Notatki z Rachunku μ

Rafał Rusin

19 stycznia 2004

1 Wykład

μ–rachunek to pewna logika. Składa się ze zbioru praw i języka.
Do przypomnienia:

- krata zupełna
- tw. Knastera-Tarskiego o punkcie stałym

Podstawy:
Funkcja

$$f : X \to Y$$

gdzie X i Y są zbiorami uporządkowanymi $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$, jest monotoniczna $\iff$

$$\forall_{x_1, x_2 \in X}((x_1 \leq x_2) \implies f(x_1) \preceq f(x_2))$$

Niech $\langle L, \leq \rangle$ — krata zupełna. Każdy podzbiór $X \subseteq L$ ma kres górny $\bigvee X$.
Uwaga: Wówczas każdy zbiór $Y \subseteq L$ ma kres dolny $\bigwedge Y$, a mianowicie:

$$\bigwedge Y = \bigvee \{x : \forall_{y \in Y} x \leq y\}$$

Z definicji mamy:

$$\bigvee \emptyset = \bot$$

$$\bigwedge \emptyset = \top$$

Krata zupełna na zbiorze potęgowym to:

$$\langle P(X), \subseteq \rangle$$

Niech L, M — kraty zupełne, to $L \times M$ też jest kratą zup., z porządkiem po współrzędnych.
Uogólnienie:
Niech $\{L_i : i \in I\}$ — rodzina krat zupełnych. Wtedy $\prod L_i$ jest kratą zupełną z porządkiem po współrzędnych.

$$f \leq g \iff \forall_{i \in I} f(i) \leq g(i)$$

Również L^M, gdzie L jest kratą zupełną, jest kratą zupełną z porządkiem:

$$f, g \in L^M$$

$$f \leq g \iff \forall_{m \in M} f(m) \leq g(m)$$

Jeśli M jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to $[M \to L] \subseteq L^M$ funkcje monotoniczne z M do L tworzą kratę zupełną, gdyż dla każdego $X \subseteq [M \to L]$ funkcja

$$(\bigvee X)(m) = \bigvee_{f \in X} f(m)$$

jest też monotoniczna, ponieważ

$$m_1 \leq m_2 \Longrightarrow \bigvee_{f \in X} f(m_1) \leq \bigvee_{f \in X} f(m_2)$$

Twierdzenie 1 (Knastera-Tarskiego) *$\langle L, \leq \rangle$ — krata zup. Jeśli $f : L \to L$ jest monotoniczna, to f ma:*

1. *najmniejszy punkt stały*

$$\mu x.f(x) = \bigwedge \{a \in L : f(a) \leq a\}$$

2. *największy punkt stały*

$$\nu x.f(x) = \bigvee \{a \in L : a \leq f(a)\}$$

Dowód: Rozpatrujemy przypadki:

- Ad. 2.
  Niech $a_0 = \bigvee \{a \in L : a \leq f(a)\}$.
  Wykażemy $a_0 \leq f(a_0)$.
  Dla każdego a takiego, że $a \leq f(a)$ mamy $a \leq a_0$, stąd $f(a) \leq f(a_0)$. Zatem $a \leq f(a_0)$, czyli $f(a_0)$ jest ograniczeniem.
  Dlaczego jest równość?
  Przypuśćmy, że $a_0 < f(a_0)$, wtedy $f(a_0) \leq f(f(a_0))$, czyli sprzeczność z tym, że a_0 jest kresem górnym zbioru ($f(a_0)$ należy do zbioru).
  Zatem $a_0 = f(a_0)$.

- Ad. 1.
  Analogicznie.

Zasada Symetrii: Dla każdego zdania prawdziwego w μ–rachunku, jeśli zamienimy symbole na symetryczne, tzn. np. $\leq \leftrightarrow \geq$, $\bigvee \leftrightarrow \bigwedge$, $\mu \leftrightarrow \nu$, $\perp \leftrightarrow \top$, to dostaniemy zdanie prawdziwe.
Fakt: Założenia:

f — funkcja monotoniczna, $\langle L, \leq \rangle$ — krata zup.

$$\mu x.f(x) = \bigvee_{\xi < \alpha} f^{\xi}(\bot)$$

dla pewnej liczby porządkowej α o mocy $|\alpha| \leq |L|$, gdzie

$$f^{\xi+1}(\bot) = f(f^{\xi}(\bot))$$

oraz

$$f^{\eta}(\bot) = \bigvee_{\xi < \eta} f^{\xi}(\bot)$$

dla liczb granicznych η.

