Największa znana liczba?

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Zasada indukcji:

- 0 jest liczbą naturalną,
- jeśli n jest liczbą naturalną to $n+1$ też jest liczbą naturalną.

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Zasada indukcji:

- 0 jest liczbą naturalną,
- jeśli n jest liczbą naturalną to $n+1$ też jest liczbą naturalną.

Fizyk: Czyli liczba Grahama G_{64} też „istnieje”?

(podająca szacowanie w pewnym wariancie twierdzenia Ramseya)

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Zasada indukcji:

- 0 jest liczbą naturalną,
- jeśli n jest liczbą naturalną to $n+1$ też jest liczbą naturalną.

Fizyk: Czyli liczba Grahama G_{64} też „istnieje”?

(podająca szacowanie w pewnym wariancie twierdzenia Ramseya)

Matematyk: Oczywiście!

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Zasada indukcji:

- 0 jest liczbą naturalną,
- jeśli n jest liczbą naturalną to $n+1$ też jest liczbą naturalną.

Fizyk: Czyli liczba Grahama G_{64} też „istnieje”?

(podająca szacowanie w pewnym wariancie twierdzenia Ramseya)

Matematyk: Oczywiście!

Fizyk: Tylko że cząstek w obserwowalnym wszechświecie jest $\sim 10^{80}\ldots$

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Zasada indukcji:

- 0 jest liczbą naturalną,
- jeśli n jest liczbą naturalną to $n+1$ też jest liczbą naturalną.

Fizyk: Czyli liczba Grahama G_{64} też „istnieje”?

(podająca szacowanie w pewnym wariancie twierdzenia Ramseya)

Matematyk: Oczywiście!

Fizyk: Tylko że cząstek w obserwowalnym wszechświecie jest $\sim 10^{80}\ldots$

$$G_{64} \quad \gg \quad \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}{\scriptstyle 10^{80}\text{ razy}} \quad \gg \quad 10^{(10^{80})}$$

Jaka jest największa istniejąca liczba naturalna?

Matematyk: To nie ma sensu!!!

Zasada indukcji:

- 0 jest liczbą naturalną,
- jeśli n jest liczbą naturalną to $n+1$ też jest liczbą naturalną.

Fizyk: Czyli liczba Grahama G_{64} też „istnieje"?

$\big($podająca szacowanie w pewnym wariancie twierdzenia Ramseya$\big)$

Matematyk: Oczywiście!

Fizyk: Tylko że cząstek w obserwowalnym wszechświecie jest $\sim 10^{80}$...

$$G_{64} \quad \gg \quad \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} {\scriptstyle 10^{80} \text{ razy}} \quad \gg \quad 10^{(10^{80})}$$

Ile osób mieści się w tramwaju?

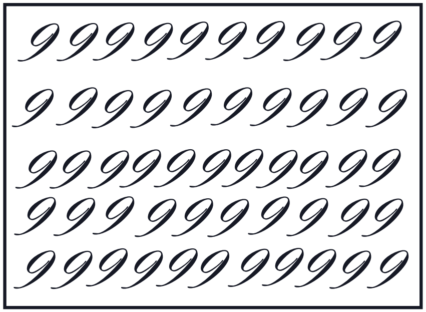
“Who Can Name the Bigger Number?”

“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html

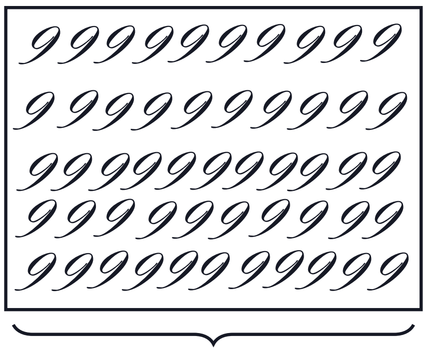
“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html



“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

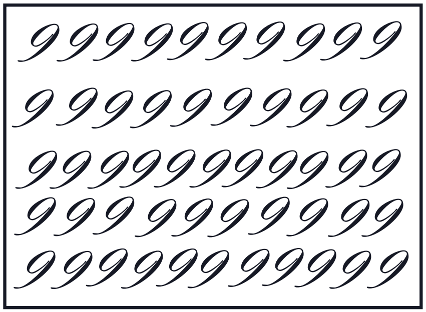
https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html



