlatego powyższy wzór otrzymuje się w wyniku przejścia granicznego (rozpatrując podziały sympleksu na nieskończenie wiele części), co oznacza obliczenie całki.

Udowodnij powyższy wzór, korzystając z indukcji. W tym celu rozważ sympleks k -wymiarowy. Każda jego ściana jest sympleksem $k - 1$ -wymiarowym; wybierz jedną ze ścian i podziel sympleks na „plasterki” o grubości dx za pomocą afinicznych przestrzeni $k - 1$ -wymiarowych równoległych do wybranej ściany. Objętość k -wymiarowa każdego plasterka jest w przybliżeniu (tym lepszym im mniejsze dx) równa $dx \cdot$ objętość $k - 1$ -wymiarowa „podstawy” plasterka. Wystarczy teraz znaleźć odpowiednią funkcję podcałkową i obliczyć całkę.

11. Udowodnij, że objętość k -wymiarowa sympleksu S o wierzchołkach w punktach $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$ można obliczyć na podstawie wzoru

$$\mu_k(S) = \frac{1}{k!} \sqrt{\det X^T X},$$

w którym występuje macierz $X = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k] \in \mathbb{R}^{n+1, k+1}$, której kolumny powstały przez dopisanie liczby 1 jako dodatkowej współrzędnej do punktów $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$. Udowodnij następnie, że jeśli $Y = [\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k]$ gdzie $\mathbf{y}_i = w_i \mathbf{x}_i$ (liczby w_i są dowolne, różne od 0, czyli punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ reprezentujemy za pomocą dowolnych macierzy współrzędnych jednorodnych), to

$$\mu_k(S) = \frac{1}{k!} \frac{\sqrt{\det Y^T Y}}{\prod_{i=0}^k |w_i|}.$$

Wyjaśnij, jak można obliczyć objętość równoległościanu na podstawie współrzędnych jednorodnych jego wierzchołków.

Bazy ortonormalne

Def. Bazą ortonormalną nazywamy bazę ortogonalną (przestrzeni euklidesowej lub unitarnej), której wszystkie elementy są wektorami o długości 1.

Elementy bazy ortogonalnej można poddać normalizacji (albo unormować), czyli podzielić każdy z nich przez jego długość. Otrzymujemy w ten sposób bazę ortonormalną.

Baza ortonormalna ma tę własność, że jej macierz Grama jest jednostkowa, a zatem iloczyn skalarny w takiej bazie (i tylko w takiej) dowolnych wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} jest równy $\mathbf{b}^H \mathbf{a}$, gdzie \mathbf{a} i \mathbf{b} są macierzami współczynników wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} .

Możemy ponadto zauważyć, że baza ortonormalna jest sprzężona z samą sobą (jeśli utożsamiamy funkcjonały z wektorami zgodnie z wcześniej podanym opisem). Zatem, jeśli bazę ortonormalną reprezentujemy za pomocą macierzy $Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$, to możemy napisać $Q^{-1} = Q^H$.

Dowolny podzbiór bazy ortonormalnej przestrzeni V jest bazą ortonormalną odpowiedniej podprzestrzeni. Niech to będzie przestrzeń k -wymiarowa V_a , a macierz jej bazy ortonormalnej oznaczmy symbolem $Q_a = [\mathbf{q}_{a_1}, \dots, \mathbf{q}_{a_k}]$. Mamy $Q_a^H \cdot Q_a = I_k$, czyli $(Q_a^H \cdot Q_a)^{-1} = I_k$, a zatem możemy napisać następujące wyrażenie, które opisuje rzut prostopadły dowolnego wektora $\mathbf{x} \in V$ na podprzestrzeń V_a :

$$p(\mathbf{x}) = Q_a Q_a^H \cdot \mathbf{x}.$$

Macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń V_a możemy więc przedstawić w postaci $Q_a Q_a^H$. Zauważmy, że rzut ten jest przekształceniem tożsamościowym *przestrzeni* V_a (i w tym sensie macierz Q_a jest lewostronną odwrotnością macierzy Q_a^H).

Współczynniki macierzy $Q_a^H \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{q}_{a_1} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{q}_{a_k} \rangle \end{bmatrix}$ są oczywiście współrzędnymi

obrazu wektora \mathbf{x} w rzucie na podprzestrzeń V_a ; jeśli $Q_a = Q$ (czyli $V_a = V$), to mamy tu przekształcenie tożsamościowe. W tym przypadku macierz $Q^H \cdot \mathbf{x}$ jest macierzą współrzędnych wektora \mathbf{x} w bazie Q .

Przypuśćmy, że $\mathbf{a} = Q^H \cdot \mathbf{x}$. Ponieważ $Q Q^H = \text{id}$, więc

$$\|\mathbf{a}\|_2^2 = \mathbf{a}^H \mathbf{a} = (Q^H \cdot \mathbf{x})^H Q^H \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Długość dowolnego wektora jest zatem równa normie drugiej wektora jego współrzędnych w dowolnej bazie ortonormalnej.

Bazy ortonormalne w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych

Bazą (Schaudera — zobacz poprzedni wykład) przestrzeni *unormowanej* V nazywamy taki układ wektorów $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$, że dowolny element $\mathbf{y} \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie o postaci

$$\mathbf{y} = \sum_{j \in J} a_j \mathbf{x}_j,$$

przy czym zbiór współczynników a_j różnych od zera jest skończony lub przeliczalny (zwróćmy uwagę, że zbiór J może być nieprzeliczalny). W tym ostatnim przypadku szereg otrzymany przez wybranie niezerowych składników jest zbieżny w sensie normy przestrzeni V .

Def. Ciąg wektorów $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$ w przestrzeni unormowanej nazywa się ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall i, j > N \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| < \varepsilon.$$

Przestrzeń unormowana jest domknięta albo zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni ma granicę, która jest elementem tej przestrzeni. Dowolną przestrzeń unormowaną można domknąć, tj. rozszerzyć ją o granice jej wszystkich ciągów Cauchy'ego. Zupełne przestrzenie unormowane są nazywane przestrzeniami Banacha. Każda skończona wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbb{R} lub \mathbb{C} (ale nie \mathbb{Q}) jest zupełna. W przestrzeni euklidesowej lub unitarnej norma jest generowana przez iloczyn skalarny. Zupełne przestrzenie z takimi normami są nazywane przestrzeniami Hilberta.

Przykład: Wzór

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

określa iloczyn skalarny w przestrzeni, której elementy są funkcjami zespolonymi (albo rzeczywistymi), dla których wartość $\langle f, f \rangle$ jest skończona (przy utożsamieniu każdych dwóch funkcji f_1 i f_2 , takich że $\langle f_1 - f_2, f_1 - f_2 \rangle = 0$). Zbiór *wszystkich* funkcji spełniających ten warunek jest przestrzenią Hilberta. Oznacza się ją symbolem $L^2[a, b]$.

Przykład: Możemy iloczyn skalarny otrzymać uogólniając podany wyżej wzór, przez wprowadzenie funkcji wagowej ρ :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x) dx$$

Funkcja $\rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ musi być dodatnia *prawie wszędzie* (czyli może przyjmować wartości niedodatnie tylko w zbiorze, którego miara Lebesgue'a jest równa 0). Dalsze uogólnienie polega na wybraniu skończonego zbioru punktów x_i oraz liczb dodatnich a_i i użyciu wzoru

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x) dx + \sum_{i=1}^n f(x_i)\overline{g(x_i)}a_i.$$

Przypuśćmy, że układ wektorów x_1, x_2, \dots jest bazą ortonormalną przestrzeni V . Dla dowolnego $y \in V$ możemy wtedy określić szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, \quad \text{gdzie} \quad a_j = \langle x_j, y \rangle.$$

Szereg taki nazywa się szeregiem Fouriera elementu y .

Przykład: Najbardziej znane szeregi Fouriera są związane z ciągiem funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \dots,$$

który jest bazą ortonormalną w sensie iloczynu skalarnego

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx.$$

Warto wspomnieć o innych bazach, ważnych w zastosowaniach praktycznych, dla których konstruuje się i bada szeregi Fouriera. Ich elementami są wielomiany, a także tzw. funkcje falkowe. Konstruując szereg Fouriera ustalonej funkcji f należy zbadać, czy szereg taki jest zbieżny i czy jego granicą jest funkcja f — czasem nie jest jasne, czy rozpatrywana funkcja należy do przestrzeni, której bazę mamy. Jeśli tak jest, to zachodzi równość Parsevala:

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in I} |a_j|^2,$$

w której liczby a_j są współczynnikami funkcji f w bazie ortonormalnej. Równość Parsevala jest przeniesieniem twierdzenia Pitagorasa na przestrzenie o nieskończonym wymiarze.

Izometrie

Przypomnijmy, że izometria przestrzeni euklidesowej jest przekształceniem liniowym, które zachowuje długość każdego wektora, skąd wynika, że jej niezmiennikiem jest także iloczyn skalarny, kąty, miary figur geometrycznych, a także wszystkie niezmienniki przekształceń liniowych.

Macierze unitarne i ortogonalne

Def. Zespolona macierz kwadratowa, której kolumny są parami prostopadłe w sensie iloczynu skalarnego $\langle x, y \rangle = y^H x$ i których norma druga jest równa 1 nazywa się macierzą unitarną. Kwadratowa macierz rzeczywista spełniająca ten sam warunek nazywa się macierzą ortogonalną.

Macierze ortogonalne (rozumiem przez to także macierze unitarne) są nieosobliwe, bo kolumny każdej takiej macierzy stanowią bazę (ortonormalną) przestrzeni \mathbb{K}^n . Co więcej, odwrotność macierzy ortogonalnej Q jest macierzą ortogonalną, równą Q^H . Wynika to natychmiast z faktu, że macierz Grama $Q^H Q$ bazy ortonormalnej, a także macierz $Q Q^H$ rzutu prostopadłego na całą przestrzeń \mathbb{K}^n (czyli przekształcenia tożsamościowego) jest macierzą jednostkową.

Twierdzenie: Przekształcenie $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy gdy jego macierz jest unitarna (gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) albo ortogonalna (gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Dowód: Niech A oznacza macierz izometrii f i niech $x, y \in \mathbb{C}^n$. Ponieważ izometria zachowuje iloczyn skalarny, więc musi być

$$\langle f(x), f(y) \rangle = (Ay)^H (Ax) = y^H A^H A x = y^H x.$$

Oczywiste jest, że jeśli macierz A jest unitarna, tj. $A^H A = I_n$, to powyższa równość jest spełniona. Macierz $A^H A$ jest macierzą Grama układu wektorów $f(e_1), \dots, f(e_n)$, który jest obrazem bazy ortonormalnej e_1, \dots, e_n w przekształceniu f . Obraz ten nie jest bazą ortonormalną jeśli $A^H A \neq I_n$, a zatem przekształcenie f w takim przypadku nie jest izometrią. Dowód dla przestrzeni \mathbb{R}^n przebiega tak samo. \square

Izometrie pełnią ważną rolę w geometrii, ale także w metodach numerycznych. Zauważmy, że jeśli w układzie równań

$$Qx = b$$

występuje macierz ortogonalna Q , to rozwiązanie dane jest wzorem $x = Q^T b$, przy czym mając Q macierz Q^T mamy „za darmo”. Co więcej, układ taki jest bardzo

każde odbicie jest izometrią. Wyrażenie opisujące odbicie względem dowolnej podprzestrzeni łatwo jest otrzymać rozpatrując rzut prostopadły. Podprzestrzeń prostopadłą do U oznaczmy symbolem U^\perp . Jeśli znamy bazę $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$ podprzestrzeni U^\perp , to rzuty prostopadłe p_1 i p_2 odpowiednio na tę podprzestrzeń i na podprzestrzeń U są opisane wzorami

$$p_1(\mathbf{x}) = X(X^H \cdot X)^{-1} X^H \cdot \mathbf{x}, \quad p_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - p_1(\mathbf{x})$$

(wyrażenie opisujące rzut p_1 upraszcza się w przypadku, gdy baza X jest ortogonalna lub ortonormalna). Odbicie h względem podprzestrzeni U wyraża się wzorem

$$h(\mathbf{x}) = p_2(\mathbf{x}) - p_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2p_1(\mathbf{x}).$$

W związku z odbiciami odnotujmy następujące fakty:

- Każde odbicie jest inwolucją, tj. dla każdego wektora \mathbf{x} jest spełniony warunek $h(h(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Odbicie jest zatem swoją własną odwrotnością. Ponieważ każda macierz nieosobliwa ma dokładnie jedną macierz odwrotną, więc macierz H odbicia, która (w bazie ortonormalnej) jest macierzą ortogonalną, musi być hermitowska (rachunek jest natychmiastowy: $H^2 = I = H^H H$).
- Jeśli podprzestrzeń U^\perp jest rozpięta przez wektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$, to macierz odbicia względem U jest macierzą diagonalną, której k początkowych współczynników na diagonalu jest równe -1 , a pozostałe współczynniki diagonalne to jedynki. Tak samo wygląda macierz odbicia w dowolnej bazie ortonormalnej, której pierwsze k elementów stanowi bazę podprzestrzeni U^\perp .
- Obroty przestrzeni euklidesowej zachowują orientację każdego układu n wektorów, co jest widoczne natychmiast po (łatwym) obliczeniu wyznacznika macierzy obrotu. Odbicia symetryczne zachowują orientację wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar podprzestrzeni U^\perp jest parzysty. W szczególności wszystkie odbicia względem hiperpłaszczyzn (tj. podprzestrzeni o wymiarze $n - 1$) zmieniają orientację na przeciwną.
- Transpozycja T_{ij} , tj. przekształcenie, które przestawia współrzędne i i j wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, jest odbiciem względem hiperpłaszczyzny prostopadłej do wektora $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$.

W metodach numerycznych największe znaczenie praktyczne mają odbicia względem hiperpłaszczyzn. Bierze się to stąd, że takie odbicia są najłatwiejsze do skonstruowania, a z ich pomocą można rozwiązać wszystkie zadania algebry liniowej, które można rozwiązać poprzez konstruowanie odpowiednich izometrii. Dlatego przyjrzymy się temu szczególnemu przypadkowi. Każdą hiperpłaszczyznę możemy reprezentować za pomocą jednego wektora (wektora normalnego, który

utożsamiamy z funkcjonałem, którego zbiorem miejsc zerowych jest ta hiperpłaszczyzna).

Rozważmy przestrzeń \mathbb{C}^n z iloczynem skalarnym $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$. Niech $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Macierz odbicia względem hiperpłaszczyzny prostopadłej do \mathbf{w} jest równa

$$H = I_n - \mathbf{w} \frac{2}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}} \mathbf{w}^H.$$

Drugi składnik opisuje podwojoną macierz rzutu na podprzestrzeń jednowymiarową rozpiętą przez wektor \mathbf{w} . Łatwo jest sprawdzić, że $H^2 = I_n$, a ponadto jeśli $\mathbf{x} \perp \mathbf{w}$ to $H\mathbf{x} = \mathbf{x}$ oraz $H\mathbf{a}\mathbf{w} = -\mathbf{a}\mathbf{w}$. Zwróćmy uwagę, że realizując odbicie w praktyce (za pomocą procedury komputerowej) nie warto jawnie wyznaczać macierzy H ; do zapamiętania tylko wektora \mathbf{w} i liczby $\beta = \frac{2}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}$ potrzebne jest znacznie mniej miejsca, a obliczanie kolejno $\mathbf{a} = \mathbf{w}^H \mathbf{x}$, $\mathbf{b} = \beta \mathbf{a}$ i $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{w}$ zabiera mniej czasu. Przy tym postępowaniu mniej się też dają we znaki błędy zaokrągleń.

Odbicia opisane wyżej dla przestrzeni unitarnej stosuje się także w przestrzeniach euklidesowych (rzeczywistych). Wszystkie powyższe rachunki i komentarze w tym przypadku pozostają w mocy, należy tylko we wzorach dokonać zmiany sprzężenia hermitowskiego na transpozycję.

Zadania i problemy

1. Zmodyfikuj procedurę ortogonalizacji Grama–Schmidta tak, aby wynikiem jej działania była baza ortonormalna.
2. Oblicz (tj. wyprowadź ogólny wzór opisujący) współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f(x) = \text{sgn}(x - \pi)$ w bazie trygonometrycznej wspomnianej na wykładzie.
3. Udowodnij, że jeśli Q jest macierzą ortogonalną lub unitarną, to $\text{cond}_2 Q = 1$.
4. Udowodnij, że transpozycja T_{ij} , tj. przekształcenie, które przestawia współrzędne i i j wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jest odbiciem względem hiperpłaszczyzny prostopadłej do wektora $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$.
5. Udowodnij, że przekształcenie Hadamarda przestrzeni \mathbb{R}^n , gdzie $n = 2^k$, którego macierz H_n jest określona wzorem rekurencyjnym

$$H_1 = [1],$$

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_{n/2} & -H_{n/2} \\ H_{n/2} & H_{n/2} \end{bmatrix},$$

jest izometrią. Czy przekształcenie to zachowuje orientację?

6. Udowodnij, że jeśli k -ta współrzędna wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ jest równa 0, to macierz odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do tego wektora ma k -ty wiersz oraz k -tą kolumnę takie, jak macierz jednostkowa.
7. Niech X oznacza macierz bazy pewnej podprzestrzeni pewnej przestrzeni unitarnej V . Napisz wyrażenie macierzowe, które opisuje odbicie symetryczne względem tej podprzestrzeni. Jaką szczególną postać przybierze to wyrażenie, jeśli baza X jest ortonormalna?
8. Udowodnij, że macierz rzutu prostopadłego w bazie ortonormalnej na podprzestrzeń o dowolnym wymiarze, a także macierz odbicia symetrycznego w bazie ortonormalnej względem dowolnej podprzestrzeni, jest hermitowska.
9. Dowolną permutację można przedstawić w postaci złożenia pewnej liczby transpozycji, z których każda (interpretowana jako przekształcenie przestrzeni \mathbb{R}^n) jest odbiciem w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do wektora $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ (dla pewnych liczb i, j).
Zbadaj, czy każdą permutację *parzystą* można przedstawić w postaci złożenia pewnej liczby obrotów o kąt $\frac{\pi}{2}$ w płaszczyznach rozpiętych przez pary wektorów $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.
Dlaczego nie można przedstawić w ten sposób żadnej permutacji nieparzystej?

Pseudoodwrotność macierzy

Def. Niech $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Pseudoodwrotność macierzy A jest to macierz $A^+ \in \mathbb{K}^{n,m}$, taka że $\text{rank } A^+ = \text{rank } A$ i macierz AA^+ jest macierzą rzutu prostopadłego przestrzeni \mathbb{K}^m na podprzestrzeń $\text{im } A$, zaś macierz A^+A jest macierzą rzutu prostopadłego przestrzeni \mathbb{K}^n na podprzestrzeń prostopadłą do $\ker A$.

Powyższa definicja zakłada stosowanie iloczynów skalarnych w \mathbb{K}^m i \mathbb{K}^n określonych wzorem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$. Zauważmy, że macierz A jest pseudoodwrotnością macierzy A^+ . Przypuśćmy, że $m \geq n = \text{rank } A$, tj. macierz A jest kolumnowo regularna. Wtedy rząd macierzy $A^+A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest równy n , tj. macierz A^+A jest nieosobliwa. Podprzestrzenia prostopadłą do jądra macierzy A jest cała przestrzeń \mathbb{K}^n . Jedyny rzut prostopadły na całą przestrzeń to przekształcenie tożsamościowe, zatem w tym przypadku $A^+A = I_n$.

Podobnie możemy uzasadnić, że jeśli $\text{rank } A = m \leq n$, czyli $\text{im } A = \mathbb{K}^m$, to $AA^+ = I_m$. Zatem jeśli macierz A jest nieosobliwa, tj. $m = n = \text{rank } A$, to $AA^+ = A^+A = I_n$, czyli $A^+ = A^{-1}$. Pojęcie pseudoodwrotności macierzy jest zatem uogólnieniem pojęcia odwrotności kwadratowej macierzy nieosobliwej. Ma ono zastosowania w liniowych zadaniach najmniejszych kwadratów, do badania których zmierzamy. Dowodzi się (dowód na razie pomijamy), że każda macierz prostokątna ma jednoznacznie określoną pseudoodwrotność.

