Probabilistyczne twierdzenie Rabina

Damian Niwiński, Paweł Parys, M. S.

1 Drzewa

- struktura wolna dwóch następników $s_{\mathtt{L}}$ i $s_{\mathtt{R}}$ (plus porządki prefiks, leksykograficzny)
- zbiór słów $\{\mathtt{L}, dR\}^*$
- labelowania *alfabetem* A, czyli $t\colon \{\mathtt{L},\mathtt{R}\}^* \to A$
- branching time, unravelling dowolnego grafu, gry Gale–Stewarta

2 Logika MSO

- fragment logiki drugiego rzędu
- syntax
- kwantyfikacja po labelowaniach
- oraz ścieżkach, frontierach, strategiach, ...

Twierdzenie 2.1 (Rabin 1969)**.** *Teoria MSO drzewa jest rozstrzygalna.*

— mother of all decidability results

Wniosek 2.2. *Rozstrzygalna jest* spełnialność*: czy* ***istnieje*** *drzewo spełniające φ?*

Definicja 2.3. *Dla danej φ definiujemy* $\mathrm{L}(\varphi) = \{t \in \mathrm{Tr}_A \mid t \models \varphi\}$

3 Losowość

- Tr_A jako $A^{\{\mathtt{L},\mathtt{R}\}^*}$ — zbiór Cantora
- przestrzeń produktowa
- coin-flipping measure

Problem 3.1. *Czy* $\mathrm{L}(\varphi)$ *jest zbiorem* ***mierzalnym****?*

Twierdzenie 3.2 (Gogacz, Michalewski, Mio, S. [2014])**.** *Tak.*

Dowód. $\mathcal{R}$-zbiory Kołmogorowa [1928], metoda Łusina-Sierpińskiego [1918]. ∎

Problem 3.3. *Obliczyć* $\mu\big(\mathrm{L}(\varphi)\big) \in \mathbb{R}$.

4 Automaty

- skończony zbiór stanów Q
- skończony zbiór przejść $\Delta \subseteq Q \times Q \times Q \times Q$
- stan początkowy $q_{\mathrm{I}} \in Q$
- warunek *akceptacji* $W \subseteq Q^{\omega}$

5 Biegi

- *bieg* na drzewie t: $\rho \in \mathrm{Tr}_Q$, zgodne z Δ
- *bieg akceptujący*: na każdej gałęzi zachodzi W
- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \{t \in \mathrm{Tr}_A \mid \exists \rho \in \mathrm{Tr}_Q.\ \rho$ akceptujący bieg na t i $\rho(\epsilon) = q_{\mathrm{I}}\}$

Twierdzenie 5.1 (Rabin 1969)**.** *Dla każdej formuły φ efektywnie istnieje automat $\mathcal{A}$ taki, że $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = \mathrm{L}(\varphi)$.*

— kolaps kwantyfikatorów do $\exists\forall$

6 Typy

Definicja 6.1. $\mathrm{Tp}_{\mathcal{A}}(t) = \{q \in Q \mid \mathcal{A}$ *ma bieg akceptujący z q na t*$\} \in \mathsf{P}(Q)$

— $\mathrm{Tp}_{\mathcal{A}} \colon \mathrm{Tr}_A \to \mathsf{P}(Q)$
— Porządek na $\big(\mathrm{Tr}_A \to \mathsf{P}(Q)\big)$

Fakt 6.2. *$Tp_{\mathcal{A}}$ to zmienna losowa! Posiada rozkład* $\overline{\mathrm{Tp}_{\mathcal{A}}} \in \mathcal{D}\big(\mathsf{P}(Q)\big) \subseteq \mathbb{R}^{\mathsf{P}(Q)}$

Cel: obliczyć $\overline{\mathrm{Tp}_{\mathcal{A}}}$ przez inkluzję

7 Probabilistic powerdomain

Saheb-Djahromi [1980], Jones, Plotkin [1989]
$\mathcal{D}\big(\mathsf{P}(Q)\big) = \big\{\alpha \colon \mathsf{P}(Q) \to [0,1] \mid \sum_{\mathsf{P}(Q)} \alpha = 1\big\}$
— Kiedy $\alpha \preceq \beta$?
— Gdy $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathsf{P}_Q.\ \sum_{\mathcal{U}} \alpha \leqslant \sum_{\mathcal{U}} \beta$
— Porządek łańcuchowo zupełny
— Ale nie krata: przykład $(0.5, 0.0, 0.0, 0.5) \vee (0.0, 0.5, 0.5, 0.0)$ dla $Q = \{p, q\}$
— Problem z funkcjami binarnymi:

$$\begin{aligned} (\tau_1, \tau_2) &\mapsto f(\tau_1, \tau_2) \\ (\overline{\tau_1}, \overline{\tau_2}) \neq \overline{(\tau_1, \tau_2)} &\mapsto \overline{f(\tau_1, \tau_2)} \end{aligned}$$

8 Schemat konstrukcji

1. wyrazić $\mathrm{Tp}_{\mathcal{A}} \colon \mathrm{Tr}_A \to \mathsf{P}(Q)$