Podobnie:

$$\nu x.f(x) = \bigwedge_{\xi < \alpha} f^{\xi}(\top)$$

gdzie

$$f^{\xi+1}(\bot) = f(f^{\xi}(\bot))$$

oraz

$$f^{\eta}(\bot) = \bigwedge_{\xi < \eta} f^{\xi}(\bot)$$

dla liczb granicznych η.

Dowód: Zauważmy, że

$$\bigvee_{\xi < \alpha} f^{\xi}(\bot) \leq \mu x.f(x)$$

ponieważ przez indukcję możemy pokazać, że

$$f^{\xi}(\bot) \leq \mu x.f(x)$$

1. gdy $\xi = 0$, wtedy $f^{\xi}(\bot) = \bot \leq \mu x.f(x)$
2. Niech $a_0 = \mu x.f(x)$.
   Dla liczb zwykłych:
   Jeśli $f^{\xi}(\bot) \leq a_0$, to $f^{\xi+1}(\bot) \leq f(a_0) = a_0$.
   Dla liczb granicznych:
   Jeśli $f^{\xi}(\bot) \leq a_0$ dla $\xi < \eta$, to
   $$\bigvee_{\xi < \eta} f^{\xi}(\bot) \leq a_0$$

Gdyby nie było w pewnym miejscu równości, to ciąg $f^{\xi}(\bot)$, gdzie $\xi < \eta$, byłby różnowartościowy dla liczby η, będącej najmniejszą liczbą porządkową o mocy większej niż $|L|$.
Zatem musi istnieć punkt stały.

2 Wykład

Glossa do twierdzenia Knastera-Tarskiego.
Niech $\langle L, \leq \rangle$ — zb. częściowo uporządkowany oraz

$$f : L \to L$$

monotoniczna. Niech

$$Post(f) = \{a : a \leq f(a)\}$$

Uwaga: Jeśli $Post(f)$ ma element największy, to jest to punkt stały.

Dowód:

$$a_{max} \leq f(a_{max})$$

$$f(a_{max}) \leq f(f(a_{max}))$$

Gdyby $a_{max} < f(a_{max})$, to sprzeczność.

Wniosek: Z tego wynika, że aby pokazać, że pewien punkt a_0 jest największym punktem stałym f, $a_0 = \nu x.f(x)$, wystarczy pokazać, że $a_0 \leq f(a_0)$ i a_0 jest ograniczeniem $Post(f)$.

Uwaga: Jeśli istnieje $\bigvee Post(f)$, to $\bigvee Post(f) \in Post(f)$.

Dowód: Niech $a_0 = \bigvee Post(f)$ oraz $a \in Post(f)$. Mamy: $a \leq a_0$,

$$a \leq f(a) \leq f(a_0)$$

Zatem $a_0 \leq f(a_0)$.

Wniosek (tw. Knastera-Tarskiego): W kracie zupełnej każda funkcja monotoniczna ma najmniejszy i największy punkt stały.

Przykład: Σ — skończony alfabet, $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$, L — dowolny język $L \subseteq \Sigma^\infty$, $\epsilon \notin L$.
Wtedy $L^\omega = \nu Y.LY$.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że $L^\omega \subseteq LL^\omega$ oraz, że jeśli $M \subseteq LM$, to $M \subseteq L^\omega$.

Przykład: Czy dla funkcji $f(X) = LX$, gdzie $X \subseteq \Sigma^\omega$, zachodzi

$$\nu X.f(X) = \bigcap_{n<\omega} f^n(\Sigma^\infty)$$

?
Weźmy $L = c(a^*b)^* + a$. Wtedy

$$caba^2ba^3b\ldots \in \bigcap_{n<\omega} L^n\Sigma^\infty$$

ale ten ciąg nie należy do żadnego punktu stałego f.
Dowód:
Niech $Y = LY$ oraz $w = caba^2ba^3b\ldots$.
Sprawdzimy, czy $w \in Y$. Niech $L_1 = c(a^*b)^*$. $L = L_1 + a$. Rozpatrzmy wszystkie $u \in Y$.
Mamy przypadki:

- $u = av$, (v – pewne słowo). Wtedy $u \neq w$.
- $u \in L_1 a^k L_1 v$, (v – pewne słowo). Wtedy u zawiera co najmniej 2 litery c na pewnych pozycjach, czyli $u \neq w$.
- $u \in L_1 a^\omega$, (v – pewne słowo). Wtedy $u \neq w$.