Rozkład unitarno-trójkątny macierzy

Niech $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $m \geq n$. Jeśli macierz A jest kolumnowo regularna, czyli jej kolumny stanowią bazę pewnej n -wymiarowej podprzestrzeni V przestrzeni \mathbb{K}^m , to możemy dokonać ortogonalizacji Grama-Schmidta. Otrzymamy wtedy macierz $B \in \mathbb{K}^{m,n}$, której kolumny stanowią bazę ortogonalną podprzestrzeni \mathbb{K}^m , oraz macierz trójkątną górną $U \in \mathbb{K}^{n,n}$, z jedynekami na diagonalu, takie że $A = BU$.

Macierz B nie jest w ogólności macierzą unitarną, z dwóch powodów: jest prostokątna, a ponadto jej kolumny mogą mieć długości różne od 1. Niemniej, wyznaczenie takich czynników B i U macierzy A jest nazywane znalezieniem rozkładu unitarno-trójkątnego (albo ortogonalno-trójkątnego) macierzy A . Zauważmy, że jeśli D jest macierzą diagonalną, której współczynniki diagonalne są równe długościom odpowiednich kolumn macierzy B , to możemy napisać $A = Q_1 R_1$, gdzie $Q_1 = BD^{-1}$ oraz $R_1 = DU$. Kolumny macierzy Q_1 tworzą bazę ortonormalną pewnej podprzestrzeni V przestrzeni \mathbb{K}^m . Macierze $Q_1 \in \mathbb{K}^{m,n}$ i $R_1 \in \mathbb{K}^{n,n}$ możemy otrzymać bezpośrednio, w wyniku

ortonormalizacji Grama-Schmidta bazy złożonej z kolumn macierzy A , czyli odpowiednio zmienionej procedury ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Jeśli $m > n$, tj. macierz Q_1 jest prostokątna, to bazę złożoną z jej kolumn możemy uzupełnić do bazy ortonormalnej całej przestrzeni \mathbb{K}^m , przez dołączenie pewnych $m - n$ wektorów. W ten sposób otrzymamy macierz unitarną (lub ortogonalną) $Q \in \mathbb{K}^{m,m}$. Możemy też dopisać $m - n$ wierszy z samymi zerami do macierzy R_1 . Powstaje w ten sposób macierz $R \in \mathbb{K}^{m,n}$, tj. macierz o tych samych wymiarach co A . Mamy zatem

$$A = Q_1 R_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_R$$

Mówiąc o rozkładzie unitarno-trójkątnym macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ będziemy mieli na myśli albo macierz o kolumnach ortonormalnych $Q_1 \in \mathbb{K}^{m,n}$ i macierz trójkątną górną $R_1 \in \mathbb{K}^{n,n}$, takie że $A = Q_1 R_1$, albo macierz unitarną $Q \in \mathbb{K}^{m,m}$ i macierz trójkątną $R \in \mathbb{K}^{m,n}$, takie że $A = QR$.

Rozkłady unitarno-trójkątne macierzy mają liczne zastosowania, z których niektóre będą przedstawione dalej. Najprostsze zastosowanie to rozwiązywanie układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z nieosobliwą macierzą A . Ponieważ $Q^{-1} = Q^H$, więc znając macierze Q i R możemy przekształcić układ w taki sposób:

$$Q^H A \mathbf{x} = Q^H \mathbf{b} \quad \text{czyli} \quad R \mathbf{x} = Q^H \mathbf{b}.$$

Przedstawiona wcześniej eliminacja Gaussa też sprowadza układ do postaci z macierzą trójkątną. Koszt znalezienia rozkładu unitarno-trójkątnego jest na ogół większy, ale jest tu pewna korzyść: mniejsze błędy. Zauważmy, że jeśli $A = BC$ to $\text{cond } A \leq \text{cond } B \text{ cond } C$. Iloczyn wskaźników uwarunkowania czynników trójkątnych macierzy A , znalezionych przez eliminację Gaussa, może być dużo większy niż $\text{cond } A$. Tymczasem w rozkładzie unitarno-trójkątnym $A = QR$ mamy zawsze $\text{cond}_2 Q = 1$ oraz $\text{cond}_2 A = \text{cond}_2 R$. Tak więc stosując to podejście nie psujemy dokładności rozwiązania na skutek rozwiązywania znacznie gorzej uwarunkowanych zadań pośrednich, ale trzeba użyć odpowiednio dobrego algorytmu znajdującego taki rozkład. Czasem (w praktyce dosyć rzadko) zdarza się układ równań, dla którego eliminacja Gaussa daje za duże błędy, a rozkład unitarno-trójkątny nie za duże.

Modyfikowana ortonormalizacja Grama-Schmidta

Procedurę (klasyczną) ortogonalizacji Grama-Schmidta omawialiśmy wcześniej. Możemy ją zmienić tak, aby wynikiem jej działania była baza ortonormalna (było takie ćwiczenie):

```

for k := 1 to n do begin
  y := ak;
  for i := 1 to k-1 do begin
    rik := qiHak;
    y := y - qirik
  end;
  rkk := √(yHy);
  qk := (1/rkk)y
end;

```

Wadą algorytmu klasycznego w obliczeniach numerycznych jest to, że jeśli kąty między wektorami $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ są bliskie 0 lub π (wyjściowa baza jest, jak to się mówi, bardzo „skośna”), to otrzymane wektory $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ też są prostopadłe tylko w przybliżeniu i to niedokładnym. Wyjścia w tej sytuacji są dwa. Pierwsze z nich polega na poddaniu wyniku działania procedury (tj. bazy, które jest nie dość dokładnie ortogonalna) ponownej ortogonalizacji. Ten algorytm z reortogonalizacją daje bardzo dobre wyniki kosztem dwukrotnego wzrostu czasu obliczeń. Nieco gorsze wyniki, ale lepsze niż algorytm klasyczny, daje modyfikowany algorytm Grama-Schmidta (MGS). Na pierwszy rzut oka algorytm ten różni się od algorytmu klasycznego tylko kolejnością działań (a więc z punktu widzenia algebry oba te algorytmy są równoważne):

```

for k := 1 to n do qk := ak;
for k := 1 to n do begin
  rkk := √(qkHqk);
  qk := (1/rkk)qk;
  for i := k+1 to n do begin
    rki := qkHqi;
    qi := qi - qkrki
  end
end;

```

Wyjaśnienie, dlaczego algorytm modyfikowany jest dokładniejszy, jest takie: w algorytmie klasycznym utrzymujemy wektory bazy oryginalnej do końca; jeśli kąt między wektorem \mathbf{a}_l a podprzestrzenią rozpiętą przez $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{l-1}$ jest mały (kąt między wektorem \mathbf{x} i podprzestrzenią V to najmniejszy kąt między wektorem \mathbf{x} i $\mathbf{y} \in V$), to takim pozostaje do l -tego przebiegu zewnętrznej pętli i podczas wykonywania pętli wewnętrznej zachodzi znoszenie się składników, czyli utrata dokładności. Algorytm modyfikowany działa tak: na początku zewnętrznej pętli zawartość zmiennej \mathbf{q}_k jest wektorem prostopadłym do wszystkich wcześniej znalezionych elementów bazy ortonormalnej. Wektor ten normalizujemy (tj. dzielimy przez jego długość) w celu otrzymania wektora \mathbf{q}_k o długości 1.

Następnie każdy z wektorów $\mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_n$ zastępujemy przez jego rzut prostopadły na hiperpłaszczyznę prostopadłą do \mathbf{q}_k . Dzięki takiemu postępowaniu kąty między tymi wektorami zbliżają się do kąta prostego. W instrukcji

$$\mathbf{q}_i := \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_k r_{ki},$$

która implementuje rzutowanie na hiperpłaszczyznę prostopadłą do \mathbf{q}_k , znoszenie się składników w obliczeniach numerycznych jest tym mniejsze im bliższy kąt prostego jest kąt między \mathbf{q}_i i \mathbf{q}_k . Tak więc algorytm modyfikowany w każdej iteracji „poprawia” dane dla następnych iteracji.

Nie będziemy na tym wykładzie przeprowadzać analizy błędów zaokrągleń, ale warto zapoznać się z jej wynikami, dla przypadku rzeczywistego. Macierz $Q_1 = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$, której kolumny są ortonormalne, powinna spełniać warunek $Q_1^T Q_1 = I_n$ (macierz Q_1^T jest jej pseudoodwrotnością). Za miarę błędu możemy przyjąć liczbę $\|Q_1^T Q_1 - I_n\|_2$. Wynik działania algorytmu klasycznego w arytmetyce zmiennopozycyjnej z błędem względnym reprezentacji $\nu = 2^{-t}$ spełnia warunek

$$\|Q_1^T Q_1 - I_n\|_2 \leq \min\{n^{3/2}, 1.4mn^{3/2}(\text{cond } A)^{n-1}\nu\},$$

błąd wyniku algorytmu modyfikowanego to

$$\|Q_1^T Q_1 - I_n\|_2 \leq 4.2mn^{3/2} \text{cond } A \nu,$$

natomiast algorytm z reortogonalizacją daje

$$\|Q_1^T Q_1 - I_n\|_2 \leq F\nu,$$

gdzie $F = O(mn^{3/2})$, zaś liczba $\text{cond } A \stackrel{\text{def}}{=} \|A\|_2 \|A^+\|_2$ jest wskaźnikiem uwarunkowania zadania ortogonalizacji.

Odbicia Householdera

Ponieważ $Q^H = Q^{-1}$, więc mamy $R = Q^H A$. Przekształcenie liniowe reprezentowane przez macierz Q^H jest izometrią. Zatem czynnik R rozkładu unitarno-trójkątnego możemy otrzymać poddając kolumny macierzy A pewnemu przekształceniu, które jest izometrią. Obraz k -tej kolumny macierzy A , tj. k -ta kolumna macierzy R , jest elementem przestrzeni rozpiętej przez wektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathbb{K}^m$.

Alternatywne wobec ortogonalizacji Grama-Schmidta metody znajdowania rozkładu unitarno-trójkątnego macierzy polegają na konstrukcji ciągu

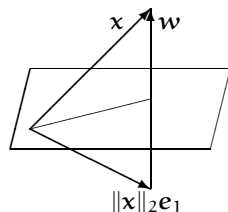
odpowiednich izometrii, których złożenie jest reprezentowane przez macierz Q . Odpowiednie są izometrie łatwe do skonstruowania. Powszechnie stosuje się dwa rodzaje takich przekształceń: odbicia symetryczne względem hiperpłaszczyzny i obroty. Zaczniemy od odbić.

Macierz H odbicia symetrycznego przestrzeni \mathbb{K}^m względem hiperpłaszczyzny, której wektorem normalnym jest wektor $w \neq 0$ wyraża się wzorem

$$H = I_m - \frac{2}{w^H w} w w^H.$$

Def. Odbiciem Householdera nazywamy odbicie względem hiperpłaszczyzny dobranej tak, aby obraz w tym odbiciu danego wektora $x \neq 0$ miał kierunek wskazanego wektora $y \neq 0$.

Konstrukcja odbicia Householdera sprowadza się do skonstruowania odpowiedniego wektora w . Przypuśćmy, że $y = e_1$. Ponieważ odbicie jest izometrią, więc obrazem wektora x musi być $\|x\|_2 e_1$ albo $-\|x\|_2 e_1$. Pierwszy z tych wektorów będzie obrazem x jeśli przyjmiemy $w = x - \|x\|_2 e_1$, a drugi jeśli $w = x + \|x\|_2 e_1$.



Wybór znaku jest podyktowany dążeniem do zmniejszenia błędów zaokrągleń. Gdyby wektory x i e_1 były równoległe, to w jednym z tych przypadków dostalibyśmy $w = 0$, czego nie chcemy. Jeśli wektory są prawie równoległe, to zły wybór znaku powoduje znoszenie się składników, czyli utratę dokładności. Zatem znak należy wybierać tak, aby otrzymać dłuższy wektor w . Jeśli chcemy, aby obraz wektora x miał kierunek wektora e_1 , to wybór znaku jest bardzo prosty: wystarczy zbadać znak pierwszej współrzędnej wektora x .

Zastosujmy teraz odbicia w celu otrzymania rozkładu unitarno-trójkątnego macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Jeśli $m = n$, to wykonamy $n - 1$ odbić, a jeśli $m > n$, to trzeba będzie wykonać n odbić, tj. tyle ile jest kolumn. W pierwszym kroku konstruujemy odbicie tak, aby pierwsza kolumna macierzy A , tj. wektor a_1 , została przekształcona na wektor o kierunku wektora e_1 . Odbiciu poddajemy wszystkie kolumny macierzy A . W rezultacie dostaniemy macierz, która pod diagonalą w pierwszej kolumnie ma same zera.

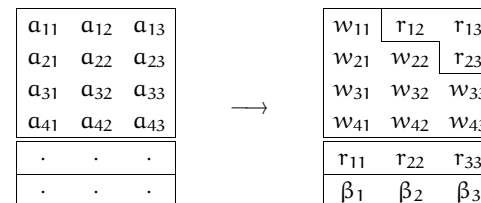
W każdym następnym kroku przekształcamy macierz tak, aby otrzymać zera pod diagonalą w kolejnej kolumnie. Przypuśćmy, że jej numerem jest k . Wtedy „zapominamy” o początkowych $k - 1$ współczynnikach wszystkich kolumn, tj.

przekształcamy wektory w przestrzeni \mathbb{K}^{m-k+1} , pozostawiając początkowe współrzędne niezmienione. Po odrzuceniu tych współrzędnych, pierwsze $k - 1$ kolumn składa się z samych zer, na przetwarzanie których nie tracimy czasu. Wyznaczamy wektor $\hat{w}_k \in \mathbb{K}^{m-k+1}$ tak, tak aby obraz k -tej kolumny (bez początkowych $k - 1$ współczynników) w odbiciu określonym przez ten wektor przeszedł na kierunek wektora $e_1 \in \mathbb{K}^{m-k+1}$. Tak określone przekształcenie „całych” kolumn jest odbiciem względem hiperpłaszczyzny, której wektorem normalnym jest wektor

$$w_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{w}_k \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu całej procedury mamy macierz trójkątną R i wektory w_1, \dots, w_n , które określają kolejne odbicia. Mamy zatem reprezentację macierzy Q w postaci ciągu tych wektorów. Trzeba podkreślić, że nie należy jawnie wyznaczać macierzy Q , tj. obliczać jej współczynników, choć byłoby to możliwe. Po pierwsze, byłoby to miejsce- i czasochłonne. Po drugie, popełnione przy tym błędy zaokrągleń byłyby szkodliwe. Mając wektory w_1, \dots, w_n oraz dowolny wektor $x \in \mathbb{R}^m$, możemy szybko i z dobrą dokładnością obliczyć wektor $Q^H x$ lub Qx . W celu obliczenia $Q^H x$ wystarczy wektor x poddać kolejno tym samym przekształceniom co kolumny macierzy A . Aby obliczyć Qx , poddajemy wektor x tym samym odbiciom w odwrotnej kolejności.

Jeśli współczynniki macierzy A są przechowywane w prostokątnej tablicy i procedura rozkładu ma je zastąpić współczynnikami r_{ij} macierzy R , więc miejsca pod diagonalą możemy użyć do przechowania wektorów w_k . W każdej kolumnie zabraknie nam jednego miejsca, a zatem trzeba utworzyć dodatkową tablicę o długości n . Ponadto, dla przyspieszenia obliczeń warto dla każdego wektora w_k obliczyć i zapamiętać liczbę $\beta_k = \frac{2}{w_k^H w_k}$, co wymaga dalszych n miejsc. Miejsca w tablicach można wykorzystać zgodnie z takim schematem:



Zamiast wektorów w_k można też przechowywać wektory $v_k = w_k c_k$ (zauważmy, że długość wektora normalnego hiperpłaszczyzny odbicia jest nieistotna), przy

czyż współczynniki skalujące c_k można dobrać tak, aby k -ta (pierwsza niezerowa) współrzędna wektora v_i była równa $\gamma_k = v_k^H v_k / 2$. Dzięki temu oprócz tablicy, która początkowo zawiera współczynniki macierzy A , potrzeba tylko n dodatkowych miejsc w pamięci.

Obrotы Givensa

Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Odbicie Householdera przekształca w jednym kroku macierz tak, aby pod diagonalą w kolejnej kolumnie pojawiły się zera. Można ten sam efekt osiągnąć po kolei „zerując” odpowiednie współczynniki macierzy. Jeśli chcemy przekształcić macierz tak, aby w miejsce współczynnika a_{ik} (dla $i \neq k$) otrzymać 0, to możemy dokonać obrotu w płaszczyźnie rozpiętej przez wektory e_i i e_k o kąt $-\phi$, taki że

$$\cos \phi = c = \frac{a_{kk}}{\rho}, \quad \sin \phi = s = \frac{a_{ik}}{\rho}, \quad \rho = \pm \sqrt{a_{kk}^2 + a_{ik}^2}.$$

Wykonując taki obrót (zwany obrotom Givensa) zmieniamy tylko dwa wiersze macierzy: i -ty i k -ty.

Zauważmy, że nie ma potrzeby obliczania liczby ϕ . Wystarczyłoby zapamiętać c i s . Jeszcze lepiej byłoby jednak reprezentować obrót za pomocą jednej tylko liczby, powiedzmy ξ , którą można by przechować na miejscu współczynnika a_{ik} , który przekształcamy na 0. Taką liczbę możemy otrzymać za pomocą następującego algorytmu Stewarta, który realizuje wzory zaprojektowane w celu uniknięcia nadmiaru i utraty dokładności w arytmetyce zmiennopozycyjnej:

```

if |akk| ≥ |aik| then begin
  if akk ≠ 0 then begin d := aik/akk; r := √(1 + d2); ξ := d/r end
  else ξ := 0
end
else begin
  if aik ≠ 0 then begin d := akk/aik; r := √(1 + d2); ξ := r/d end
  else ξ := 1
end;

```

Na podstawie tak obliczonego ξ możemy odtworzyć liczby c i s :

```

if |ξ| < 1 then begin c := √(1 - ξ2); s := ξ end
else if |ξ| = 1 then begin c := 0; s := 1 end
else begin c := 1/ξ; s := √(1 - c2);

```

Podobnie jak w przypadku odbić, nie należy jawnie wyznaczać macierzy

ortogonalnej Q , tylko w razie potrzeby otrzymania iloczynu tej macierzy i wektora, odtworzyć i zastosować kolejne obroty. Dokonanie rozkładu ortogonalno-trójkątnego za pomocą obrotów jest droższe niż zastosowanie odbić (choć są jej warianty z tzw. obrotami skalowanymi, które mają ten sam koszt co odbicia). Metoda ta jest wygodna i dlatego jest często stosowana do tzw. macierzy rzadkich, czyli takich, w których większość współczynników jest równa 0.

Zadania i problemy

1. Udowodnij, że jeśli macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest nieosobliwa oraz $A = QR$, gdzie Q jest macierzą ortogonalną ($Q^T Q = I_n$), a macierz R jest trójkątna górna, to przy założeniu, że współczynniki na diagonalu macierzy R są dodatnie, taki rozkład ortogonalno-trójkątny jest jednoznaczny.

Jakie elementy rozkładu ortogonalno-trójkątnego macierzy prostokątnej o dowolnym rzędzie są jednoznaczne?

2. Oblicz koszt ortogonalizacji Grama-Schmidta (klasycznej lub modyfikowanej) zastosowanej do macierzy o wymiarach $m \times n$.
3. Opisz właściwy sposób obliczania obrazu dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ w odbiciu, tj. wektora

$$(I_m - w_k \beta_k w_k^T) x,$$

jeśli znany jest wektor w_k i liczba $\beta_k = \frac{2}{w_k^T w_k}$. Uzasadnij, dlaczego sposób ten jest jedynie słuszny.

