Rachunek Mi 2003–2004. Tematy zaliczeniowe

Należy wybrać i opracować jedną rzecz: zadanie, problem, lub jeden temat teoretyczny i złożyć lub przesłać rozwiązanie do 30 stycznia 2004 r.

Zadania

1. Mówimy, że zbiór częściowo uporządkowany (poset) D ma *własność punktu stałego*, jeśli każda funkcja monotoniczna $f : D \to D$ ma punkt stały.

   (a) Podać przykład **skończonego** posetu z własnością punktu stałego, który nie ma elementu najmniejszego ani elementu największego.

   (b) Udowodnić, że dla skończonego posetu D

   > D ma elementy najmniejszy i największy $\iff$ każda funkcja monotoniczna w D ma najmniejszy i największy punkt stały.

   Podać przykład świadczący o tym, że dla nieskończonych posetów równoważność powyższa na ogół nie zachodzi.

   (c) Oszacować z góry złożoność sprawdzania, czy skończony poset ma własność punktu stałego.

2. Podać przykład kraty zupełnej $\langle L, \leq \rangle$ i funkcji monotonicznej $f : L \to L$, że najmniejszy punkt stały nie jest osiągnięty przez przeliczalną liczbę iteracji, tzn.

$$\bigvee_{\xi<\alpha} f^{\xi}(\perp) < \mu x.f(x)$$

   dla każdej przeliczalnej liczby porządkowej α.

3. Rozważamy kratę zupełną $\langle \mathcal{P}(A^{\omega}), \subseteq \rangle$, gdzie A jest skończonym alfabetem, a na niej operację $\cup$ (sumy teoriomnogościowej dwóch języków) oraz, dla każdej litery $a \in A$, operację $a \cdot L = \{au : u \in L\}$ (dla $L \subseteq A^{\omega}$). Taka struktura jest interpretacją dla μ-rachunku nad sygnaturą $\{\cup\} \cup \{a\cdot : a \in A\}$. Udowodnić, że dla tej interpretacji każdy term jest równoważny termowi klasy Π_2^{μ} (tzn. z jedną istotną alternacją typu $\nu\mu$).

4. Podać efektywny algorytm, który dla danego termu μ-rachunku określa dokładnie do której klasy hierarchii ten term należy (tzn. $\Sigma_n^{\mu}(Sig)$, $\Pi_n^{\mu}(Sig)$, lub $Comp(\Sigma_n^{\mu}(Sig) \cup \Pi_n^{\mu}(Sig))$. Uzasadnić poprawność algorytmu i oszacować jego złożoność.

5. Udowodnić, że następujące dwie formuły modalnego μ-rachunku nie są równoważne:

   (a) $\mu X.\nu Y.(p \wedge \Box Y) \vee \Box X$,

   (b) $\mu X.(\nu Y.p \wedge \Box Y) \vee \Box X$.

6. Dla struktury Kripkego $M = \langle S, \{p^M \subseteq S : p \in \mathit{Prop}\}, \{a^M \subseteq S \times S : a \in \mathit{Act}\}\rangle$ określamy nową strukturę M^*. Jej uniwersum stanowi zbiór S^*; ciąg w należy do p^{M^*} o ile jego ostatni wyraz należy do p^M, oraz

$$a^{M^*} = \{(wp, wpq) : (p, q) \in a^M,\ w \in S^*\}$$

Strukturę M^* możemu widzieć jako „rozwinięcie w drzewo" struktury M. Udowodnić, że dla dowolnego zdania modalnego μ-rachunku φ i dowolnego $s \in S$,

$$s \in [\![\varphi]\!]_M \Longleftrightarrow s \in [\![\varphi]\!]_{M^*}$$

(W tym ostatnim przypadku s jest traktowane jako ciąg jednoelementowy.)

Problemy[1]

1. Oszacować z dołu złożoność pytania, czy dany skończony poset ma własność punktu stałego (por. Zadanie 1).

2. Dla języka $L \subseteq A^* - \{\varepsilon\}$ rozważamy funkcję $F_L : A^\omega \to A^\omega$, określoną $F_L(Y) = LY$. Jak wykazaliśmy na wykładzie, $L^\omega = \nu Y.F_L(Y)$. Wskazać najmniejszą liczbę porządkową α, że

$$\nu Y.F_L(Y) = \bigcap_{\xi<\alpha} F_L^\xi(A^\omega)$$

dla dowolnego języka **regularnego** L.

Tematy teoretyczne[2]

1. Przedstawić dowód twierdzenia z przedostatniego wykładu o semantyce growej rachunku μ.

2. Przedstawić dowód twierdzenia o hierarchii z ostatniego wykładu.

Damian Niwiński

[1] Rozwiązanie nie jest mi znane, D. N.
[2] Koniecznie w wersji elektronicznej, do ewentualnego opublikowania na stronie www.