Czyli $w \notin Y$. $\square$

Dualność: Przypuśćmy, że nasza krata to $\mathcal{P}(X)$. Określamy $\overline{Y} = X - Y$, $A \subseteq B$, to $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Jeśli

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

jest monotoniczna, to funkcja dualna $\tilde{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, gdzie $\tilde{f}(Y) = \overline{f(\overline{Y})}$ też jest monotoniczna.

Wtedy

$$\overline{\mu X.f(X)} = \nu X.\overline{f}(X)$$

Dowód: Jeśli $A = f(A)$, to

$$\overline{A} = \overline{f(\overline{\overline{A}})} = \tilde{f}(\overline{A})$$

Wielokrotne punkty stałe

$f : L_1 \times \ldots \times L_n \to L$ jest monotoniczna, gdy jest monotoniczna ze względu na porządek produktowy, tzn.

$$a_1 \leq b_1 \wedge \ldots \wedge a_n \leq b_n \Longrightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \leq f(b_1, \ldots, b_n)$$

Fakt: Niech L, M — kraty zupełne. Jeśli $f : L \times M \to L$ jest monotoniczna, to funkcja

$$\lambda y.\mu x.f(x, y) : M \to L$$

też jest monotoniczna.

Dowód: Niech $m_1 \leq m_2$. Czy

$$\mu x.f(x, m_1) \leq \mu x.f(x, m_2)?$$

Wystarczy sprawdzić, że

$$f(b, m_1) \leq b = f(b, m_2)$$

$\square$

Jeśli $M = L$, to w szczególności istnieją

$$\mu y.\mu x.f(x, y)$$

$$\nu y.\mu x.f(x, y)$$

3 Wykład

Lemat Ardena: Niech L, M — pewne języki oraz $\epsilon \notin L$, a także M nie zawiera nieskończonych słów. Wtedy

1. $\mu X.LX \cup M = L^*M$
2. $\nu X.LX \cup M = L^*M \cup L^\omega$

Dowód: Ad. 1. Mamy:

(a) $L(L^*M) \cup M = L^*M$ — jest to punkt stały

(b) jeśli $LK \cup M \subseteq K$ dla dowolnego języka K, to $L^*M \subseteq K$.
Udowodnimy ten punkt przez indukcję. Oczywiście:

$$L^*M = \bigcup_{n<\omega} L^n M$$

więc:

i. $L^0M = M \subseteq K$ — ok.

ii. jeśli $L^nM \subseteq K$, to $L(L^nM) \cup M = L^{n+1}M \subseteq K$ — ok.

□

Ad. 2. Mamy:

(a) $L(L^*M \cup L^\omega) \cup M = L^*M \cup L^\omega$ — jest to punkt stały

(b) Pokażemy, że

$$(Y \subseteq LY \cup M) \Longrightarrow (Y \subseteq L^*M \cup L^\omega)$$

Weźmy dowolne słowo $y \in Y$. Pokażemy, że zachodzi jedna z możliwości:

i. $y = w_0w_1 \ldots w_n$, gdzie $w_i \in L$ dla $0 \leq i < n$ oraz $w_n \in M$. Łatwo zauważyć, że wtedy $y \in L^*M$, czyli $y \in L^*M \cup L^\omega$. Zauważmy, że gdy jedno ze słów w_i, $0 \leq i < n$ jest nieskończone, to i tak $y \in L^*M$.

ii. $y = w_0w_1 \ldots$, gdzie $w_i \in L$ dla $0 \leq i < \omega$. Wtedy $y \in L^*M \cup L^\omega$. (Jeżeli jedno z w_i jest nieskończone, to $y \in L^*M$, a gdy wszystkie są skończone, to $y \in L^\omega$)

Ustalmy $y_0 = y$. Zakładamy, że $y_j \in Y$ dla odpowiednich j.
Niech $i := 0$.

i. Korzystając z tego, że $y_i \in Y$ i $Y \subseteq LY \cup M$ wiemy, że
   - albo $y_i = w_iy_{i+1}$, gdzie $w_i \in L$ oraz $y_{i+1} \in Y$. Wtedy wykonujemy $i := i + 1$ i powtarzamy krok (i).
   - albo $y_i = w_i$, gdzie $w_i \in M$. Wtedy kończymy.