4. Sprowadź za pomocą odbić Householdera macierz

$$\begin{bmatrix} -1 & -9 & -4 \\ -1 & 10 & 21 \\ 1 & 2 & -48 \\ 1 & -7 & 54 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

do postaci trójkątnej. Konstruując wektory normalne hiperpłaszczyzn odbicia wybieraj znaki zgodnie z regułą przedstawioną na wykładzie.

5. Oblicz wektor $y = Qx$, gdzie $x = [1, 0, 0, 1]^T$, a macierz Q jest ortogonalnym czynnikiem rozkładu macierzy z poprzedniego zadania. Zrób to bez wyznaczania współczynników macierzy Q .
6. Udowodnij poprawność (z punktu widzenia algebry) wzorów w algorytmie Stewarta. Sprawdź, że liczba ξ obliczona tym algorytmem spełnia jeden z warunków $|\xi| < \sqrt{2}/2$, $|\xi| = 1$ lub $|\xi| > \sqrt{2}$. Przekonaj się, że dzięki temu podczas obliczania $1 - \xi^2$ albo $1 - (1/\xi)^2$ w celu odtworzenia liczb c i s nie występuje znoszenie się argumentów.
7. Zaproponuj algorytm obliczania długości wektora, tj. liczby $\|x_2\|_2 = \sqrt{x^T x}$, odporny na ile to możliwe na nadmiar i niedomiar w arytmetyce zmiennopozycyjnej.

8. Sprawdź, że ponieważ

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ \bar{s} & \bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca - sb \\ \bar{s}a + \bar{c}b \end{bmatrix},$$

więc przyjmując

$$s = \frac{-\bar{b}}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}, \quad c = \frac{\bar{a}}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}},$$

otrzymamy $\bar{s}a + \bar{c}b = 0$ oraz $|ca - sb| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Możemy zatem uogólnić obroty Givensa tak, aby rozłożyć na czynniki unitarne i trójkątny dowolną macierz zespoloną.

Liniove zadania najmniejszych kwadratów

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi, $Ax = b$. Jeśli układ ten jest sprzeczny, to na tym stwierdzeniu można byłoby poprzestać, gdyby nie fakt, że życie nie zawsze zadowala się najprostszą poprawną teorią.

Przypuśćmy, że mamy znaleźć wektor $x \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), na podstawie danych otrzymanych z pomiarów. Niech każdy pomiar polega na zmierzeniu wartości pewnego (znanego nam) funkcjonału liniowego φ_i , mamy zatem liczby $b_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$. Jeśli funkcjonały φ_i są liniowo niezależne, to, jak wiemy, wystarczy dokonać n pomiarów — otrzymamy w ten sposób układ n równań o jednoznacznym rozwiązaniu. Pomiary mają jednak to do siebie, że ich wyniki są niedokładne. Aby wyeliminować skutki błędów przypadkowych, często wykonuje się więcej niż n pomiarów (nawet dużo więcej), czego rezultatem jest układ równań liniowych o większej liczbie równań niż niewiadomych. Jest przy tym prawdopodobne (zwykle można być tego pewnym), że układ ten jest sprzeczny.

Chcąc uwzględnić wszystkie pomiary (bo wynik każdego z nich jednak niesie jakąś informację o wektorze x) musimy zrezygnować z nadziei znalezienia rozwiązania (które na ogół nie istnieje). Zamiast tego możemy zażądać, aby wektor x , który przyjmujemy za rozwiązanie, spełniał równania *z jak najmniejszym błędem*. Aby słowom „z jak najmniejszym” nadać jednoznaczny sens, wprowadzimy pojęcie residuum układu równań.

Def. Niech $Ax = b$ będzie układem m równań liniowych z niewiadomym wektorem $x \in \mathbb{K}^n$. Residuum układu dla ustalonego wektora $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ nazywamy wektor $r = A\hat{x} - b$.

Def. Niech $Ax = b$ będzie układem równań liniowych z niewiadomym wektorem x , w ogólności sprzeczny. Liniowym zadaniem najmniejszych kwadratów (LZNK) nazywamy zadanie znalezienia wektora $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$, takiego że

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|A\hat{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2.$$

Inaczej mówiąc, rozwiązanie zadania polega na znalezieniu wektora \hat{x} , dla którego długość (norma druga) residuum jest najmniejsza.

Jeśli układ jest niesprzeczny, to ma co najmniej jedno rozwiązanie; residuum układu dla dowolnego rozwiązania jest wektorem zerowym, a więc najkrótszym. Dlatego rozwiązanie liniowego zadania najmniejszych kwadratów dla układu niesprzecznego jest „zwykłym” rozwiązaniem tego układu.

Regularne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów

Def. Jeśli macierz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ jest kolumnowo-regularna, to liniowe zadanie najmniejszych kwadratów postawione dla układu równań liniowych z tą macierzą nazywa się regularnym liniowym zadaniem najmniejszych kwadratów.

Twierdzenie. Dowolne regularne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów ma jednoznaczne rozwiązanie. Wektor $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ jest rozwiązaniem tego zadania wtedy i tylko wtedy, gdy wektor residuum układu dla wektora \hat{x} jest prostopadły (w sensie iloczynu skalarnego $\langle x, y \rangle = y^H x$) do podprzestrzeni $\text{im } A \subset \mathbb{K}^m$.

Dowód: Niech macierz A układu $Ax = b$ będzie kolumnowo-regularna. Niech y oznacza obraz wektora b w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń $\text{im } A$. Istnieje zatem wektor \hat{x} , taki że $A\hat{x} = y$. Udowodnimy, że wektor \hat{x} jest rozwiązaniem rozpatrywanego zadania najmniejszych kwadratów i że nie ma innych rozwiązań.

Oznaczmy $\hat{r} = y - b$ oraz $r = Ax - b$ dla dowolnego $x \in \mathbb{K}^n$. Wektor $z = A(x - \hat{x}) = r - \hat{r}$ jest elementem podprzestrzeni $\text{im } A$, a zatem wektory z i \hat{r} są prostopadłe. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że

$$\|r\|_2^2 = \|\hat{r}\|_2^2 + \|z\|_2^2,$$

a zatem norma druga residuum układu dla wektora \hat{x} jest najmniejsza. Ponieważ macierz A jest kolumnowo-regularna, tj. $\ker A = \{0\}$, więc dla każdego wektora $x \neq \hat{x}$ wektor z jest różny od 0 , co kończy dowód jednoznaczności rozwiązania regularnego LZNK. \square

Warunek podany w twierdzeniu umożliwia praktyczne rozwiązywanie zadania, które dzięki niemu można sprowadzić do skończonego obliczenia. Zauważmy, że wektor residuum dla poszukiwanego rozwiązania ma być prostopadły do podprzestrzeni $\text{im } A$. Aby tak było, wystarczy by wektor ten był prostopadły do wszystkich elementów dowolnej bazy tej przestrzeni. Mamy odpowiednią bazę, składa się ona z kolumn macierzy A . Jeśli więc $A = [a_1, \dots, a_n]$, to muszą być spełnione równania

$$a_i^H (A\hat{x} - b) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Możemy je zapisać wszystkie naraz, jednym wzorem, który po prostych przekształceniach wygląda tak:

$$A^H A \hat{x} = A^H b.$$

Wyprowadzony wyżej układ równań liniowych, którego rozwiązanie jest rozwiązaniem RLZNK, ma macierz o wymiarach $n \times n$, która jest macierzą Grama

bazy przestrzeni $\text{im} A$ złożonej z kolumn macierzy A . Macierz ta jest dodatnio określona, a zatem nieosobliwa. Powyższy układ równań nosi nazwę układu równań normalnych. Układanie i rozwiązywanie równań normalnych, czyli tzw. algorytm równań normalnych, jest najprostszą metodą (także numeryczną) rozwiązywania RLZNK.

Regularne LZNK i aproksymacja średniokwadratowa

Niech V oznacza dowolną przestrzeń euklidesową lub unitarną i niech U oznacza jej skończenie wymiarową podprzestrzeń. Niech \mathbf{b} oznacza dowolny element przestrzeni V . Zadanie aproksymacji średniokwadratowej polega na znalezieniu elementu \mathbf{y} podprzestrzeni U , takiego że *odległość* wektorów \mathbf{y} i \mathbf{b} , czyli liczba $\|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{y} - \mathbf{b}, \mathbf{y} - \mathbf{b} \rangle}$, jest najmniejsza.

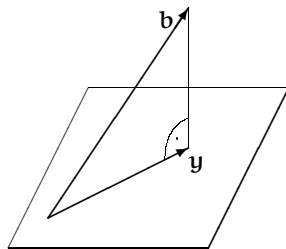
Jeśli przyjmiemy $V = \mathbb{K}^m$, to łatwo możemy zauważyć, że zadanie aproksymacji średniokwadratowej jest równoważne liniowemu zadaniu najmniejszych kwadratów. Podprzestrzeń U jest w tym przypadku rozpięta przez kolumny macierzy A . Wektor \mathbf{y} , który jest elementem podprzestrzeni U położonym najbliżej wektora \mathbf{b} , jest kombinacją liniową kolumn macierzy A , o współczynnikach, które są kolejnymi współrzędnymi wektora $\hat{\mathbf{x}}$. Jeśli więc liniowe zadanie najmniejszych kwadratów jest regularne, to jego rozwiązaniem jest wektor $\hat{\mathbf{x}}$, który składa się ze współczynników wektora \mathbf{y} — optymalnego przybliżenia wektora \mathbf{b} w podprzestrzeni U — w bazie złożonej z kolumn macierzy A .

Powtarzając prawie dosłownie dowód twierdzenia o rozwiązaniu RLZNK, możemy uogólnić je na przypadek zadania aproksymacji średniokwadratowej. Ogólnie, jeśli wektor \mathbf{y} jest optymalnym przybliżeniem w podprzestrzeni U wektora \mathbf{b} , to wektor $\mathbf{y} - \mathbf{b}$ jest prostopadły do U , albo równoważnie, wektor \mathbf{y} jest obrazem wektora \mathbf{b} w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń U . Zatem, jeśli macierz A reprezentuje bazę podprzestrzeni U , to na podstawie wzoru opisującego rzut prostopadły, mamy

$$\mathbf{y} = A(A^H \cdot A)^{-1} A^H \mathbf{b}.$$

Porównajmy to ze wzorem opisującym rozwiązanie RLZNK:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b}.$$



Oczywiście, optymalne przybliżenie \mathbf{y} wektora prawej strony \mathbf{b} przez element podprzestrzeni $\text{im} A$, jest równe $A\hat{\mathbf{x}}$.

Jeszcze jedno: macierz $A(A^H A)^{-1} A^H$ jest macierzą rzutu prostopadłego przestrzeni \mathbb{K}^m na podprzestrzeń $\text{im} A$. Ponadto, rząd macierzy $(A^H A)^{-1} A^H$ jest równy rządowi macierzy A (który jest równy liczbie jej kolumn) i mamy też $(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$. Stąd wynika, że macierz $(A^H A)^{-1} A^H$ jest pseudoodwrotnością macierzy kolumnowo-regularnej A :

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

Rozwiązanie regularnego liniowego zadania najmniejszych kwadratów postawionego dla układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ wyraża się więc wzorem

$$\hat{\mathbf{x}} = A^+ \mathbf{b}.$$

Uwaga: Wzór ten ma takie samo znaczenie w obliczeniach numerycznych, jak wzór $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$ opisujący rozwiązanie układu równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z macierzą nieosobliwą A , to znaczy żadne z wyjątkiem szczególnych zadań, dla których znalezienie macierzy A^+ (odpowiednio A^{-1}) jest bardzo łatwe.

Nieregularne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów

Jeśli macierz A nie jest kolumnowo-regularna, to liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla układu równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ma niejednoznaczne rozwiązanie. Dokładniej, jeśli norma residuum układu dla pewnego wektora $\hat{\mathbf{x}}$ przyjmuje minimalną wartość, to rozwiązaniem tego zadania, które określamy mianem nieregularnego liniowego zadania najmniejszych kwadratów (NLZNK), jest także wektor $\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ dla każdego wektora $\mathbf{z} \in \ker A$.

Jeśli więc wektor $\hat{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem NLZNK dla układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, to zbiór rozwiązań jest warstwą $\hat{\mathbf{x}} + \ker A$ przestrzeni \mathbb{K}^n . Przestrzeń $\ker A$ możemy reprezentować za pomocą jej bazy — zadanie znalezienia bazy jądra macierzy nauczyliśmy się rozwiązywać w pierwszym semestrze. Pozostaje problem znalezienia dowolnego rozwiązania NLZNK, czyli reprezentanta warstwy, która jest zbiorem wszystkich rozwiązań.

Twierdzenie: Najkrótszym (tj. o najmniejszej normie drugiej) rozwiązaniem nieregularnego liniowego zadania najmniejszych kwadratów postawionego dla układu równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jest wektor $\hat{\mathbf{x}} = A^+ \mathbf{b}$.

Dowód: Należy dowieść, że wektor \hat{x} jest rozwiązaniem NLZNK i że jest to rozwiązanie najkrótsze. Dowód pierwszego z tych faktów jest taki sam jak dowód twierdzenia dla zadań regularnych. Wektor $A\hat{x} = AA^+b$ jest, zgodnie z wcześniej podaną definicją macierzy pseudoodwrotnej do A , obrazem wektora b w rzucie na podprzestrzeń $\text{im } A$, zatem residuum układu, $A\hat{x} - b$, jest wektorem prostopadłym do $\text{im } A$ i (jak dowiedliśmy) dla żadnego innego wektora x nie może być krótsze.

Aby dowieść, że wektor \hat{x} jest najkrótszym rozwiązaniem NLZNK, wystarczy zauważyć, że wektor ten jest prostopadły do podprzestrzeni $\ker A$ (co wynika z tego, że podprzestrzeń $\text{im } A^+$ jest prostopadła do $\ker A$). Dlatego każde inne rozwiązanie, $x = \hat{x} + z$, gdzie $z \in \ker A$, jest dłuższe:

$$\|x\|_2^2 = \|\hat{x}\|_2^2 + \|z\|_2^2.$$

□

Nieregularne liniowe zadania najmniejszych kwadratów są na ogół trudne do numerycznego rozwiązywania. Na podstawie wzoru opisującego rozwiązanie (za pomocą pseudoodwrotności macierzy A) można opracować praktyczne algorytmy; podobnie jak algorytmy rozwiązywania układów z macierzą nieosobliwą, nie polegają one na znajdowaniu pseudoodwrotności.

Istotny problem leży w uwarunkowaniu numerycznym takich zadań. Dowolnie małe zaburzenie macierzy niepełnego rzędu może rząd ten zmienić, co powoduje ogromną zmianę macierzy pseudoodwrotnej (i to im mniejsze zaburzenie, tym zmiana macierzy pseudoodwrotnej jest większa — jeśli $\varepsilon \rightarrow 0$, to $1/\varepsilon \rightarrow \infty$). Trudność polega więc na takim wykonywaniu obliczeń z błędami zaokrągleń, aby nie spowodowały one zmiany rzędu macierzy; dodatkowo należy nieraz rząd ten określić na podstawie obciążonych błędami zaokrągleń współczynników przekształcaniej macierzy. Nie będzie w tym wykładzie opisu metod rozwiązywania zadań nieregularnych (w razie potrzeby proszę zaglądać do książek), ale niniejsze ostrzeżenie, że mając do czynienia z takim zadaniem trzeba zachować ostrożność, jest niezbędną.

Dualne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów

Jeśli macierz A układu równań $Ax = b$ jest wierszowo-regularna (co może nastąpić wtedy gdy liczba równań, m , nie jest większa niż liczba niewiadomych, n), układ jest niesprzeczny i wtedy każde rozwiązanie odpowiedniego LZNK jest rozwiązaniem tego układu. Mając taki nieokreślony układ równań liniowych możemy postawić

dualne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (DLZNK), które polega na znalezieniu rozwiązania najkrótszego. Można też uogólnić zadanie w ten sposób, że dla ustalonego (nie będącego rozwiązaniem) wektora $x_0 \in \mathbb{K}^n$ zażądać znalezienia takiego rozwiązania \hat{x} układu, aby liczba $\|x_0 - \hat{x}\|_2$ była najmniejsza.

Wektor \hat{x} jest rozwiązaniem DLZNK wtedy, gdy jest prostopadły do podprzestrzeni $\ker A$, czyli gdy należy do podprzestrzeni $\text{im } A^H$ (dowód na ćwiczeniach). Dlatego istnieje wektor $y \in \mathbb{K}^m$, taki że $\hat{x} = A^H y$, skąd otrzymujemy dualny układ równań normalnych:

$$AA^H y = b.$$

Możemy ten układ rozwiązać (macierz AA^H jest dodatnio określona, czyli nieosobliwa), a następnie obliczyć wektor \hat{x} .

Zauważmy, że na podstawie dualnego układu równań normalnych możemy otrzymać wzór na pseudoodwrotność macierzy wierszowo-regularnej:

$$A^+ = A^H(AA^H)^{-1}.$$

Ponieważ małe zaburzenia macierzy wierszowo-regularnej nie mogą zmienić jej rzędu, więc zadanie dualne w zasadzie można dosyć bezpiecznie rozwiązywać przez rozwiązywanie dualnego układu równań normalnych (ale istnieją też inne metody numeryczne).

Zadania i problemy

- Przypuśćmy, że pewne zjawisko jest opisane za pomocą funkcji $f(x) = ax + b$. Możemy dla ustalonych liczb x zmierzyć wartości $f(x)$. Zadanie polega na znalezieniu współczynników a i b na podstawie takich pomiarów. Przypuśćmy zatem, że zmierzylśmy

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2.$$

Wartości otrzymane z pomiarów są obciążone błędami. Oblicz współczynniki a i b , takie że liczba

$$\sum_{x=0}^3 (ax + b - f(x))^2$$

jest najmniejsza. W tym celu utwórz i rozwiąż układ równań normalnych. Następnie narysuj wykres funkcji f .

2. Dane są dwa układy równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Drugi układ został otrzymany z pierwszego przez pomnożenie pierwszych dwóch równań przez 2. Czy rozwiązania liniowych zadań najmniejszych kwadratów dla obu tych układów są takie same i dlaczego nie są?

Zinterpretuj różnicę między rozwiązaniami powyższych układów na wykresach funkcji $f(x) = ax + b$, które odpowiadają tym rozwiązaniom.

3. Na podstawie definicji macierzy pseudoodwrótnej (strona 18.1) udowodnij, że dla dowolnej macierzy A spełnione są równości

$$AA^+A = A \quad \text{i} \quad A^+AA^+ = A^+$$

(w tym celu przedstaw dowolny wektor x w postaci sumy wektorów $z \in \ker A$ i $y \perp z$).

4. Udowodnij, że macierze AA^+ oraz A^+A są hermitowskie (wystarczy powołać się na wcześniejsze zadanie, które polegało na udowodnieniu, że macierze rzutów prostopadłych są hermitowskie).
5. (trudniejsze). Na podstawie definicji macierzy pseudoodwrótnej udowodnij, że jeśli $C = AB$, to $C^+ = B^+A^+$.

Wskazówka: Rozpatrując macierz C^+C weź dowolny wektor x i rozłóż go na sumę wektorów y i z takich jak w zadaniu 3. Obraz wektora x w przekształceniu, którego macierzą jest B przedstaw w postaci sumy wektorów, z których jeden należy do $\ker A$, a drugi jest do niego prostopadły. Następnie zbadaj przeciwobrazy tych wektorów w podprzestrzeni prostopadłej do $\ker B$.

6. Niech $x_0 \in \mathbb{K}^n$. Udowodnij, że rozwiązanie układu równań liniowych $Ax = b$ z macierzą $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, gdzie $\text{rank } A = m \leq n$, takie że liczba $\|x - x_0\|_2$ jest najmniejsza, można otrzymać rozwiązując kolejno układ równań liniowych

$$AA^+y = b - Ax_0,$$

a następnie obliczając wektor $x = x_0 + A^+y$.

7. Dowolną macierz $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ rzędu r można przedstawić w postaci iloczynu $A = UBV^T$, takiego że macierze $U \in \mathbb{R}^{m,m}$ i $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ są ortogonalne, zaś macierz B ma postać blokową

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

z blokiem $B_{11} \in \mathbb{R}^{r,r}$, który jest macierzą nieosobliwą (rozkład ten oczywiście nie jest jednoznaczny; jeśli nie jesteś pewien, że rozkład taki istnieje, udowodnij to przez wskazanie sposobu znalezienia go). Udowodnij, że $A^+ = VB^+U^T$, gdzie macierz $B^+ \in \mathbb{R}^{n,m}$ ma postać blokową

$$B^+ = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Wyznacz (na podstawie wzorów podanych na wykładzie) pseudoodwrótności macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując liniowe zadania najmniejszych kwadratów nie wyznaczaj pseudoodwrótności macierzy, chyba, że masz dobre usprawiedliwienie.

9. Znajdź najkrótsze rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1, \\ 2x + y + 2z = 2, \end{cases}$$

przez rozwiązanie dualnego układu równań normalnych.

10. Udowodnij, że układ równań normalnych $A^HAx = A^Hb$ jest zawsze niesprzeczny, nawet jeśli macierz A nie jest kolumnowo-regularna (przez co macierz A^HA jest osobliwa).

Linowe zadania najmniejszych kwadratów, c.d.

Zastosowanie rozkładu ortogonalno-trójkątnego

Rozważmy regularne liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla układu równań

$$Ax = b.$$

Jak wiemy, jego jedyne rozwiązanie spełnia układ równań normalnych

$$A^H Ax = A^H b.$$

Macierz kolumnowo-regularną $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ można przedstawić w postaci iloczynu macierzy $Q_1 \in \mathbb{K}^{m,n}$ o kolumnach wzajemnie prostopadłych o długości 1 i nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej $R_1 \in \mathbb{K}^{n,n}$. Podstawmy to do układu równań normalnych:

$$R_1^H Q_1^H Q_1 R_1 x = R_1^H Q_1^H b.$$

Mamy $Q_1^H Q_1 = I_n$; po pomnożeniu obu stron przez R_1^{-H} (odwrotność macierzy hermitowsko sprzężonej z R_1 , jeśli ktoś zapomniał, co oznacza ten symbol), otrzymujemy układ równań liniowych

$$R_1 x = Q_1^H b,$$

który ma tylko jedno rozwiązanie, będące rozwiązaniem wyjściowego regularnego LZNK.

Powyższe przekształcenie leży u podstaw algorytmu rozwiązywania RLZNK, który jest alternatywą dla algorytmu równań normalnych. Aby zastosować rozkład ortogonalno-trójkątny do rozwiązania zadania, należy kolejno

1. znaleźć czynniki Q_1 i R_1 rozkładu macierzy A , np. za pomocą procedury ortonormalizacji Grama-Schmidta,
2. obliczyć wektor $y = Q_1^H b$,
3. rozwiązać układ równań liniowych $R_1 x = y$.

Zamiast rozkładu na czynniki Q_1 i R_1 , takie że macierz Q_1 ma wymiary macierzy A , możemy również użyć rozkładu macierzy A na czynniki $Q \in \mathbb{K}^{m,m}$ i $R \in \mathbb{K}^{m,n}$, z których Q jest macierzą ortogonalną, zaś R — prostokątną trójkątną górną. Macierze te mają następującą strukturę blokową:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

w której bloki Q_1 i R_1 są (z dokładnością do znaków wierszy i kolumn) takie same jak macierze otrzymane za pomocą ortonormalizacji. Taki rozkład otrzymamy

stosując odbicia Householdera lub obroty Givensa, przy czym macierz Q otrzymamy w postaci ciągu odbić albo obrotów, które kolejno trzeba wykonać (i tylko z takiej reprezentacji korzystamy w obliczeniach numerycznych).

Przyjrzyjmy się przekształceniom układu równań, które wykonujemy w tym podejściu. Jeśli podstawimy $A = QR$ do układu równań normalnych i skorzystamy z równości $Q^H Q = I_m$, to będziemy mieli

$$R^H R x = R^H Q^H b, \quad \text{czyli} \quad \begin{bmatrix} R_1^H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} R_1^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^H b \\ Q_2^H b \end{bmatrix}.$$

Obie strony tej równości pomnożmy przez macierz $(R^H)^+$. Ponieważ macierz R^H jest wierszowo-regularna, więc $(R^H)^+ R^H = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a zatem otrzymamy układ równań $Rx = Q^H b$, w którym wyróżnić możemy dwa podukłady:

$$\begin{cases} R_1 x = Q_1^H b, \\ 0x = Q_2^H b. \end{cases}$$

Od razu zauważamy, że układ ten jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $Q_2^H b \neq 0$.

Układ równań $Rx = Q^H b$ możemy otrzymać z układu $Ax = b$ mnożąc jego strony przez macierz Q^H . Przekształcenie, które reprezentuje ta macierz, jest izometrią. Izometrie zachowują długość (tj. normę drugą) każdego wektora. Jeśli więc wektor $r = Ax - b$ jest residuum układu dla pewnego wektora x , to wektor $Q^H r = Q^H(Ax - b) = Rx - Q^H b$, który jest residuum układu $Rx = Q^H b$ dla tego samego x , ma tę samą długość co r . Łatwo jest teraz zauważyć, że najkrótsze residuum układu możemy otrzymać przyjmując wektor x , będący rozwiązaniem układu $R_1 x = b$. Najkrótsze osiągalne residuum układu $Ax = b$ ma więc długość równą $\|Q_2^H b\|_2$.

W ten sposób uzasadniliśmy możliwość zastosowania do rozwiązania LZNK rozkładu macierzy A na macierz ortogonalną Q i prostokątną trójkątną górną R . Algorytm korzystający z odbić Householdera jest następujący:

1. Wykonaj n odbić tak, aby macierz A została przekształcona na macierz trójkątną górną R . Jednocześnie z kolumnami macierzy przekształcaj wektor prawej strony (wynikiem tego obliczenia jest wektor $Q^H b$).
2. Odrzuć ostatnie $m - n$ wierszy macierzy R (składają się one z samych zer) i tyleż współrzędnych przekształconego wektora prawej strony. Rozwiąż układ pozostałych n równań z n niewiadomymi, co da rozwiązanie LZNK.
3. Norma residuum dla otrzymanego rozwiązania jest równa normie drugiej wektora odrzuconych $m - n$ współrzędnych przekształconego wektora prawej strony.

Dobór metody rozwiązywania

Spośród przedstawionych metod rozwiązywania regularnych liniowych zadań najmniejszych kwadratów najmniej działań zabiera utworzenie i rozwiązanie (np. metodą Choleskiego, o której tu nie było mowy — to jest metoda rozkładania macierzy hermitowskiej dodatnio określonej A na czynniki trójkątne: $A = LL^H$, dwukrotnie tańsza od eliminacji Gaussa) układu równań normalnych. Pozostałe algorytmy, uporządkowane w kolejności rosnącego kosztu, to algorytm odbić Householdera, algorytm Givensa i algorytm modyfikowany ortogonalizacji Grama-Schmidta (koszty wszystkich tych algorytmów są rzędu n^2m operacji, tak więc różnią się tylko o czynnik stały).

Gdyby uporządkować te same algorytmy w kolejności od najdokładniejszego do najmniej dokładnego (w realizacji z arytmetyką zmiennopozycyjną), to okazało by się, że kolejność ta jest odwrotna. Algorytm równań normalnych można bezpiecznie stosować wtedy, gdy układ równań $Ax = b$ jest *silnie sprzeczny*, tj. gdy odległość wektora b od podprzestrzeni $\text{im } A$ (czyli najmniejsza osiągalna długość residuum) jest duża, a jednocześnie norma druga rozwiązania LZNK jest mała. Dla takich zadań algorytm równań normalnych jest numerycznie stabilny. W przeciwnym razie (tj. jeśli układ jest „prawie niesprzeczny”) wynik otrzymany za pomocą tego algorytmu może być bardzo niedokładny.

Przyczyna, dla której algorytm równań normalnych jest gorszy (jeśli chodzi o dokładność) od algorytmów wykorzystujących rozkład ortogonalno-trójkątny jest taka: wskaźnik uwarunkowania RLZNK, tj. maksymalny czynnik, z jakim zaburzenia względne danych (macierzy A i wektora b) mogą przenieść się na wynik, rośnie ze wzrostem liczby $\text{cond } A = \|A\|_2 \|A^+\|_2$ (tzw. spektralnego wskaźnika uwarunkowania, który jest wskaźnikiem uwarunkowania zadania ortogonalizacji kolumn macierzy A i dla macierzy niezerowej zawsze jest większy lub równy 1); zależność jest nieliniowa (wzorów nie podaję, kto będzie potrzebował, ten je znajdzie). Wskaźnik uwarunkowania macierzy $A^H A$ układu równań normalnych jest równy $(\text{cond } A)^2$, a więc może być znacznie większy. Dlatego układ równań normalnych może być znacznie gorzej uwarunkowany niż wyjściowe zadanie. Tymczasem pomnożenie macierzy A przez macierz ortogonalną nie zmienia jej spektralnego wskaźnika uwarunkowania, a zatem go nie powiększa.

Algorytmy korzystające z rozkładu ortogonalno-trójkątnego są numerycznie poprawne (choć mają różne stałe kumulacji). Z uwagi na prostotę, stosunkowo niski koszt i zwykle dostatecznie dobrą dokładność, godną polecenia i najczęściej stosowaną metodą jest metoda odbić Householdera.

Zadania i problemy

1. Oblicz i porównaj koszty algorytmu równań normalnych, modyfikowanego algorytmu ortonormalizacji Grama-Schmidta i metody odbić Householdera, dla układów o współczynnikach rzeczywistych, z macierzą $m \times n$.
2. Niech $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ dla $m < n$. Zaproponuj sposób wyznaczenia rozkładu macierzy A na czynniki LQ, takie że macierz $L \in \mathbb{R}^{m,n}$ jest macierzą trójkątną dolną, a macierz $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest ortogonalna.

Pokaż, jak można zastosować taki rozkład macierzy do rozwiązania dualnego liniowego zadania najmniejszych kwadratów dla układu równań liniowych z macierzą A .

3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Porównaj na przykładzie liniowego zadania najmniejszych kwadratów dla układu $Ax = b$ algorytm równań normalnych i metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta:

- ułóż układ równań normalnych i rozwiąż go,
 - powtórz ten algorytm przyjmując, że $|a| < \sqrt{2^{-t}}$ (t jest liczbą bitów mantysy),
 - stosując podobne założenie dokonaj ortonormalizacji kolumn w celu otrzymania odpowiednio zaburzonych czynników Q_1 i R_1 macierzy A .
 - porównaj otrzymane rozwiązania i wektory residualne.
4. (zadanie jest *ciut* trudniejsze, ale stanowi ono piękne podsumowanie wykładu z przestrzeni afinicznych i zadań najmniejszych kwadratów)

Niech p oznacza punkt rzeczywistej trójwymiarowej przestrzeni afinicznej, a v — różny od 0 wektor swobodny. Niech L oznacza prostą o kierunku wektora v przechodzącą przez punkt p . Niech p_1, \dots, p_k będą punktami, w których umieszczone są odważniki o dodatnich masach, odpowiednio m_1, \dots, m_k .

Def. Momentem bezwładności względem prostej L tego układu odważników nazywamy liczbę

$$I_L = \sum_{i=1}^k m_i r_i^2,$$

gdzie r_i oznacza odległość punktu p_i od prostej L .

(Energia kinetyczna odważników w ruchu obrotowym wokół osi L jest równa $\frac{1}{2} I_L \omega^2$, gdzie ω jest prędkością kątową ruchu.)

Udowodnij, że dla dowolnego ustalonego wektora v moment bezwładności jest najmniejszy wtedy, gdy prosta L przechodzi przez środek ciężkości rozpatrywanego układu odważników.

Rozwiązanie: Zbadamy układ $2k$ równań liniowych (z niewiadomym punktem \mathbf{p}):

$\sqrt{m_i}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i, \mathbf{x}) = 0$ i $\sqrt{m_i}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i, \mathbf{y}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$, gdzie \mathbf{x} i \mathbf{y} są wektorami jednostkowymi prostopadłymi do wektora \mathbf{v} i do siebie nawzajem.

Para takich równań dla ustalonego i wyraża fakt, że punkt \mathbf{p}_i leży na prostej L .

Mamy zatem układ

$$\begin{cases} \sqrt{m_1}\mathbf{x}^T\mathbf{p} = \sqrt{m_1}\mathbf{x}^T\mathbf{p}_1, \\ \sqrt{m_1}\mathbf{y}^T\mathbf{p} = \sqrt{m_1}\mathbf{y}^T\mathbf{p}_1, \\ \dots \quad \dots \\ \sqrt{m_k}\mathbf{x}^T\mathbf{p} = \sqrt{m_k}\mathbf{x}^T\mathbf{p}_k, \\ \sqrt{m_k}\mathbf{y}^T\mathbf{p} = \sqrt{m_k}\mathbf{y}^T\mathbf{p}_k. \end{cases}$$

Poszukiwany wektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ współrzędnych kartezjańskich punktu \mathbf{p} składa się z trzech współrzędnych, podczas gdy macierz powyższego układu równań ma rząd 2. Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla tego układu jest więc nieregularne.

Dla ustalonego \mathbf{p} kwadrat normy residuum jest równy

$$\sum_{i=1}^k m_i(\mathbf{x}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i))^2 + \sum_{i=1}^k m_i(\mathbf{y}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i))^2 = \sum_{i=1}^k m_i(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)^T(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{y}\mathbf{y}^T)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i).$$

Wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} stanowią bazę ortonormalną podprzestrzeni prostopadłej do wektora \mathbf{v} , a zatem wyrażenie $\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{y}\mathbf{y}^T$ opisuje macierz rzutu prostopadłego na tę podprzestrzeń. i -ty składnik sumy jest więc równy $m_i r_i^2$, gdzie r_i jest długością obrazu wektora $\mathbf{p} - \mathbf{p}_i$ w rzucie na podprzestrzeń $\text{lin}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, czyli odległością punktu \mathbf{p}_i od prostej L . Kwadrat normy residuum układu jest naszym momentem bezwładności.

Aby wykonać polecenie w zadaniu, wystarczy teraz utworzyć układ równań normalnych i przekonać się, że punkt \mathbf{p} , który jest środkiem ciężkości naszego układu odważników, spełnia ten układ. Układ równań normalnych jest taki (stosujemy zapis blokowy macierzy dopóki się da, czyli do końca):

$$\sum_{i=1}^k m_i(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{y}\mathbf{y}^T)\mathbf{p} = \sum_{i=1}^k m_i(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{y}\mathbf{y}^T)\mathbf{p}_i, \quad \text{czyli}$$

$$(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{y}\mathbf{y}^T) \sum_{i=1}^k m_i\mathbf{p} = (\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{y}\mathbf{y}^T) \sum_{i=1}^k m_i\mathbf{p}_i.$$

Punkt $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\sum_{j=1}^k m_j} \mathbf{p}_i$, czyli środek ciężkości odważników spełnia ten układ w sposób oczywisty. Ponieważ zadanie jest nieregularne, więc istnieją także inne rozwiązania (jakie?).

Algebraiczne zagadnienie własne

Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, gdzie \mathbb{K} oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych. Macierz A reprezentuje pewne przekształcenie liniowe f przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^n , określone wzorem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Def. Wektor własny macierzy A jest to taki wektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, dla którego istnieje liczba λ spełniająca równanie

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

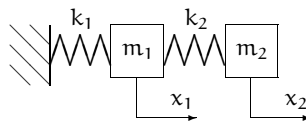
Liczba λ nazywa się wartością własną macierzy A , zaś parę złożoną z liczby i wektora spełniających powyższe równanie nazywamy parą własną.

Algebraiczne zagadnienie własne jest to zadanie polegające na znalezieniu jednej, kilku lub wszystkich par własnych danej macierzy A .

Intuicyjnie możemy zinterpretować wektor własny jako taki wektor, którego pomnożenie przez macierz A daje ten sam wynik co pomnożenie go przez liczbę (właśnie wartość własną). Obraz takiego wektora w przekształceniu opisanym przez macierz A ma ten sam kierunek, natomiast może mieć inną długość lub zwrot.

Przykład z życia

Rozważmy układ złożony z dwóch (może też być ich więcej) ciężarków połączonych ze sobą i z nieruchomym podłożem sprężynkami. Jeśli ciężarki potrącimy, to będą one drgać, przy czym drgania, które są skutkiem tylko początkowego wytrącenia z położenia równowagi (takimi się teraz zajmiemy) są nazywane drganiami własnymi układu.



Ciężarki mają masy odpowiednio m_1 i m_2 ; ich odchylenia od położenia równowagi oznaczmy symbolami x_1 i x_2 . Każda ze sprężynek działa z siłą proporcjonalną do jej odkształcenia, przy czym współczynniki proporcjonalności oznaczmy odpowiednio k_1 i k_2 .

Na pierwszy ciężarek działa siła $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$ (uwaga na zwrot; siła jest dodatnia jeśli ma ten sam zwrot co dodatnie przemieszczenie). Na drugi ciężarek działa siła $k_2(x_1 - x_2)$. Każda z tych sił jest równoważona przez bezwładność ciężarka proporcjonalną do jego masy, zatem ruch ciężarków jest

opisany przez taki układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2x_1 - k_2x_2 \end{aligned}$$

(każda kropka oznacza tu jednokrotne różniczkowanie względem czasu). Możemy to zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Można (co jest bardzo ważne w analizie tego zadania i co będziemy czynić w przyszłości) przekształcić ten układ tak, aby utrzymać symetrię macierzy z prawej strony, ale chwilowo pójdziemy na skróty i dostaniemy

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Przypuśćmy, że $x_1(t) = a_1 \sin \omega t$ oraz $x_2(t) = a_2 \sin \omega t$. Wtedy $\ddot{x}_1(t) = -a_1\omega^2 \sin \omega t$ oraz $\ddot{x}_2(t) = -a_2\omega^2 \sin \omega t$. Po podstawieniu i podzieleniu przez $-\sin \omega t$ dostaniemy równanie

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2)/m_1 & -k_2/m_1 \\ -k_2/m_2 & k_2/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

czyli algebraiczne zagadnienie własne z macierzą 2×2 . Wektor własny występującej w nim macierzy opisuje amplitudy a_1 i a_2 drgań własnych, zaś odpowiadająca mu wartość własna jest kwadratem prędkości fazowej ω . Można dowieść (i jeszcze to dla wprawy uczynimy), że w zagadnieniach własnych utworzonych dla układów ciężarków podobnych do rozpatrywanego wyżej wszystkie wartości własne są rzeczywiste i dodatnie, a więc hipoteza, że drgania mogą być opisane za pomocą sinusoidy, znajduje potwierdzenie.

Dalszy ciąg teorii

Twierdzenie: Wektory własne przynależne do różnych wartości własnych są liniowo niezależne.