Zauważmy, że w wyniku otrzymujemy słowa w_i o własności (i) lub (ii).
Zatem zachodzi $y \in L^*M \cup L^\omega$

$\square$

Przykład:

$$x, y \subseteq \{a, b\}^\infty$$

$$\nu y.\mu x.ax \cup by$$

Przekształcamy. Z Lematu Ardena mamy:

$$\nu y.\mu x.ax \cup by = \nu y.a^*by = (a^*b)^\omega$$

Dygresja: Co oznacza $\mu x.f(x, t)$?
Ogólnie dla krat zupełnych L, K funkcja

$$f : L \times M \to L$$

wyznacza funkcję

$$\hat{f} : L^M \to L^M$$

$$h \to f(h(t), t) \in L^M, h \in L^M$$

$\hat{f}$ ma najmniejszy i największy punkt stały w L^M. Zachodzi $\mu h.\hat{f}(h) = \lambda t.\mu x.f(x, t)$.

Dowód: Oznaczamy $h_0 = \lambda t.\mu x.f(x, t)$. Dowodzimy, że jest to punkt stały:
$\hat{f}(h_0)(t) = f(h_0(t), t) = f(\mu x.f(x, t), t) = \mu x.f(x, t) = h_0(t)$.
Dowodzimy, że jest najmniejszy:
Przypuśćmy, że $\hat{f}(h) \leq h$. Pokażemy, że $h_0 \leq h$.

$$\hat{f}(h)(t) = f(h(t), t) \leq h(t)$$

$$\mu x.f(x, t) \leq h(t)$$

$\square$

3.1 Podstawowe tautologie zachunku μ

1. $\mu x.f(x) \leq \nu x.f(x)$
2. $\mu x.\mu y.f(x, y) = \mu x.f(x, x)$

   Dowód: Oznaczmy $a = \mu x.\mu y.f(x, y)$ oraz $b = \mu x.f(x, x)$. Teraz:

   $$a = \mu y.f(a, y) = f(a, a)$$

   Zatem $b \leq a$.
   Żeby wykazać $a \leq b$ wystarczy pokazać, że $\mu y.f(b, y) \leq b$.

   $$\mu y.f(b, y) \leq f(b, b) = b$$

□

Generalnie zachodzi reguła:

$$F(a) \leq a \Longrightarrow \mu x.F(x) \leq a$$

$$a \leq F(a) \Longrightarrow a \leq \nu x.F(x)$$

3. $\mu x.\nu y.f(x,y) \leq \nu y.\mu x.f(x,y)$

   Dowód: Oznaczmy $a = \mu x.\nu y.f(x,y)$. wystarczy pokazać, że $a \leq \mu x.f(x,a)$.

   Sublemat: Przypuśćmy, że funkcja g monotoniczna spełnia $g(x) = f(x, g(x))$. Niech $a = \mu x.g(x)$. Wtedy $a = \mu x.f(x,a)$.

   Dowód: Oznaczmy $b = \mu x.f(x,a)$.

$$a = g(a) = f(a, g(a)) = f(a,a)$$

   Zatem $b \leq a$.
   Dalej wystarczy pokazać, że $g(b) \leq b$. Mamy $g(b) = f(b, g(b))$ oraz $b = f(b,a)$. Wiemy, że $g(b) \leq g(a) = a$. Zatem $g(b) \leq b$. □

   Wracamy do dowodu. Wstawiając w sublemacie $g(x) = \nu y.f(x,y)$ otrzymujemy, że

$$a = \mu x.f(x,a) \leq \nu y.\mu x.f(x,y)$$

   □

   Przykład: Niech $\langle [0,1], \leq \rangle$ — krata zupełna.

$$\mu x.\nu y.\frac{x+y}{2} \leq \nu y.\mu x.\frac{x+y}{2}$$

   Lewa strona jest równa 0, a prawa 1.