Dowód: Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy A i niech wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ będą odpowiadającymi im wektorami własnymi. Wektor \mathbf{x}_1 jest różny od $\mathbf{0}$, a zatem zbiór jednoelementowy, który zawiera ten wektor, jest liniowo niezależny. Dalej stosujemy indukcję; założmy, że dla pewnego $l < k$ wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{l-1}$ są liniowo niezależne. Przypuśćmy teraz, że zbiór $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l\}$

jest liniowo zależny, a zatem na mocy założenia indukcyjnego wektor \mathbf{x}_l możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{l-1}$. Zatem,

$$\mathbf{x}_l = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Obliczmy

$$0 = \lambda_l \mathbf{x}_l - \lambda_l \mathbf{x}_l = \lambda_l \mathbf{x}_l - A \mathbf{x}_l = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \lambda_l \mathbf{x}_i - A \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i (\lambda_l - \lambda_i) \mathbf{x}_i.$$

Ponieważ nie wszystkie liczby α_i są równe 0 i wszystkie różnice $\lambda_l - \lambda_i$ są różne od 0, więc dowiedliśmy zaprzeczenia założenia indukcyjnego, co kończy dowód. \square

Sprawdźmy, że dowolna macierz rzeczywista lub zespolona ma (w ogólności zespolone) pary własne. W tym celu równanie podane w definicji zagadnienia własnego możemy przepisać w postaci

$$(A - \lambda I_n) \mathbf{x} = 0.$$

Równanie to może być spełnione przez niezerowy wektor \mathbf{x} wtedy, gdy macierz $A - \lambda I_n$ jest osobliwa. Wyznacznik tej macierzy musi zatem być równy 0, a więc wartości własne są rozwiązaniami równania

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

zwanego równaniem charakterystycznym macierzy A . Lewa strona tego równania jest wielomianem stopnia n zmiennej λ , tak zwanym wielomianem charakterystycznym. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że wielomian ten ma (w ogólności zespolone) pierwiastki, które są w związku z tym wartościami własnymi macierzy A .

Dokładniej, dowolny wielomian stopnia n o współczynnikach zespolonych możemy przedstawić w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia; dla wielomianu charakterystycznego możemy napisać:

$$\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda).$$

Liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A . Widzimy więc, że każda rzeczywista lub zespolona macierz kwadratowa ma co najmniej jedną i co najwyżej n różnych wartości własnych.

W związku z rozkładem wielomianu charakterystycznego na czynniki pierwszego stopnia mamy pojęcie krotności algebraicznej wartości własnej: jest nią liczba czynników, w których dana wartość własna występuje.

Rozważmy przekształcenie, którego macierzą jest $A - \lambda_i I_n$; jeśli liczba λ_i jest wartością własną macierzy A , to przestrzeń $\ker(A - \lambda_i I_n)$ ma wymiar większy od zera. Wymiar przestrzeni $\ker(A - \lambda_i I_n)$ nazywamy krotnością geometryczną wartości własnej λ_i . Zauważmy, że każdy element tej przestrzeni (z wyjątkiem wektora zerowego) jest wektorem własnym macierzy A przynależnym do wartości własnej λ_i . Dlatego nazywamy ją podprzestrzenią własną macierzy A , przynależną do wartości własnej λ_i .

Podobieństwa macierzy

Def. O macierzach A i B mówimy, że są podobne, jeśli istnieje macierz nieosobliwa X , taka że $B = X^{-1}AX$.

Podobieństwo macierzy jest relacją równoważności. Od razu zauważmy, że podobieństwo jest kongruencją wtedy i tylko wtedy, gdy macierz podobieństwa X jest unitarna (tj. $X^H = X^{-1}$). Rozpatrując zagadnienie własne utożsamiliśmy macierz A z przekształceniem liniowym. Nieosobliwą macierz $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ możemy potraktować jako przekształcenie polegające na zmianie bazy (dokładniej, przejście od bazy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ do $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$). W ten sposób macierze podobne A i $B = X^{-1}AX$ opisują to samo przekształcenie liniowe w różnych bazach.

Jeśli potraktujemy przejście od macierzy kwadratowej A do macierzy $X^{-1}AX$ (przy ustalonej macierzy X) jako przekształcenie w zbiorze $\mathbb{K}^{n \times n}$, to możemy zauważyć, że przekształcenia takie tworzą grupę (nieabelową jeśli $n > 1$). Złożenie podobieństw reprezentowanych przez macierze X_1 i X_2 jest reprezentowane przez macierz $X_2 X_1$ (czyli realizujemy je za pomocą mnożenia macierzy). Każde podobieństwo ma też pewne niezmienniki; są nimi np. rząd przekształcanej macierzy A , a także wartości własne, łącznie z ich krotnościami algebraicznymi i geometrycznymi. Istotnie, rozważmy dowolną nieosobliwą macierz X i przyjmijmy $B = X^{-1}AX$. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego możemy napisać

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_n) &= \det(X^{-1}AX - \lambda X^{-1}X) = \det(X^{-1}(A - \lambda I_n)X) = \\ &= \det X^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det X = \det(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Zatem wielomiany charakterystyczne macierzy A i B są identyczne, skąd wynika, że macierze podobne mają identyczne wartości własne o identycznych krotnościach algebraicznych. Ale krotności geometryczne odpowiednich wartości własnych są również takie same; jeśli bowiem podprzestrzeń $V \in \mathbb{K}^n$ jest podprzestrzenią własną macierzy B przynależną do pewnej wartości własnej λ_i , to podprzestrzeń XV , która ma ten sam wymiar co V , jest podprzestrzenią własną macierzy A .

Zauważmy, że jeśli macierz A jest blokowo-trójkątna (górną lub dolną), to jej wartości własne są równe wartościom własnym bloków na diagonalu. Istotnie, jeśli mamy na diagonalu k bloków kwadratowych, o wymiarach $n_i \times n_i$ dla $i = 1, \dots, k$ ($n = n_1 + \dots + n_k$), to

$$\det \left(\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{kk} \end{bmatrix} - \lambda I_n \right) = \det(A_{11} - \lambda I_{n_1}) \cdot \dots \cdot \det(A_{kk} - \lambda I_{n_k}).$$

W szczególności wynika stąd, że wartościami własnymi macierzy trójkątnej (górną lub dolną) są jej współczynniki diagonalne.

Twierdzenie: Krotność geometryczna dowolnej wartości własnej jest zawsze mniejsza lub równa jej krotności algebraicznej.

Dowód: Rozważmy bazę x_1, \dots, x_k podprzestrzeni własnej macierzy A przynależnej do wartości własnej λ_i . Krotność geometryczna tej wartości własnej jest oczywiście równa k . Możemy do tej bazy dołączyć pewne wektory x_{k+1}, \dots, x_n i otrzymać bazę przestrzeni \mathbb{K}^n ; niech X będzie teraz macierzą, której kolejne kolumny są tymi wektorami. Łatwo możemy sprawdzić, że wektory e_1, \dots, e_k są wektorami własnymi macierzy $B = X^{-1}AX$. Dlatego początkowe k kolumn macierzy B to wektory $\lambda_i e_1, \dots, \lambda_i e_k$, jest to więc macierz blokowo-trójkątna. Na tej podstawie możemy wywnioskować, że wielomian charakterystyczny takiej macierzy musi mieć k czynników liniowych o postaci $(\lambda_i - \lambda)$, tak więc krotność algebraiczna wartości własnej λ_i nie może być mniejsza niż k . \square

Twierdzenie Jordana

Motywacją dalszej części wykładu jest poszukiwanie „najprostszej postaci” przekształcenia liniowego przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^n , albo ogólniej V w V (dla dowolnej rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni V o skończonym wymiarze). W tym celu będziemy wybierać bazę tak, aby macierz przekształcenia w tej bazie miała ową „najprostszą postać”. Patrząc na to inaczej, w zbiorze macierzy podobnych do danej macierzy kwadratowej A będziemy chcieli znaleźć taką „najprostszą” macierz.

Def. Klatkę Jordana nazywamy dwudiagonalną macierz $n \times n$ o postaci

$$J = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & a \end{bmatrix}.$$

Natychmiast możemy zauważyć, że wielomian charakterystyczny klatki Jordana ma postać $(a - \lambda)^n$, a zatem macierz ta ma jedną wartość własną, $\lambda = a$, o krotności algebraicznej n .

Natomiast krotność geometryczna tej wartości własnej jest równa 1; istotnie, możemy sprawdzić, że $\ker(J - aI_n) = \text{lin}\{e_1\}$, a więc wymiar podprzestrzeni własnej przynależnej do wartości własnej a jest równy 1.

Przypuśćmy, że pewna macierz A jest podobna do klatki Jordana J , której wartość własną znamy, i problem polega na znalezieniu odpowiedniej macierzy podobieństwa X , takiej że $X^{-1}AX = J$. Aby to zrobić zauważmy, że jeśli liczba a jest wartością własną macierzy A , to liczba $a - b$ jest wartością własną macierzy $A - bI_n$; dokładniej, jeśli macierz A ma wielomian charakterystyczny $w(\lambda)$, to wielomianem charakterystycznym macierzy $A - bI_n$ jest $w(\lambda - b)$. Łatwo jest udowodnić, że jeśli macierze A i B są podobne, to macierze $A - bI_n$ i $B - bI_n$ też są podobne, z tą samą macierzą podobieństwa. Dlatego macierz $A - aI_n$ jest podobna do klatki Jordana o wartości własnej 0.

Zbadajmy, co dzieje się z wektorem, który poddajemy wielokrotnie przekształceniu $A - aI_n$ (mówi się „iterujemy przekształcenie”). W pewnej bazie (którą chcemy znaleźć) przekształcenie to jest opisane przez macierz $J - aI_n$. Obrazem wektora e_k dla $k > 1$ jest wektor e_{k-1} , zaś obrazem wektora e_1 jest 0. Tak więc po co najwyżej n iteracjach obrazem dowolnego wektora jest wektor zerowy. Jeśli znamy wartość własną a macierzy A , to możemy wykonać taki algorytm:

1. Znajdujemy wektor x_1 , który rozpina jądro macierzy $A - aI_n$ (czyli wektor własny macierzy A , przynależny do wartości własnej a).
2. Znajdujemy wektor x_2 , taki że $x_1 = (A - aI_n)x_2$; zbiór $\{x_1, x_2\}$ jest bazą przestrzeni $\ker(A - aI_n)^2$.
W tym celu musimy rozwiązać układ równań, który jest nieokreślony; macierz $A - aI_n$ jest osobliwa i rozwiązań jest nieskończenie wiele (tworzą one warstwę jednowymiarową). Aby określić rozwiązanie jednoznacznie możemy na przykład zażądać, aby wektor x_2 był prostopadły do x_1 .
3. Znajdujemy wektor x_3 , taki że $x_2 = (A - aI_n)x_3$. Następnie x_4 , taki że $x_3 = (A - aI_n)x_4$ itd.

W wyniku tego postępowania otrzymamy wektory x_1, \dots, x_n , takie że dla $k = 1, \dots, n$ zbiór $\{x_1, \dots, x_k\}$ jest bazą przestrzeni $\ker(A - aI_n)^k$. Poszukiwana macierz podobieństwa X jest równa $[x_1, \dots, x_n]$.

Opisane wyżej postępowanie można uogólnić tak, aby dało się je zastosować do dowolnej macierzy A (niekoniecznie podobnej do klatki Jordana). W tym celu należy znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne, a dokładnie bazy podprzestrzeni własnych przynależnych do tych wartości własnych. Następnie dla każdej wartości własnej λ , której krotność geometryczna jest mniejsza niż algebraiczna, znajdujemy wektory rozpinające razem z wektorami własnymi przestrzeni $\ker(A - \lambda I_n)^2$, $\ker(A - \lambda I_n)^3$, i tak dalej, aż znajdziemy tyle wektorów, ile jest równa krotność algebraiczna wartości własnej λ (niektóre z układów równań okażą się sprzeczne i tych nie rozwiązujemy). Biorąc następnie macierz X , której kolumnami są wektory własne macierzy A i wektory znalezione w opisany wyżej sposób, określimy podobieństwo, w którym obrazem macierzy A jest macierz o tak zwanej postaci kanonicznej Jordana: jest to macierz blokowo-diagonalna, której wszystkie bloki diagonalne są klatkami Jordana. Zachodzi bowiem

Twierdzenie Jordana: Każda macierz kwadratowa $n \times n$ jest podobna do macierzy o postaci kanonicznej Jordana. Dwie postaci kanoniczne tej samej macierzy mają na diagonali identyczne bloki (klatki Jordana), które mogą tylko występować w różnej kolejności.
Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Twierdzenie: Macierze A i A^T mają takie same wartości własne, o takich samych krotnościach algebraicznych oraz geometrycznych.

Dowód: Ponieważ wyznacznik dowolnej macierzy jest niezmiennikiem przekształcenia, które jest transpozycją, więc wielomiany charakterystyczne macierzy A i A^T są identyczne, skąd wynika, że mają identyczny rozkład na czynniki pierwszego stopnia. Aby dowieść, że również krotności geometryczne poszczególnych wartości własnych obu macierzy są takie same, wystarczy skorzystać z twierdzenia Jordana. Jeśli macierz $B = X^{-1}AX$ ma postać kanoniczną Jordana, to macierz $B^T = X^T A^T X^{-T}$ jest blokowo-diagonalna, z transpozycjami klatek Jordana na diagonalu. Każdej takiej transponowanej klatce odpowiada jednowymiarowa przestrzeń własna macierzy B^T , czyli także jednowymiarowa przestrzeń własna macierzy A^T . \square

Jeśli krotność geometryczna każdej wartości własnej macierzy A jest równa jej krotności algebraicznej, to wszystkie klatki Jordana w postaci kanonicznej tej macierzy mają wymiary 1×1 . Taka macierz A jest więc podobna do macierzy diagonalnej i mówimy o niej, że jest to macierz diagonalizowalna. Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalizowalnych są macierze $n \times n$, które mają n różnych wartości własnych. Inny ważny przypadek, którym zajmiemy się później, to macierze hermitowskie.

Zadania i problemy

1. Rozwiąż algebraiczne zagadnienie własne dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Znajdź postać kanoniczną Jordana macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

i macierz podobieństwa, która sprowadza tę macierz do postaci kanonicznej.

3. Oblicz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{25},$$

korzystając z faktu, że powyższa macierz jest podobna do macierzy diagonalnej.

4. Udowodnij, że jeśli macierz A jest rzeczywista i liczba rzeczywista λ jest jej wartością własną, to istnieje wektor własny przynależny do tej wartości własnej, którego wszystkie współrzędne są liczbami rzeczywistymi.
5. Def. Śladem macierzy nazywa się sumę jej współczynników na diagonalu. Ślad macierzy A oznacza się symbolem $\text{tr } A$.
Udowodnij, że ślad dowolnej macierzy jest równy sumie jej wartości własnych (z uwzględnieniem ich krotności algebraicznych).
6. Udowodnij, dla przypadku macierzy diagonalizowalnych, następujące twierdzenie Cayleya-Hamiltona: jeśli w jest wielomianem charakterystycznym macierzy A , to macierz $w(A)$ jest zerowa.
7. Zastanów się nad dowodem twierdzenia Cayleya-Hamiltona w przypadku ogólnym.
8. Jak, znając postać kanoniczną macierzy A i odpowiednią macierz podobieństwa można znaleźć rozwiązanie zagadnienia własnego macierzy A^H ?
9. Niech A i B będą macierzami ortogonalnymi 3×3 , takimi że $\det A = \det B = 1$. Udowodnij, że macierz $A - B$ jest osobliwa.

Wskazówka: Zbadaj macierz $A^{-1}(A - B)$ i udowodnij, że co najmniej jedna wartość własna macierzy $A^{-1}B$ jest równa 1.

Algebraiczne zagadnienie własne, c.d.

Widmo macierzy

Def. Widmem macierzy nazywa się zbiór wszystkich jej wartości własnych. Widmo macierzy A oznacza się symbolem $\text{spect } A$ (ang. *spectrum* — widmo).

Twierdzenie: Jeśli f jest dowolnym wielomianem zespolonym, to wektory własne macierzy A są wektorami własnymi macierzy $f(A)$ oraz $\text{spect } f(A) = f(\text{spect } A)$.

Dowód: Niech $f(t) = a_k t^k + \dots + a_1 t + a_0$. Niech x oznacza wektor własny macierzy A , przynależny do wartości własnej λ . Wtedy

$$f(A)x = a_k A^k x + \dots + a_1 A x + a_0 I_n x = a_k \lambda^k x + \dots + a_1 \lambda x + a_0 x = f(\lambda)x.$$

Zatem $f(\lambda)$ jest wartością własną macierzy $f(A)$, skąd wynika $f(\text{spect } A) \subset \text{spect } f(A)$.

Aby dowieść zawierania widm w drugą stronę, powołamy się na twierdzenie Jordana; istnieje macierz nieosobliwa X , taka że macierz $B = X^{-1}AX$ ma postać kanoniczną, czyli w szczególności jest trójkątna górna. Łatwo możemy sprawdzić, że $f(A) = f(XBX^{-1}) = Xf(B)X^{-1}$. Macierz B , podobna do A , jest trójkątna górna, skąd wynika, że współczynniki na diagonalu macierzy $f(B)$ są równe $f(\lambda_i)$, gdzie λ_i są współczynnikami diagonalnymi macierzy B , czyli wartościami własnymi macierzy A . \square

Możemy łatwo uogólnić powyższe twierdzenie, dopuszczając oprócz wielomianu f także dowolną funkcję wymierną, tj. iloraz dwóch wielomianów — dzielenie $f(A)/g(A)$ polega na obliczeniu $f(A)(g(A))^{-1}$ albo $(g(A))^{-1}f(A)$; mnożenie macierzy $f(A)$ i $(g(A))^{-1}$ jest przemienne. Musimy jednak założyć, że żadna wartość własna macierzy A nie jest miejscem zerowym wielomianu g .

Powyższe twierdzenie odgrywa zasadniczą rolę w *numerycznych* metodach rozwiązywania zagadnień własnych, a także w metodach iteracyjnych stosowanych do rozwiązywania *wielkich* układów równań liniowych, których nie można rozwiązywać poprzez znajdowanie rozkładu macierzy na czynniki (np. trójkątne metodą eliminacji Gaussa), z uwagi na ogromny koszt czasowy i pamięciowy.

Def. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j}$ oznacza macierz kwadratową $n \times n$. Niech $k \in \{1, \dots, n\}$. Zbiór liczb zespolonych z , takich że $|z - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ nazywa się kołem Gerszgorina.

Twierdzenie Gerszgorina: Każda wartość własna leży w pewnym kole Gerszgorina.

Dowód: Niech (λ, x) będzie parą własną macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j}$ i niech x_k będzie współrzędną wektora x o największej wartości bezwzględnej. Wtedy

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j, \quad \text{czyli} \quad (\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j, \quad \text{tj.} \quad \lambda - a_{kk} = \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k}.$$

Możemy więc oszacować

$$|\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j \neq k} \left| a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|. \quad \square$$

Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia Gerszgorina jest znany nam już fakt, że macierz diagonalnie dominująca jest nieosobliwa. Istotnie, jedną z wartości własnych macierzy osobliwej musi być 0, a jeśli macierz jest diagonalnie dominująca, to żadne jej koło Gerszgorina nie zawiera zera.

Def. Promień spektralny macierzy jest to największa wartość bezwzględna wartości własnej tej macierzy.

Jak udowodnimy za chwilę, promień spektralny dowolnej macierzy A jest mniejszy lub równy każdej normie indukowanej macierzy A . W szczególności zgadza się to z twierdzeniem Gerszgorina, z którego wynika, że wszystkie koła Gerszgorina są zawarte w kole o promieniu $\|A\|_\infty$. W wielu zadaniach praktycznych występują tzw. wielkie układy równań liniowych o tzw. rzadkiej macierzy. Jak wspomniałem wcześniej, takich układów nie można rozwiązywać metodą eliminacji Gaussa, m.in. z uwagi na czas obliczeń. Zamiast tego konstruuje się tzw.

metody iteracyjne. Najprostsze z nich polegają na tym, że wybiera się pewną macierz B oraz wektory t i x_0 , a następnie iteruje się przekształcenie afiniczne:

$$x_{k+1} = Bx_k + t.$$

W ten sposób powstaje ciąg wektorów, który jest zbieżny niezależnie od wybranego wektora x_0 pod warunkiem, że pewna (dowolna) norma indukowana macierzy B jest mniejsza niż 1 (wtedy przekształcenie opisane powyższym wzorem jest zwężające; ma ono jednoznacznie określony punkt stały i ciąg wektorów otrzymanych w opisanym procesie iteracyjnym zbiega do tego punktu). Oczywiście, macierz B i wektor t dobieramy tak, aby granicą ciągu było rozwiązanie układu, ale zbadajmy warunek nałożony na macierz B . Otóż mamy takie dwa twierdzenia:

Stwierdzenie: Niech $\|\cdot\|$ oznacza dowolną normę w przestrzeni \mathbb{K}^n , a także odpowiednią normę indukowaną w $\mathbb{K}^{n,n}$. Każda wartość własna λ_i macierzy A spełnia nierówność $|\lambda_i| \leq \|A\|$.

Dowód: Niech \mathbf{x}_i oznacza wektor własny przynależny do wartości własnej λ_i . Wtedy

$$|\lambda_i| \|\mathbf{x}_i\| = \|\lambda_i \mathbf{x}_i\| = \|A \mathbf{x}_i\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}_i\|. \quad \square$$

Twierdzenie: Dla dowolnej macierzy A , której promień spektralny jest równy ρ , oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje norma indukowana $\|\cdot\|_b$, taka że $\|A\|_b \leq \rho + \varepsilon$.

Dowód: W pierwszym semestrze wspomniałem (str. 7.7), że jeśli normy $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ w przestrzeni \mathbb{K}^n spełniają warunek $\forall \mathbf{x} \|\mathbf{x}\|_b = \|B\mathbf{x}\|_a$ dla ustalonej macierzy nieosobliwej B , to normy w przestrzeni $\mathbb{K}^{n,n}$, indukowane przez te dwie normy, są związane zależnością $\|A\|_b = \|BAB^{-1}\|_a$. Zatem podobieństwa umożliwiają nam konstruowanie różnych norm indukowanych.

Ponieważ każda macierz jest podobna do macierzy o postaci kanonicznej Jordana, więc wystarczy, jeśli udowodnimy twierdzenie dla macierzy o takiej postaci. Mamy zatem macierz A , której współczynniki na diagonalu są wartościami własnymi, współczynnik „z prawej strony” diagonalnego w każdym wierszu jest równy 1 lub 0, a wszystkie pozostałe współczynniki są równe 0. Niech $X = \text{diag}(1/\varepsilon, \dots, 1/\varepsilon^k)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Wtedy macierz $X^{-1}AX$ jest macierzą, której układ zerowych współczynników jest identyczny jak w macierzy A . Współczynniki diagonalne (czyli wartości własne) są takie jak współczynniki macierzy A , zaś współczynnik „z prawej strony” diagonalnego jest równy ε albo 0. Możemy zatem przyjąć $\|A\|_b = \|X^{-1}AX\|_\infty \leq \|\max_i |\lambda_i| + \varepsilon\|$, co kończy dowód. \square

W świetle powyższych twierdzeń ciąg wektorów konstruowanych w naszkicowanej przed twierdzeniami metodzie numerycznej jest zbieżny niezależnie od przyjętego wektora \mathbf{x}_0 wtedy i tylko wtedy, gdy promień spektralny macierzy B jest mniejszy niż 1.

Podobieństwa ortogonalne i unitarne

Twierdzenie Jordana opisuje postać, jaką ma każde przekształcenie liniowe $V \rightarrow V$ w odpowiednio dobranej bazie, przy czym na wybór bazy (tj. równoważnie wybór macierzy podobieństwa X w badaniu macierzy reprezentującej to przekształcenie) nie nakłada się żadnych ograniczeń. Obecnie zbadamy, jaka jest „najprostsza” postać dowolnego przekształcenia liniowego $V \rightarrow V$ reprezentowanego przez macierz A w pewnej bazie ortogonalnej, jeśli weźmiemy pod uwagę tylko macierze

tego przekształcenia w bazach ortogonalnych.

Twierdzenie Schura: 1. Dla każdej macierzy $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ istnieje macierz unitarna U , taka że macierz $R = U^{-1}AU \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest trójkątna górna.

2. Dla każdej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, której wszystkie wartości własne są liczbami rzeczywistymi, istnieje macierz ortogonalna U , taka że macierz $R = U^{-1}AU \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest trójkątna górna.

3. Dla każdej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ istnieje macierz ortogonalna U , taka że macierz $B = U^{-1}AU \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest blokowo-trójkątna górna, z blokami na diagonalu o wymiarach 1×1 lub 2×2 .

Uwaga 1: Współczynniki na diagonalu macierzy R , o której mowa w punktach 1 i 2 są wartościami własnymi. Wektory własne przynależne do wartości własnej λ_i można obliczyć przez rozwiązanie układu $(A - \lambda_i I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Liczba zer na diagonalu macierzy tego układu jest równa krotności *algebraicznej*, ale rozwiązania niezależnych liniowo można znaleźć tylko tyle ile jest równa krotność *geometryczna* wartości własnej λ_i .

Uwaga 2: W przypadku 3 mamy macierz A , której wartości własne są wartościami własnymi bloków diagonalnych macierzy B . W przypadku bloków 1×1 zadanie jest trywialne, zaś w przypadku bloku 2×2 obliczenie wartości własnych jest łatwe. Można dowieść, że bloku 2×2 nie można uniknąć tylko wtedy gdy wartości własne są zespolone (i wtedy tworzą parę sprzężoną).

Dowód: (w zasadzie tylko punkt 1; dowody pozostałych dwóch punktów przebiegają podobnie i dlatego zamiast nich będzie uwaga po dowodzie) Niech $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$ oznacza parę własną macierzy A , taką że $\|\mathbf{x}_1\|_2 = 1$. Jeśli $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, to przyjmijmy $H = I_n$, zaś w przeciwnym razie H będzie macierzą takiego odbicia Householdera, że $H\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$. W obu przypadkach macierz H jest unitarna (i hermitowska, zatem $H = H^H = H^{-1}$).

Macierz $G = H^{-1}AH$ jest podobna do macierzy A . Zatem liczba λ_1 jest także wartością własną macierzy G . Ale odpowiednim wektorem własnym macierzy G jest wektor \mathbf{e}_1 :

$$G\mathbf{e}_1 = H^{-1}AH\mathbf{e}_1 = H^{-1}A\mathbf{x}_1 = H^{-1}\lambda_1\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1.$$

Dlatego pierwszą kolumną macierzy G jest wektor $\lambda_1\mathbf{e}_1$. Mamy więc

$$G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{g}^H \\ \mathbf{0} & G_1 \end{bmatrix}.$$

Przyjmując założenie indukcyjne, że twierdzenie jest prawdziwe dla macierzy o wymiarach $n - 1 \times n - 1$, otrzymujemy macierz trójkątną górną $R_1 = U_1^{-1}G_1U_1$ (dla odpowiednio dobranej macierzy unitarnej U_1) i możemy przyjąć

$$U = H \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}. \quad \text{Wtedy} \quad U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{g}^H U \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Uwaga: Jeśli macierz A jest rzeczywista i liczba λ_1 jest rzeczywista, to istnieje wektor własny \mathbf{x}_1 o rzeczywistych współrzędnych i wtedy macierz H jest rzeczywista, co daje dowód punktu 2. Aby dowieść punktu 3. stosujemy to samo postępowanie dla każdej rzeczywistej wartości własnej, zaś w przypadku gdy mamy parę zespolonych sprzężonych wartości własnych λ_1 i $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ rozpatrujemy wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, takie że $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$. Wektor $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_1 - i\mathbf{a}_2$ jest wektorem własnym przynależnym do wartości własnej λ_2 . Następnie konstruujemy *dwa odbicia*, H_1 i H_2 , których złożenie przekształca wektor \mathbf{a}_1 na \mathbf{e}_1 i wektor \mathbf{a}_2 na kombinację liniową \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 .

Symetryczne zagadnienie własne

W wielu ważnych zadaniach występują algebraiczne zagadnienia własne z macierzami hermitowskimi, czyli w przypadku rzeczywistym symetrycznymi. Okazuje się, że z symetrii macierzy wynika wiele uproszczeń zadania, zarówno z punktu widzenia algebry, jak i metod numerycznych służących do rozwiązywania takiego zadania.

Niech $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ oznacza dowolną macierz hermitowską. Na podstawie twierdzenia Schura istnieje macierz unitarna U , taka że macierz $D = U^{-1}AU = U^H A U$ jest diagonalna. Przekształcenie, które przyporządkowuje macierzy A macierz D jest podobieństwem, ale także kongruencją. Zatem ponieważ macierz A jest hermitowska, to macierz D też jest hermitowska, co oznacza, że części urojone współczynników na diagonalu macierzy D są równe 0. Współczynniki te to wartości własne macierzy A ; jako wniosek mamy

Stwierdzenie: Wszystkie wartości własne macierzy hermitowskiej są liczbami rzeczywistymi.

Każda macierz hermitowska jest zatem podobna do macierzy diagonalnej (diagonalizowalna). W szczególności jeśli macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest symetryczna, to jest podobna do pewnej rzeczywistej macierzy diagonalnej D ; dla takiej macierzy potrafimy wskazać bazę ortonormalną przestrzeni \mathbb{R}^n , złożoną z wektorów

własnych. Jest nią baza $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Ale macierz podobieństwa X , taka że $D = X^{-1}AX$, jest ortogonalna. Kolumny $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ macierzy X są wektorami własnymi macierzy A i tworzą bazę ortonormalną przestrzeni \mathbb{R}^n . Czyli

Twierdzenie: Dla dowolnej rzeczywistej macierzy symetrycznej $n \times n$ istnieje baza ortonormalna przestrzeni \mathbb{R}^n złożona z wektorów własnych tej macierzy.

Dalej mamy oczywiste stwierdzenie, że jeśli macierz hermitowska jest dodatnio (nieujemnie, ujemnie, niedodatnio) określona, to jej wszystkie wartości własne są dodatnie (nieujemne, ujemne, niedodatnie).

Izometryczna postać kanoniczna zbioru drugiego stopnia

Prostą konsekwencją twierdzenia Schura i wyciągniętych z niego wniosków na temat macierzy hermitowskich jest następujące

Twierdzenie Sylwestra dla izometrii: Dla dowolnej macierzy hermitowskiej (w przypadku rzeczywistym — symetrycznej) istnieje kongruencja reprezentowana przez macierz unitarną (w przypadku rzeczywistym — ortogonalną), przeprowadzająca tę macierz na macierz diagonalną.

Powyższe twierdzenie jest podane w wersji macierzowej, precyzyjne sformułowanie go w terminach form kwadratowych pozostawiam jako temat do zastanowienia. Ponieważ dowolna dodatnio określona forma kwadratowa określa (poprzez tożsamość polaryzacyjną) iloczyn skalarny, a więc „robi” z przestrzeni liniowej przestrzeń unitarną lub euklidesową, więc mamy dodatkowy wniosek natury geometrycznej: dla dowolnej elipsoidy, której środkiem jest punkt $\mathbf{0}$, istnieje taki iloczyn skalarny, że w sensie związanej z nim normy elipsoida ta jest sferą jednostkową.

Zajmijmy się teraz równaniami drugiego stopnia o rzeczywistych współczynnikach, z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Każde takie równanie umiemy przedstawić za pomocą odpowiedniej formy kwadratowej, w postaci macierzowej

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0.$$

Na podstawie twierdzenia Schura możemy dowolne równanie drugiego stopnia przekształcić dokonując zamiany zmiennych, która jest izometrią afiniczną (tj. złożeniem przekształcenia liniowego, którego macierz jest unitarna, i przesunięcia) i otrzymać równanie w postaci izometrycznej kanonicznej, jednej (i tylko jednej)

z podanych niżej trzech:

$$\sum_{i=1}^{\pi} \frac{y_i^2}{\mu_i^2} - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} \frac{y_i^2}{\mu_i^2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\pi} \frac{y_i^2}{\mu_i^2} - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} \frac{y_i^2}{\mu_i^2} \pm 1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\pi} \frac{y_i^2}{\mu_i^2} - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} \frac{y_i^2}{\mu_i^2} + y_{\pi+\nu+1} = 0.$$

Dowód, że takie przekształcenie istnieje, polega na jego konstrukcji, która wygląda prawie tak samo jak na stronach 14.2–14.4. Główna różnica między sprowadzaniem do postaci kanonicznej afinicznej i kanonicznej izometrycznej polega na dopuszczeniu wszystkich kongruencji albo tylko tych, których macierze są ortogonalne. Poza tym możemy całe równanie pomnożyć przez dowolną liczbę z wyjątkiem zera.

Analizując tę konstrukcję i przedstawione wyżej postaci kanoniczne możemy się przekonać, że wybrana baza ortonormalna wektorów własnych macierzy A wskazuje kierunki osi głównych odpowiedniego tworów drugiego stopnia, zaś wartości bezwzględne odwrotności wartości własnych λ_i są kwadratami długości półosi tego tworów.

Przykład: Niech macierz $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ formy ma wartości własne 2 i -3. Przypuśćmy, że po zamianie zmiennych mamy równanie $3x_1^2 - 2x_2^2 - 5 = 0$. Mnożymy je przez $-\frac{1}{5}$ i otrzymujemy po uporządkowaniu

$$\frac{z_1^2}{5/2} - \frac{z_2^2}{5/3} + 1 = 0.$$

Zbiorem rozwiązań jest więc hiperbola, której półosi mają długości odpowiednio $\sqrt{5/2}$ i $\sqrt{5/3}$.

Zadania i problemy

1. Narysuj koła Gerszgorina macierzy z zadań 21.2 i 21.3.
2. Jaki jest związek między widmami macierzy A i A^H ?
3. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Następujący algorytm

\mathbf{x}_0 = dowolne przybliżenie początkowe;

$\mathbf{x}_k = D^{-1}(\mathbf{b} - B\mathbf{x}_{k-1})$ dla $k = 1, 2, \dots$

w którym macierz D jest diagonalna, B ma zera na diagonalu i $A = B + D$, jest iteracyjną metodą rozwiązywania układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, zwaną metodą Jacobiego. Udowodnij, że jeśli macierz A jest diagonalnie dominująca, to otrzymany za pomocą tej metody ciąg wektorów $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ zbiega do rozwiązania.

4. Znajdź izometryczną postać kanoniczną zbioru rozwiązań równania

$$-x^2 + 8xy - y^2 + 12x - 18y = 0.$$

5. Niech Φ oraz Ψ będą formami kwadratowymi w skończenie wymiarowej przestrzeni V , przy czym co najmniej jedna z tych form jest dodatnio określona. Udowodnij, że istnieje taka baza przestrzeni V , że macierz jednej z tych form jest jednostkowa, a druga — diagonalna.

Wskazówka: Znajdź taką kongruencję, która macierz formy dodatnio określonej, np. Φ , sprowadza do postaci kanonicznej. Następnie rozwiąż symetryczne zagadnienie własne.

6. Zastosuj fakt udowodniony w poprzednim zadaniu do układu równań różniczkowych opisujących ruch układu ciężarków na sprężynkach z poprzedniego wykładu. Udowodnij, że istnieją dwie różne częstotliwości drgań, które są liczbami rzeczywistymi. Znajdź wzory pozwalające obliczyć te częstotliwości na podstawie mas i współczynników sztywności sprężyn.

Uwaga: W tym zadaniu pojawiają się dwie formy kwadratowe (jedna w przestrzeni przemieszczeń, a druga — prędkości), z których jedna jest energią potencjalną zgromadzoną w odkształconych sprężynkach, a druga — energią kinetyczną ciężarków w ruchu. Zauważ, że *obie* te formy są dodatnio określone.

7. Udowodnij, że jeśli macierz rzeczywista A jest symetryczna i dodatnio określona, to istnieje jednoznacznie określona macierz B symetryczna i dodatnio określona, taka że $A = B^2$.

Macierz B można by nazwać „pierwiastkiem kwadratowym z A ”. Sprawdź, czy można określić pierwiastki innych stopni z macierzy symetrycznych.

8. Jeśli Basia porusza się względem Asii z prędkością v , zaś Cesia porusza się tak, że w każdej chwili znajduje się w połowie drogi między Asią i Basią, to z jaką prędkością Cesia porusza się względem Asii?

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.

9. Niech $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^3$. Należy znaleźć płaszczyznę π „najlepiej dopasowaną” do tych punktów, tj. taką, że suma kwadratów odległości punktów od tej płaszczyzny jest najmniejsza.

Łatwo jest udowodnić (ćwiczenie), że jeśli ustalimy wektor normalny \mathbf{n} , czyli pewną rodzinę płaszczyzn równoległych, to najmniejszą sumą kwadratów

otrzymamy dla płaszczyzny przechodzącej przez środek ciężkości zbioru punktów danych, tj. punkt $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \mathbf{p}_i$. Zatem wystarczy znaleźć wektor normalny \mathbf{n} płaszczyzny π zawierającej punkt \mathbf{p} . Ponieważ istotny jest tylko jego kierunek, więc przyjmujemy $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$.

Oznaczmy $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}$ dla $i = 1, \dots, m$. Niech wektory \mathbf{w}_i będą obrazami \mathbf{v}_i w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń $\text{lin}\{\mathbf{n}\}$. Mamy zatem zminimalizować wyrażenie

$$\sum_{i=1}^m \|\mathbf{w}_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (\mathbf{n}^T \mathbf{v}_i)^2 = \mathbf{n}^T \mathbf{A} \mathbf{n},$$

gdzie $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$. Macierz \mathbf{A} jest symetryczna i nieujemnie określona (ćwiczenie: wykaż to). Najmniejszą sumę kwadratów odległości punktów od płaszczyzny otrzymamy wtedy, gdy wektor \mathbf{n} jest wektorem własnym przynależnym do najmniejszej wartości własnej macierzy \mathbf{A} . Jeśli krotność tej wartości własnej jest większa niż 1, to rozwiązanie zadania nie jest jednoznaczne.

Wartość własną 0 otrzymamy wtedy, gdy punkty $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ leżą w pewnej płaszczyźnie.

Struktura przekształceń liniowych

Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ reprezentuje pewne przekształcenie liniowe przestrzeni \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^m , albo, po ustaleniu odpowiednich baz, dowolnej przestrzeni liniowej V_1 w V_2 . Zbadamy, w jakiej najprostszej postaci można przedstawić każde takie przekształcenie, tj. jak wygląda „najprostsza” macierz tego przekształcenia, jeśli bazy wybierzemy w specjalny sposób.

Zacznijmy od przypadku, gdy macierz A jest hermitowska i reprezentuje przekształcenie przestrzeni \mathbb{K}^n (albo V_1) w siebie. Zarówno argument jak i wynik przekształcenia reprezentujemy za pomocą macierzy współczynników w tej samej bazie. Z wcześniejszych rozważań wynika, że istnieje baza ortonormalna (w sensie iloczynu skalarnego $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$) $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, taka że macierz $D = X^{-1}AX$ reprezentująca to przekształcenie w bazie X jest diagonalna: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i możemy napisać

$$A = XDX^H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H.$$

Macierz $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H$ jest macierzą rzutu prostopadłego na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor \mathbf{x}_i . Zatem dowolne przekształcenie $V_1 \rightarrow V_1$, którego macierz jest hermitowska, jest kombinacją liniową rzutów prostopadłych na jednowymiarowe podprzestrzenie wzajemnie prostopadłe. Wartości własne λ_i macierzy A są współczynnikami tej kombinacji liniowej.

Zbadajmy teraz przypadek ogólniejszy, gdy macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ nie musi być kwadratowa, ani tym bardziej hermitowska. Będziemy poszukiwać odpowiednich baz przestrzeni V_1 i V_2 . Macierz $A^H A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest hermitowska, zatem istnieje macierz unitarna (w przypadku rzeczywistym ortogonalna) $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$, taka że $U^H A^H A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, a ponadto wszystkie współczynniki diagonalne macierzy D są nieujemne. Przez pomnożenie macierzy U przez macierz odpowiednio dobranej permutacji możemy spowodować, że współczynniki diagonalne macierzy D będą uporządkowane w kolejności nierosnącej. Nieujemne liczby $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ dla $i = 1, \dots, \min\{m, n\}$ są nazywane wartościami szczególnymi macierzy A . Liczba r tych współczynników, które są różne od zera, jest oczywiście równa rzędowi macierzy A .