3.2 Zasada eliminacji Gaussa

Niech $\langle L, \leq \rangle$, $\langle K, \leq \rangle$ — kraty zupełne,

$$F : L \times K \to L \times K$$

monitoniczna.
F będziemy utożsamiać z parą

$$F_1 : L \times K \to L$$

$$F_2 : L \times K \to K$$

$$F(a,b) = \langle F_1(a,b), F_2(a,b)\rangle$$

Funkcja F ma najmniejszy punkt stały w $L \times K$, co zapisujemy

$$\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} F_1(x_1,x_2) \\ F_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}$$

Jest to najmniejsze rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_1,x_2) \\ x_2 = F_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

Zasada eliminacji Gaussa:

- Dla 2 zmiennych:

  Niech

  $$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} F_1(x_1,x_2) \\ F_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}$$

  Wtedy

  $$a = \mu x_1.F_1(x_1,b)$$

  $$b = \mu x_2.F_2(a,x_2)$$

  Dowód: Niech $a' = \mu x_1.F_1(x_1,b)$ oraz $b' = \mu x_2.F_2(a,x_2)$.
  Mamy $a = F_1(a,b)$, zatem $a' \leq a$.
  $b = F_2(a,b)$, zatem $b' \leq b$.
  Mamy $F_1(a',b) = a'$. Czy $F_2(a',b) \leq b$?
  Zachodzi $F_2(a',b) \leq F_2(a,b) = b$, czyli ok. Zatem

  $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a' \\ b \end{pmatrix}$$

  Podobnie $F_2(a,b') = b'$. $F_1(a,b') \leq F_1(a,b) = a$, czyli $F_1(a,b') \leq a$.
  Zatem

  $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ b' \end{pmatrix}$$

  Stąd również

  $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

  □

- Dla k zmiennych, gdzie $k \geq 3$:
  Możemy zredukować do $k-1$ zmiennych, ponieważ:

  $$\mu \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} \equiv \mu \begin{bmatrix} x_1 \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_1 \\ \begin{bmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie (Zasada Bekica) Niech

$$f_1 : L_1 \times L_2 \to L_1$$

$$f_2 : L_1 \times L_2 \to L_2$$

funkcje monotoniczne na kratach zupełnych. Wtedy

$$\mu \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu x_1 . f_1(x_1, \mu x_2 . f_2(x_1, x_2)) \\ \mu x_2 . f_2(\mu x_1 . f_1(x_1, x_2), x_2) \end{bmatrix}$$

Dowód: Oznaczmy lewą stronę przez

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

i prawą stronę przez

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

- $Prawa \leq Lewa$:
  Zachodzi

  $$a = f_1(a, b)$$

  $$b = f_2(a, b)$$

  oraz

  $$\mu x_1 . f_1(x_1, b) \leq a$$

  $$\mu x_2 . f_2(a, x_2) \leq b$$

  więc

  $$f_1(a, \mu x_2 . f_2(a, x_2)) \leq f_1(a, b) = a$$

  $$f_2(\mu x_1 . f_1(x_1, b), b) \leq f_2(a, b) = b$$

  czyli

  $$a' = \mu x_1 . f_1(x_1, \mu x_2 . f_2(x_1, x_2) \leq a$$

  $$b' = \mu x_2 . f_2(\mu x_1 . f_1(x_1, x_2), x_2) \leq b$$

  □

- $Lewa \leq Prawa$:
  Zachodzi

  $$a' = f_1(a', \mu x_2 . f_2(a', x_2))$$

  $$b' = f_2(\mu x_1 . f_1(x_1, b'), b')$$

  Oznaczmy

  $$a'' = \mu x_1 . f_1(x_1, b')$$

  $$b'' = \mu x_2 . f_2(a', x_2)$$

Mamy

$$a'' = f_1(a'', b')$$
$$b'' = f_2(a', b'')$$

czyli

$$\begin{bmatrix} a' \\ b'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a', b'') \\ f_2(a', b'') \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a'' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a'', b') \\ f_2(a'', b') \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że lewa strona równości, którą dowodzimy, to najmniejszy punkt stały przekształcenia takiego, jak powyższe dwa. Zatem musi zachodzić

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a' \\ b'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a'' \\ b' \end{bmatrix}$$

Z tego wynika, że

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

Czyli faktycznie $Lewa \leq Prawa$.
□

Uwaga: Składając zasady Bekica i Gaussa możemy rozwiązywać układy równań.