Pokażemy, że istnieje macierz unitarna (ortogonalna) $V \in \mathbb{K}^{m,m}$, taka że macierz $\Sigma = V^H A U$ jest macierzą diagonalną. Niech

$$\mathbf{w}_i = A \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|_2}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, r.$$

Wtedy dla $i \neq j$

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \mathbf{w}_j^H \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_j^H A^H A \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j^H \lambda_i \mathbf{u}_i = \lambda_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0,$$

ponieważ wektory \mathbf{u}_i i \mathbf{u}_j są do siebie prostopadłe. Tak więc wektory \mathbf{w}_i (czyli także \mathbf{v}_i) są parami prostopadłe, a zatem przez dołączenie do $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ pewnych wektorów $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m$ możemy otrzymać bazę ortonormalną. Macierz $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ jest więc unitarna (ortogonalna) i teraz łatwo jest sprawdzić, że dla $i = 1, \dots, \min\{m, n\}$ zachodzi równość $A \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$. Fakt, że macierz Σ jest diagonalna, wynika z ortogonalności bazy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Udowodniliśmy w ten sposób

Twierdzenie: Dowolna macierz $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ (dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) może być przedstawiona w postaci iloczynu:

$$A = V \Sigma U^H,$$

w którym macierze $U \in \mathbb{K}^{n,n}$ oraz $V \in \mathbb{K}^{m,m}$ są unitarne (jeśli macierz A jest rzeczywista, to ortogonalne), zaś macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{m,n}$ jest diagonalna, przy czym jej współczynniki na diagonalu są nieujemne i uporządkowane nierosnąco. Taki rozkład macierzy nazywa się rozkładem względem wartości szczególnych (ang. *singular value decomposition*, SVD).

Wzór podany w twierdzeniu możemy napisać w postaci

$$A = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H,$$

w której jest on uogólnieniem podanego wcześniej wzoru opisującego rozkład macierzy hermitowskiej. Powyższe twierdzenie o rozkładzie względem wartości szczególnych ujawnia fakt, że każde przekształcenie liniowe ma dosyć prostą strukturę: jeśli przestrzenie V_1 i V_2 są euklidesowe, to dla każdego przekształcenia liniowego $f: V_1 \rightarrow V_2$ istnieją bazy ortonormalne tych przestrzeni, w których przekształcenie f jest reprezentowane przez macierz diagonalną Σ .

Rozkład macierzy względem wartości szczególnych bywa użyteczny w rozwiązywaniu nieregularnych liniowych zadań najmniejszych kwadratów, co jednak wykracza poza ten wykład. Numeryczne znalezienie takiego rozkładu jest dość kosztowne, ale mając go można wiele dowiedzieć się o zadaniu i stosunkowo łatwo jest je rozwiązać.

Norma druga macierzy

Jeśli macierz A jest hermitowska, to dowolny wektor \mathbf{x} możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych, które tworzą bazę ortonormalną: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i$. Wtedy

$$A\mathbf{x} = A \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

Niech λ_k oznacza wartość własną macierzy A o największej wartości bezwzględnej. Możemy oszacować

$$\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{x}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 |\lambda_i|^2 \leq |\lambda_k|^2 \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = |\lambda_k|^2 \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Przypuśćmy, że wektor \mathbf{x} jest jednostkowy, a więc $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$. Liczba $\|A\mathbf{x}\|_2^2$ jest największa, jeśli przyjmiemy $a_k = 1$ oraz $a_j = 0$ dla $j \neq k$ (tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$). Wtedy zamiast nierówności wyżej otrzymamy równość, skąd wynika

Stwierdzenie: Norma macierzy hermitowskiej (lub symetrycznej) $n \times n$ indukowana przez normę drugą przestrzeni \mathbb{C}^n (lub \mathbb{R}^n) jest równa promieniowi spektralnemu tej macierzy.

Zbadajmy, jak można obliczyć normę drugą macierzy, która nie jest hermitowska ani nawet kwadratowa. Niech zatem $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ oraz $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Dla wektora $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ możemy obliczyć

$$\|\mathbf{y}\|_2^2 = \|A\mathbf{x}\|_2^2 = (A\mathbf{x})^H (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A^H A \mathbf{x}.$$

Wyrażenie $\mathbf{x}^H A^H A \mathbf{x}$ przyjmuje największą wartość w punkcie \mathbf{x}_k sfery jednostkowej, który jest wektorem własnym przynależnym do największej wartości własnej λ_k macierzy hermitowskiej $A^H A$ (macierz ta jest nieujemnie określona, a więc $\lambda_k \geq 0$). Stąd normę macierzy A indukowaną przez normę drugą Höldera w \mathbb{C}^n możemy obliczyć na podstawie wzoru

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\lambda_i \in \text{spect } A^H A} \lambda_i} = \sigma_1$$

(liczba σ_1 jest największą wartością szczególną macierzy A).

Uwarunkowanie algebraicznych zagadnień własnych

Przed przystąpieniem do numerycznego rozwiązywania dowolnego zadania wypada zainteresować się jego uwarunkowaniem numerycznym. Od uwarunkowania zależy

sensowność rozwiązywania (dla zadań źle uwarunkowanych można ewentualnie poszukiwać alternatywnych rozwiązań), a także wybór metody.

Zacznijmy od stwierdzenia, że wartości własne dowolnej macierzy zależą od współczynników w sposób ciągły. Jest tak dlatego, że miejsca zerowe wielomianu zależą w sposób ciągły od jego współczynników (np. w bazie potęgowej), a te z kolei zależą w sposób ciągły od współczynników macierzy.

Niestety, ciągłość, o której mowa wyżej, to mało. Rozważmy klatkę Jordana $m \times m$, którą zaburzymy przez przypisanie jednemu tylko współczynnikowi wartości ε zamiast 0. Wtedy otrzymamy macierz, której wielomian charakterystyczny

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & 1 & & & \\ & a - \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a - \lambda & 1 \\ \varepsilon & & & & a - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)^m - (-1)^m \varepsilon,$$

ma m różnych, zespolonych miejsc zerowych $\lambda_k = a + \sqrt[m]{|\varepsilon|} e^{i\varphi_k}$, gdzie $\varphi_k = (\text{Arg } \varepsilon + 2k\pi)/m$, $k = 0, \dots, m-1$.

Oczywiście, dla innych zaburzeń współczynników dostaniemy inne zmiany wartości własnych, ale już widać, że w przypadku, gdy krotność geometryczna pewnej wartości własnej jest mniejsza niż algebraiczna, to zadanie jest *źle uwarunkowane*. Jeśli postać kanoniczna macierzy A zawiera klatkę Jordana o wymiarach $m \times m$, to możemy stwierdzić, że istnieje stała c , taka że

$$|\lambda(A + \Delta A) - \lambda(A)| \leq c \|\Delta A\|^{1/m}$$

(powyższy warunek nazywa się ciągłością w sensie Höldera z wykładnikiem $1/m$). Również zaburzenie kierunku odpowiedniego wektora własnego (tj. kąt między wektorem własnym macierzy danej i zaburzonej) może być proporcjonalne do $\|\Delta A\|^{1/m}$, co powoduje, że w rachunku numerycznym na ogół nie jesteśmy w stanie rozpoznać struktury macierzy, która nie jest diagonalizowalna.

Wskutek błędów zaokrągleń jest prawie niemożliwe odróżnienie macierzy o złożonej strukturze od macierzy diagonalizowalnej (mniej więcej to samo mamy dla układów równań z macierzą niepełnego rzędu: jeśli macierz trzeba przekształcić w celu otrzymania równoważnego układu z macierzą trójkątną, to prawie zawsze otrzymamy macierz pełnego rzędu). Jedyne na co możemy liczyć, to

numeryczna poprawność stosowanych algorytmów, tj. jeśli otrzymamy w wyniku obliczeń parę własną (μ, \mathbf{y}) , to będzie to para własna macierzy zaburzonej $A + \Delta A$, gdzie $\|\Delta A\| \leq K\|A\|v$ (dla pewnej stałej K). Tak więc potrzebne jest zbadanie, jak takie zaburzenia macierzy wpływają na wartości i wektory własne.

Załóżmy, że macierz A jest diagonalizowalna, a więc $A = X^{-1}DX$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i rozważmy parę własną (μ, \mathbf{y}) macierzy $A + \Delta A$. Mamy

$$\mu \mathbf{y} = (A + \Delta A)\mathbf{y} = (X^{-1}DX + \Delta A)\mathbf{y}$$

i stąd dla $\mathbf{z} = X\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

$$(D - \mu I_n)\mathbf{z} = -X\Delta AX^{-1}\mathbf{z}.$$

Chcemy zbadać, jak daleko jest liczba μ od widma macierzy A ; jeśli liczba ta jest równa którejś wartości własnej, to znaleźliśmy tę wartość własną dokładnie. Przyjmijmy zatem, że $\Delta\lambda = \min_{i=1, \dots, n} |\lambda_i - \mu| > 0$ (czyli liczba μ jest różna od wszystkich wartości własnych). Wtedy macierz $D - \mu I_n$ jest nieosobliwa i mamy

$$\|\mathbf{z}\| = \|(D - \mu I_n)^{-1}X\Delta AX^{-1}\mathbf{z}\| \leq \frac{1}{|\Delta\lambda|} \|X\| \|X^{-1}\| \|\Delta A\| \|\mathbf{z}\|,$$

skąd wynika następujące oszacowanie Bauera-Fikego:

$$|\Delta\lambda| \leq \text{cond } X \cdot \|\Delta A\|.$$

Jak widzimy, dla macierzy diagonalizowalnej wartości własne zależą od współczynników macierzy w sposób lipschitzowsko ciągły; zwróćmy uwagę, że w oszacowaniu występuje taki sam wskaźnik uwarunkowania macierzy X jak w zadaniu rozwiązywania układu równań liniowych z tą macierzą. Jeśli macierz X nie jest określona jednoznacznie, to do oszacowania możemy wziąć macierz odpowiedniego podobieństwa o najmniejszym wskaźniku uwarunkowania.

W ten sposób dochodzimy do wniosku, że zaburzenia wartości własnych macierzy hermitowskich (w tym rzeczywistych symetrycznych) można oszacować przez normę zaburzenia macierzy, jako że wskaźnik uwarunkowania (w normie drugiej) macierzy podobieństwa X , która jest unitarna, jest równy 1. Natomiast zmiana wektora własnego, która jest skutkiem zaburzeń współczynników macierzy, może być duża wtedy, gdy wartość własna, do której ten wektor przynależy, leży blisko innych wartości własnych (w szczególności, kiedy ta wartość własna ma krotność większą od 1).

W ogólnym przypadku zaburzenia wektorów własnych są duże wtedy, gdy kąty między podprzestrzeniami własnymi są małe. Wiele metod numerycznych

rozwiązywania algebraicznych zagadnień własnych polega na wielokrotnym przekształcaniu macierzy za pomocą podobieństw; ciąg taki ma zbiegać do macierzy trójkątnej (w przypadku niesymetrycznym) albo diagonalnej. Dlatego w metodach tych często stosuje się podobieństwa reprezentowane przez macierze ortogonalne (albo unitarne); ponieważ opisują one izometrie, więc nie zmieniają kątów między podprzestrzeniami własnymi, tj. nie pogarszają uwarunkowania zadania wyznaczania wektorów własnych.

Zadania i problemy

1. Wiedząc, że mnożenie macierzy rzeczywistej przez macierze ortogonalne nie zmienia normy drugiej ani normy Frobeniusa, znajdź stałe równoważności tych norm, tj. liczby dodatnie c_1 i c_2 , takie że

$$c_1 \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq c_2 \|A\|_2$$

dla każdej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Skorzystaj w tym celu z rozkładu względem wartości szczególnych.

2. Pokaż, jak znając rozkład macierzy A względem wartości szczególnych można rozwiązać nieregularne LZNK. Zbadaj, jaki skutek ma zaburzenie macierzy A , które odpowiada zastąpieniu współczynnika $\sigma_{r+1} = 0$ macierzy Σ przez pewną liczbę $\varepsilon \neq 0$ o bardzo małej wartości bezwzględnej.
3. Podaj wzór, prostszy niż dla dowolnej macierzy, umożliwiający obliczenie normy drugiej macierzy hermitowskiej.
4. Podaj wzór umożliwiający obliczenie wskaźnika uwarunkowania w normie drugiej nieosobliwej macierzy hermitowskiej.
5. Udowodnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ rzędu r zachodzi równość $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i}$, gdzie liczby σ_i są wartościami szczególnymi macierzy A .

Metody rozwiązywania algebraicznych zagadnień własnych

Uwagi ogólne

Na podstawie dotychczas przedstawionej teorii rozwiązywanie algebraicznego zagadnienia własnego jawi się jako następujący algorytm:

1. Znajdujemy współczynniki wielomianu charakterystycznego,
2. Znajdujemy miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego (czyli wartości własne),
3. Dla każdej wartości własnej znajdujemy bazę odpowiedniej podprzestrzeni własnej.

W praktyce ta metoda jest odpowiednia dla macierzy o wymiarach 2×2 , a najwyżej 3×3 . Przyczyny są takie: umiemy rozwiązać (przez obliczenie pewnych wyrażeń, w których występują cztery działania arytmetyczne i pierwiastki) równania algebraiczne stopnia co najwyżej 4 (i tylko w szczególnych przypadkach wyższego stopnia), przy czym prawie nikt nie używa wzorów opisujących pierwiastki wielomianu stopnia 4, a mało kto 3.

Dla wielomianów wyższego stopnia (czyli dla większych macierzy) trzeba stosować metody iteracyjne, których wynikiem jest pewne przybliżenie pierwiastków wielomianu, co jednak w rachunku numerycznym (z błędami zaokrążeń) jest nieistotne, bo wzory „dokładne” też realizujemy z błędami zaokrążeń. Problemem jest jednak uwarunkowanie zadania. O ile, jak się przekonaliśmy, zadanie wyznaczenia wartości własnych macierzy symetrycznej (z wyjątkiem wartości bliskich zera) jest dobrze uwarunkowane, to zadanie znalezienia miejsc zerowych wielomianu charakterystycznego tej macierzy na podstawie jego współczynników w bazie potęgowej jest zwykle znacznie gorzej, a w pewnych przypadkach wręcz patologicznie źle uwarunkowane.

Z tego względu metody numeryczne polegające na rozwiązywaniu równania charakterystycznego opierają się na obliczaniu wartości $w(x) = \det(A - xI_n)$ dla pewnych liczb x bezpośrednio na podstawie współczynników macierzy A , lub innej macierzy, podobnej do A . Wprowadzone podobieństwo ma na celu zmniejszenie kosztu obliczania wyznacznika.

Wybór metody rozwiązywania algebraicznego zagadnienia własnego zależy od tego, czy interesują nas tylko wartości własne, czy również wektory własne, czy zależy nam na znalezieniu wszystkich, czy tylko niektórych (np. największych)

wartości własnych, a także od tego, czy macierz jest symetryczna (lub hermitowska) i czy jest rzadka (tj. czy ma tylko niewiele współczynników niezerowych). Jak widać, dobór metody musi być poprzedzony zbadaniem konkretnego zadania i jego zastosowania.

Sprowadzanie macierzy do postaci Hessenberga

Def. Macierz Hessenberga (górna) jest to macierz kwadratowa $[a_{ij}]_{i,j}$, której współczynniki spełniają warunek $a_{ij} = 0$ dla $j < i - 1$.

Innymi słowy, wszystkie niezerowe współczynniki macierzy Hessenberga są ułożone nad diagonalą, na diagonalu i bezpośrednio pod diagonalą. Dowolna macierz A jest podobna do macierzy trójkątnej na mocy twierdzenia Schura, ale zwykle nie możemy w skończonej liczbie kroków skonstruować odpowiedniego podobieństwa, bo byłoby to równoważne rozwiązaniu w skończonej liczbie kroków równania algebraicznego stopnia n . Natomiast dowolną macierz możemy w skończonej liczbie kroków przekształcić do postaci Hessenberga. W ten sposób możemy znacznie zmniejszyć koszt dalej stosowanych obliczeń.

Jedną z najczęściej stosowanych metod przekształcania macierzy do postaci Hessenberga jest metoda odbić Householdera. Pierwsze odbicie konstruujemy tak, aby obrazem pierwszej kolumny był wektor, który ma niezmienną pierwszą współrzędną (cały pierwszy wiersz macierzy pozostanie zatem niezmiennym), natomiast współrzędne $3, \dots, n$ mają być przekształcone na 0. Po zastosowaniu tego przekształcenia do wszystkich kolumn przekształcamy w taki sam sposób wiersze — w ten sposób zamiast macierzy A otrzymamy macierz HAH (pamiętamy, że $H^{-1} = H^T = H$), podobną do A . Schematycznie wygląda to tak (czarne kropki oznaczają współczynniki niezmiennione, puste miejsca to zera):

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

Jak widać, przekształcając wiersze nie niszcymy zer w pierwszej kolumnie. Kolejne kroki są podobne, np. drugi wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & \circ & \circ \\ & & & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

Macierz podobieństwa danej macierzy A do otrzymanej macierzy Hessenberga jest iloczynem macierzy kolejno wykonanych odbić. Jeśli jest nam potrzebna (w celu obliczenia wektorów własnych), to jak zwykle reprezentujemy ją za pomocą wektorów normalnych hiperpłaszczyzn odbić.

Zwróćmy uwagę, że jeśli macierz A jest symetryczna (albo hermitowska w przypadku zespolonym), to własność ta będzie zachowana przez to przekształcenie. W wyniku otrzymamy więc symetryczną albo hermitowską macierz Hessenberga, czyli macierz trójdiagonalną.

Obliczenie wyznacznika macierzy pełnej przy użyciu eliminacji Gaussa wymaga wykonania $O(n^3)$ działań arytmetycznych. To samo zadanie dla macierzy Hessenberga może być rozwiązane za pomocą $O(n^2)$ działań, zaś w przypadku macierzy trójdiagonalnej tylko $O(n)$ działań. Oczywiście, koszt przejścia do tej postaci to $O(n^3)$ działań, ale jest to czynność jednorazowa, a obliczanie wartości wielomianu charakterystycznego (w celu znalezienia jego zer metodą numeryczną) wykonuje się wielokrotnie.

Metoda potęgowa i jej modyfikacje

Jedną z najprostszych metod znajdowania pojedynczych wartości własnych i wektorów własnych do nich przynależnych jest metoda potęgowa.

W podstawowej wersji nie jest ona szczególnie użyteczna, ale na podobnej zasadzie działają bardziej wyrafinowane i skuteczne metody. Przyjmijmy, że wszystkie współczynniki i wartości własne macierzy A są liczbami rzeczywistymi.

Przypuśćmy, że macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej i ma jedną tzw. dominującą wartość własną λ_1 , taką że $|\lambda_1| > |\lambda_k|$ dla $k = 2, \dots, n$. Niech \mathbf{y}_0 oznacza dowolny wektor, który możemy przedstawić w bazie złożonej z wektorów własnych $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ macierzy A : $\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i$. Określamy teraz ciąg $\mathbf{y}_k = A \mathbf{y}_{k-1}$. Nietrudno zauważyć, że

$$\mathbf{y}_k = A^k \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k \mathbf{x}_i.$$

Jeśli $|\lambda_1| > 1$, to ciąg $\|\mathbf{y}_k\|$ rośnie nieograniczenie, zaś jeśli $|\lambda_1| < 1$, to maleje do zera. W pierwszym przypadku składnik $\lambda_1^k a_1 \mathbf{x}_1$ rośnie najszybciej, a w drugim maleje najwolniej, a zatem po wykonaniu dostatecznie wielu iteracji otrzymamy wektor \mathbf{y}_k , którego kierunek różni się dowolnie mało od kierunku wektora własnego \mathbf{x}_1 . W praktyce wektory \mathbf{y}_k trzeba poddawać normalizacji, tj. dzielić przez ich długość (lub dowolną inną normę), dzięki czemu nie grozi wystąpienie nadmiaru lub niedomiaru w obliczeniach.

Proces iteracyjny, który realizuje metodę potęgową z normalizacją, wygląda tak:

$\mathbf{z}_0 =$ dowolny wektor początkowy, taki że $\|\mathbf{z}_0\| = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_k &= A \mathbf{z}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{y}_k / \|\mathbf{y}_k\| \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots$$

Jeśli macierz A spełnia przyjęte założenia, to ciąg wektorów \mathbf{z}_k zbiega do wektora własnego \mathbf{x}_1 , przy czym w obliczeniach numerycznych zwykle dzieje się tak nawet wtedy, gdy przyjmijmy wektor początkowy $\mathbf{z}_0 \in \text{lin}\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ (to jest jeden z niezliczonych przypadków, kiedy skutki błędów zaokrągleń są pożyteczne).

Zwróćmy uwagę, że aby zastosować tę metodę, nie musimy znać jawnej reprezentacji macierzy A ; wystarczy mieć tylko podprogram, który obliczy iloczyn tej macierzy i danego wektora. Nie musimy też wyznaczać innych macierzy np. poprzez zmianę współczynników macierzy A . Dzięki temu łatwo jest stosować metodę potęgową np. do rzadkich macierzy o dużych wymiarach.

Pozostają do ustalenia dwie rzeczy: jak obliczyć w tej metodzie wartość własną λ_1 i jak oszacować szybkość zbieżności. Przypuśćmy, że wykonaliśmy dostatecznie dużo iteracji aby wtedy wektor \mathbf{z}_{k-1} był dobrym przybliżeniem wektora własnego \mathbf{x}_1 . Zatem (w ogólności sprzeczny) układ n równań liniowych z jedną niewiadomą, λ ,

$$\mathbf{z}_{k-1} \lambda = A \mathbf{z}_{k-1} = \mathbf{y}_k,$$

jest dobrym przybliżeniem układu $\mathbf{x}_1 \lambda = A \mathbf{x}_1$, którego rozwiązaniem jest wartość własna λ_1 . Możemy potraktować układ jak regularne LZNK i ułożyć odpowiedni układ równań normalnych:

$$\mathbf{z}_{k-1}^T \mathbf{z}_{k-1} \lambda = \mathbf{z}_{k-1}^T \mathbf{y}_k,$$

którego rozwiązaniem jest liczba

$$\rho_k = \frac{\mathbf{z}_{k-1}^T \mathbf{y}_k}{\mathbf{z}_{k-1}^T \mathbf{z}_{k-1}}.$$

Wyrażenie po prawej stronie, którego wartość jest przybliżeniem wartości własnej λ_1 macierzy A , jest nazywane ilorazem Rayleigha. Jeśli normalizacja polega na dzieleniu każdego wektora \mathbf{y}_k przez jego normę drugą, to mianownik ilorazu Rayleigha jest równy 1.

Dla macierzy symetrycznej można udowodnić, że jeśli liczba t_0 jest tangensem kąta między wektorami \mathbf{z}_0 i \mathbf{x}_1 , to przy braku błędów zaokrągleń tangens kąta między \mathbf{z}_k i \mathbf{x}_1 (oznaczymy go symbolem t_k) spełnia nierówność

$$|t_k| \leq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k |t_0|,$$

gdzie λ_2 oznacza drugą co do wartości bezwzględnej wartość własną macierzy A . Natomiast ciąg ilorazów Rayleigha zbiega do λ_1 zgodnie z oszacowaniem

$$|\rho_k - \lambda_1| \leq 2\|A\| |t_k|^2 = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right),$$

a więc zbieżność tego ciągu jest jeszcze szybsza.

Jak widać, metoda potęgowa działa dobrze, jeśli iloraz λ_2/λ_1 ma wartość bezwzględną dużo mniejszą niż 1. W sytuacji, gdy krotność wartości własnej λ_1 jest większa niż 1, ciąg wektorów z_k zbiega do pewnego wektora leżącego w podprzestrzeni własnej przynależnej do λ_1 , ale nie mamy jak rozpoznać wymiaru tej podprzestrzeni. Najgorsza jest sytuacja, gdy $\lambda_1 = -\lambda_2$, możemy jej jednak zaradzić wprowadzając przesunięcia widma. Jak wiemy, liczba λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\lambda - a$ jest wartością własną macierzy $A - aI_n$. Przyjmując $a < 0$ możemy otrzymać macierz, której dominująca wartość własna jest dodatnia, zaś $a > 0$ spowoduje powstanie macierzy o dominującej ujemnej wartości własnej. Aby zbieżność była najszybsza, należałoby przyjąć $a = \frac{1}{2}(a + b)$, gdzie $[a, b]$ jest jak najkrótszym przedziałem zawierającym wszystkie wartości własne oprócz λ_1 (czasem mamy pewne informacje o macierzy A , dzięki którym możemy wskazać taki przedział).

Pora na radykalne ulepszenie metody, zwane odwrotną metodą potęgową.

W metodzie z przesunięciami możemy znaleźć tylko największą i najmniejszą wartość własną. Obecnie będziemy poszukiwać wartości własnej, która jest najbliższa wskazanej liczby a . W tym celu zauważmy, że jeśli $\text{spect } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, to liczby $\frac{1}{\lambda_1 - a}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - a}$ są wartościami własnymi macierzy $(A - aI_n)^{-1}$ i dominującą jest ta, której odpowiada mianownik o najmniejszej wartości bezwzględnej. Metoda jest taka:

z_0 = dowolny wektor początkowy, taki że $\|z_0\| = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_k &= (A - aI_n)^{-1} z_{k-1}, \\ z_k &= \mathbf{y}_k / \|\mathbf{y}_k\| \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots,$$

przy czym obliczenie wektora \mathbf{y}_k polega na rozwiązaniu układu równań z macierzą $A - aI_n$. Wreszcie, możemy w kolejnych iteracjach zmieniać parametr a , zastępując go coraz dokładniejszymi przybliżeniami ρ_k poszukiwanej wartości własnej, które otrzymujemy obliczając ilorazy Rayleigha. W tym procesie macierz $A - \rho_k I_n$ dąży do macierzy osobliwej (i w szczególności nieograniczenie rośnie jej wskaźnik uwarunkowania), ale nie ma to negatywnego wpływu na dokładność obliczenia wartości własnej, zaś zbieżność tego procesu jest znacznie szybsza (z tym, że w każdej iteracji trzeba rozkładać nową macierz na czynniki trójkątne;

jeśli parametr a jest ustalony, to wystarczy zrobić to raz; widać tu jak opłacalne jest wstępne przekształcenie macierzy do postaci Hessenberga lub trójdzielnej — dla takiej macierzy koszt jednej iteracji metody odwrotnej jest prawie taki sam jak w iteracji prostej).

Iteracje na podprzestrzeniach i algorytm QR

Założmy teraz, że macierz A jest rzeczywista i symetryczna. Spróbujmy tak zmienić metodę potęgową, aby otrzymać l ciągów wektorów, z których każdy zbiega do wektora własnego przynależnego do innej wartości własnej (bierzemy pod uwagę l wartości własnych o największych wartościach bezwzględnych). Jak wiemy, z wektorów własnych macierzy symetrycznej można utworzyć bazę ortonormalną przestrzeni \mathbb{R}^n . Możemy więc zażądać, aby wektory z_{k1}, \dots, z_{kl} otrzymane w k-tej iteracji były do siebie prostopadłe.

Idea metody iteracji prostej na podprzestrzeniach wygląda tak:

z_{01}, \dots, z_{0l} — wektory jednostkowe, wzajemnie prostopadłe.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_{kj} &= A z_{k-1,j} \quad \text{dla } j = 1, \dots, l, \\ z_{k1}, \dots, z_{kl} &\text{ — wektory otrzymane} \\ &\text{za pomocą ortonormalizacji } \mathbf{y}_{k1}, \dots, \mathbf{y}_{kl} \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots$$

Możemy zauważyć, że choć mnożenie wektora $\mathbf{y}_{k-1,j}$ przez macierz A dla $j > 1$ powoduje największy wzrost składowych w kierunku wektorów własnych $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}$, przynależnych do wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}$ o największych wartościach bezwzględnych, jednak składowe te są „wygaszane” przez ortonormalizację. Dlatego kierunek wektorów w ciągu $z_{1j}, z_{2j}, z_{3j}, \dots$ będzie dążył do kierunku wektora \mathbf{x}_j przynależnego do j-tej co do wartości bezwzględnej wartości własnej λ_j . Dokładniejsze zbadanie warunków dostatecznych tej zbieżności opiera się na rachunkach, które pominię.

Metodę iteracji prostej na podprzestrzeniach można przedstawić w postaci macierzowej:

Wybierz macierz $Z_0 = [z_{01}, \dots, z_{0l}]$ o kolumnach

parami prostopadłych o długości 1;

dla $k = 1, 2, \dots$

Oblicz $Y_k = AZ_{k-1}$;

Znajdź macierze Z_k i R_k , takie że $Y_k = Z_k R_k$ i kolumny macierzy Z_k są parami prostopadłe i mają długość 1, zaś R_k jest macierzą trójkątną górną.

Przypuśćmy teraz, że wybraliśmy $l = n$, tj. że dokonujemy iteracji na całej przestrzeni \mathbb{R}^n (a zatem interesuje nas otrzymanie ciągów zbieżnych do n wzajemnie prostopadłych wektorów własnych macierzy A). Przypuśćmy dalej, że wybraliśmy macierz $Z_0 = I_n$ (to jest wybór dopuszczalny). Określmy macierze

$$A_k \stackrel{\text{def}}{=} Z_k^T A Z_k.$$

Wtedy mamy

$$A_k = Z_k^T Y_{k+1} = Z_k^T Z_{k+1} R_{k+1} = Q_{k+1} R_{k+1},$$

gdzie $Q_{k+1} = Z_k^T Z_{k+1}$, skąd wynika $Z_{k+1} = Z_k Q_{k+1}$ i przez indukcję

$$Z_k = Z_0 Q_1 \dots Q_k = Q_1 \dots Q_k.$$

Mamy zatem

$$A_k = Q_k^T \dots Q_1^T A Q_1 \dots Q_k = Q_k^T A_{k-1} Q_k = R_k Q_k.$$

Tak więc określiliśmy pewien ciąg macierzy $A_0 = A, A_1, A_2, \dots$, z których wszystkie są podobne do A (i macierze podobieństw są ortogonalne).

Rozkład ortogonalno-trójkątny macierzy nieosobliwej jest określony jednoznacznie z dokładnością do zwrotów kolumn macierzy ortogonalnej i wierszy macierzy trójkątnej. Aby go znaleźć można użyć ortonormalizacji Grama-Schmidta, obrotów Givensa albo odbić Householdera (stosując różne metody będziemy mieli macierze z kolumnami o różnych zwrotach, ale to jest nieistotne). Jeśli macierz A_{k-1} jest osobliwa, to jej rozkład ortogonalno-trójkątny jest niejednoznaczny, ale okazuje się, że ta niejednoznaczność nie przeszkadza w działaniu algorytmu.

Wskazaliśmy zatem związek określonego wyżej ciągu macierzy z metodą iteracji na podprzestrzeniach. Ponieważ ciąg macierzy Z_k dąży do macierzy Z , której kolumny są wektorami własnymi macierzy A , więc ciąg macierzy A_k dąży do macierzy diagonalnej, której współczynniki diagonalne są oczywiście wartościami własnymi macierzy A . Algorytm

$$A_0 = A;$$

$$\text{dla } k = 1, 2, \dots$$

znajdź macierz ortogonalną Q_k i trójkątną górną R_k , takie że $A_{k-1} = Q_k R_k$;

$$A_k = R_k Q_k;$$

który tworzy taki ciąg macierzy, nazywa się algorytmem QR. Po opracowaniu pewnych szczegółów algorytm ten jest najefektywniejszym znanym algorytmem wyznaczania pełnego rozwiązania algebraicznego zagadnienia własnego.

Szczegóły są takie: jeśli macierz A jest trójdzielna (a dowolną rzeczywistą macierz symetryczną potrafimy do takiej postaci przekształcić i powinniśmy to zrobić z góry), to wszystkie macierze A_k też są trójdzielne. Wynika to stąd, że jeśli rozkładana macierz A_{k-1} jest macierzą trójdzielną (czyli szczególnym przypadkiem macierzy Hessenberga), to j -ta kolumna macierzy Q_k (dla $j < n$) jest kombinacją liniową wektorów e_1, \dots, e_{j+1} (czyli macierz Q_k też jest macierzą Hessenberga) i obliczając iloczyn $A_k = R_k Q_k$ dostaniemy znowu macierz Hessenberga, a ze względu na zachowanie symetrii przez kongruencje — macierz trójdzielną.

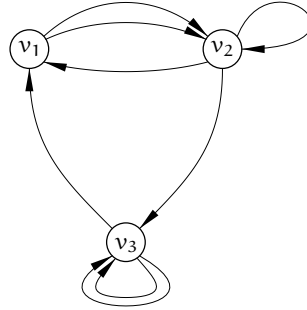
Drugi szczegół ma na celu zapewnienie i przyspieszenie zbieżności. Do tego celu służą przesunięcia, określone podobnie jak w metodzie potęgowej. Zamiast macierzy A_{k-1} rozkładamy na czynniki $Q_{k-1} R_{k-1}$ macierz $A_{k-1} - \mu_k I_n$, a następnie obliczamy $A_k = R_{k-1} Q_{k-1} + \mu_k I_n$. Parametr μ_k przyjmujemy równy w przybliżeniu pewnej wartości własnej macierzy A_{k-1} . Najprościej jest przyjąć $\mu_k = a_{nn}$ (współczynnik w prawym dolnym rogu macierzy A_{k-1}). Inna możliwość to zastosowanie tzw. przesunięć Wilkinsona — przyjmujemy parametr μ_k równy jednej z dwóch wartości własnych bloku 2×2 w prawym dolnym rogu macierzy A_{k-1} (zagadnienie własne z macierzą 2×2 możemy rozwiązać analitycznie). Należy w tym miejscu odnotować, że zastosowanie przesunięć nie tylko przyspiesza, ale przede wszystkim zapewnia zbieżność ciągu macierzy A_1, A_2, \dots do macierzy diagonalnej (która bez przesunięć może nie mieć miejsca).

Ostatni szczegół to zastosowanie deflacji, tj. zmniejszenia wymiaru zadania. Współczynniki na kodiagonalach kolejnych macierzy A_k dążą do zera. Jeśli któryś z tych współczynników jest tak mały, że jego wartość bezwzględna jest na poziomie skutków błędów zaokrągleń, to możemy zastąpić go zerem. Wtedy jednak otrzymujemy macierz blokowo-diagonalną i możemy dalej stosować algorytm do bloków na diagonalu, wprowadzając dla tych bloków indywidualne przesunięcia. Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że aby przekształcić macierz trójdzielną do postaci diagonalnej (tj. znaleźć macierz podobną do A , której współczynniki pozadiagonalne są na poziomie błędów zaokrągleń w standardowych zmiennopozycyjnych reprezentacjach liczb, czyli są pomijalnie małe), co jest równoważne znalezieniu wszystkich wartości własnych macierzy A , zwykle wystarczy mniej niż $2n$ iteracji metody QR.

Zadania i problemy

Na deser zastosujemy wiadomości na temat algebraicznego zagadnienia własnego do rozwiązania pewnego problemu kombinatorycznego.

Graf skierowany jest to obiekt złożony ze skończonego zbioru wierzchołków $\{v_1, \dots, v_n\}$ i krawędzi, czyli uporządkowanych par wierzchołków (v_i, v_j) . Może być wiele krawędzi wiążących te same wierzchołki, przykład jest na rysunku obok.



Dla ustalonego grafu G możemy utworzyć macierz połączeń $A = [a_{ij}]_{i,j}$, której współczynnik a_{ij} jest równy liczbie krawędzi wychodzących z wierzchołka v_i i wchodzących do v_j . Dla grafu na rysunku

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Droga w grafie G nazywamy ciąg krawędzi, z których każda następna ma początek w końcu poprzedniej. Zbadajmy, ile jest dróg o długości $2, 3, \dots$ (w ogólności d), których początkiem jest wierzchołek v_i , a końcem wierzchołek v_j .

Każda droga o długości 2 z wierzchołka v_i do v_j przechodzi przez pewien wierzchołek v_k ; liczba dróg przechodzących przez v_k jest iloczynem liczby dróg z v_i do v_k i liczby dróg z v_k do v_j . Całkowitą liczbę dróg o długości 2 z v_i do v_j otrzymamy sumując iloczyny po wszystkich k . Zauważamy, że otrzymaliśmy wyrażenie opisujące współczynnik w i -tym wierszu i j -tej kolumnie macierzy A^2 .

Dla grafu na rysunku mamy

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Udowodnij (stosując indukcję), że liczby dróg o długości d między wierzchołkami grafu są odpowiednimi współczynnikami macierzy A^d .

2. Cykle w grafie G nazywa się drogę zamkniętą, tj. taką, której koniec jest początkiem.

Z rozwiązania poprzedniego problemu wynika, że liczba cykli o długości d , których początkiem (i końcem) jest wierzchołek v_i , jest współczynnikiem w i -tym

wierszu na diagonalu macierzy A^d . Całkowita liczba cykli o długości d w grafie G jest sumą współczynników diagonalnych macierzy A^d .

Suma współczynników macierzy kwadratowej M nazywa się śladem macierzy M (oznacza się ją symbolem $\text{tr } M$). Jak wiemy, jest ona równa sumie wartości własnych macierzy M .

3. Interesuje nas liczba cykli o długości d , przy czym liczba d jest bardzo duża. Wynika stąd problem: czy można obliczyć ślad macierzy A^d nie obliczając tej macierzy (mogłoby to być zbyt kosztowne).

Odpowiedź w zasadzie jest prosta: jeśli znamy wszystkie wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy A , to

$$\text{tr}(A^d) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^d.$$

Problem polega na ich znalezieniu, czego też chcielibyśmy uniknąć.

4. Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A ; mamy $a_n = (-1)^n$. Na podstawie twierdzenia Cayleya-Hamiltona macierz $w(A)$ jest zerowa. Dla dowolnego $d \geq n$ spełnione jest zatem równanie

$$A^d = (-1)^{n-1} (a_{n-1} A^{d-1} + \dots + a_1 A^{d-n+1} + a_0 A^{d-n}).$$

Ale ślad (tj. przekształcenie $\mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$, które macierzy przyporządkowuje sumę jej współczynników diagonalnych) jest funkcjonałem liniowym, skąd wynika, że

$$\text{tr}(A^d) = (-1)^{n-1} (a_{n-1} \text{tr}(A^{d-1}) + \dots + a_1 \text{tr}(A^{d-n+1}) + a_0 \text{tr}(A^{d-n})).$$

Znając współczynniki a_0, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego i ślady macierzy A, A^2, \dots, A^{n-1} (które możemy obliczyć w „zwykły” sposób) możemy powyższy wzór stosować rekurencyjnie do liczenia cykli w grafie.

Dla zobaczenia „jak to wygląda” znajdź współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy A odpowiadającej grafowi na rysunku i oblicz podanym sposobem liczby cykli o długości 3, 4, 5 w tym grafie.

Uwaga: Wszystkie liczby pojawiające się podczas działania algorytmu opartego na powyższym pomysłe są całkowite, w związku z czym nie należy implementować go przy użyciu arytmetyki zmiennopozycyjnej, tylko całkowitej (dopuszczającej odpowiednio duże liczby). W tym sensie algorytm ten *nie jest* metodą numeryczną.