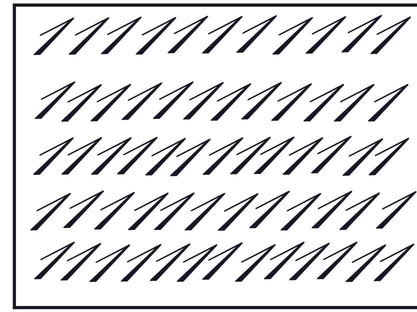
$10^{52} - 1$

“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html

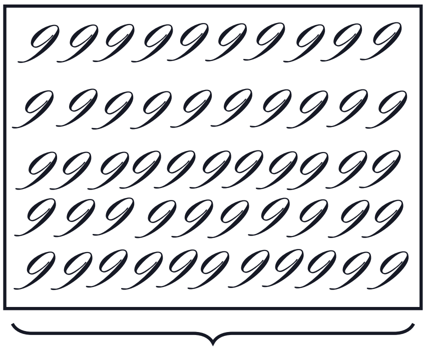


$10^{52}-1$

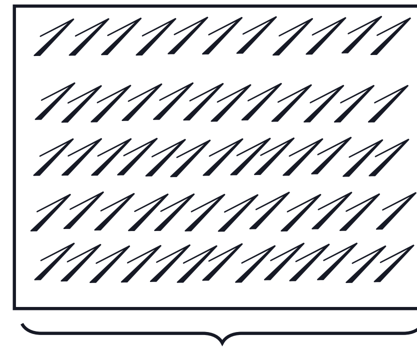


“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html



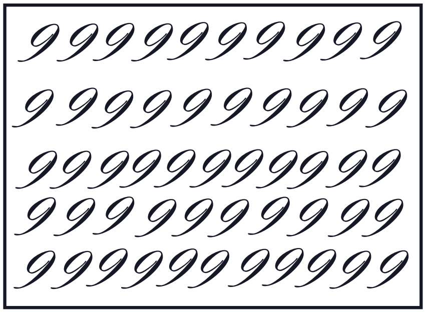
$10^{52} - 1$



$\frac{1}{9} \cdot \left(10^{61} - 1\right)$

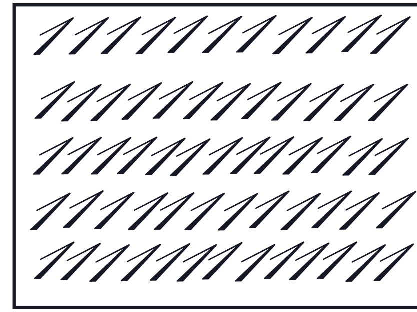
“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html



$10^{52} - 1$

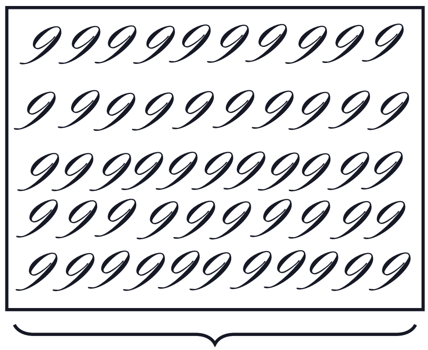
$\ll$



$\frac{1}{9} \cdot \left(10^{61} - 1\right)$

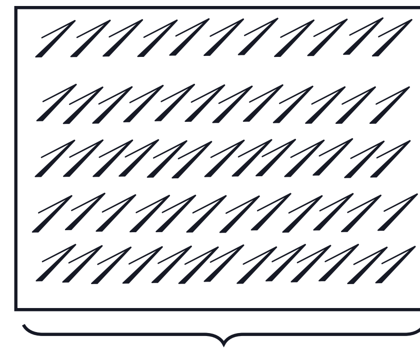
“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html



$10^{52} - 1$

$\ll$



$\frac{1}{9} \cdot \left(10^{61} - 1\right)$

“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html

9999999999
9999999999
99999999999
9999999999
99999999999

$$10^{52} - 1$$

$\ll$

11111111111
111111111111
1111111111111
111111111111
1111111111111

$$\frac{1}{9} \cdot \left(10^{61} - 1\right)$$

$\Uparrow$

99999^99999

“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html

$$\underbrace{\begin{array}{c} 9999999999 \\ 9999999999 \\ 99999999999 \\ 9999999999 \\ 99999999999 \end{array}}_{10^{52}-1} \ll \underbrace{\begin{array}{c} 11111111111 \\ 111111111111 \\ 1111111111111 \\ 111111111111 \\ 1111111111111 \end{array}}_{\frac{1}{9}\cdot\left(10^{61}-1\right)}$$

$$\Uparrow$$

99999^99999

9^(9^(9^9))

“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html

9999999999
9999999999
99999999999
9999999999
99999999999

$\underbrace{}_{10^{52}-1}$

$\ll$

11111111111
111111111111
1111111111111
111111111111
1111111111111

$\underbrace{}_{\frac{1}{9}\cdot\left(10^{61}-1\right)}$

$\Uparrow$ $\Uparrow$

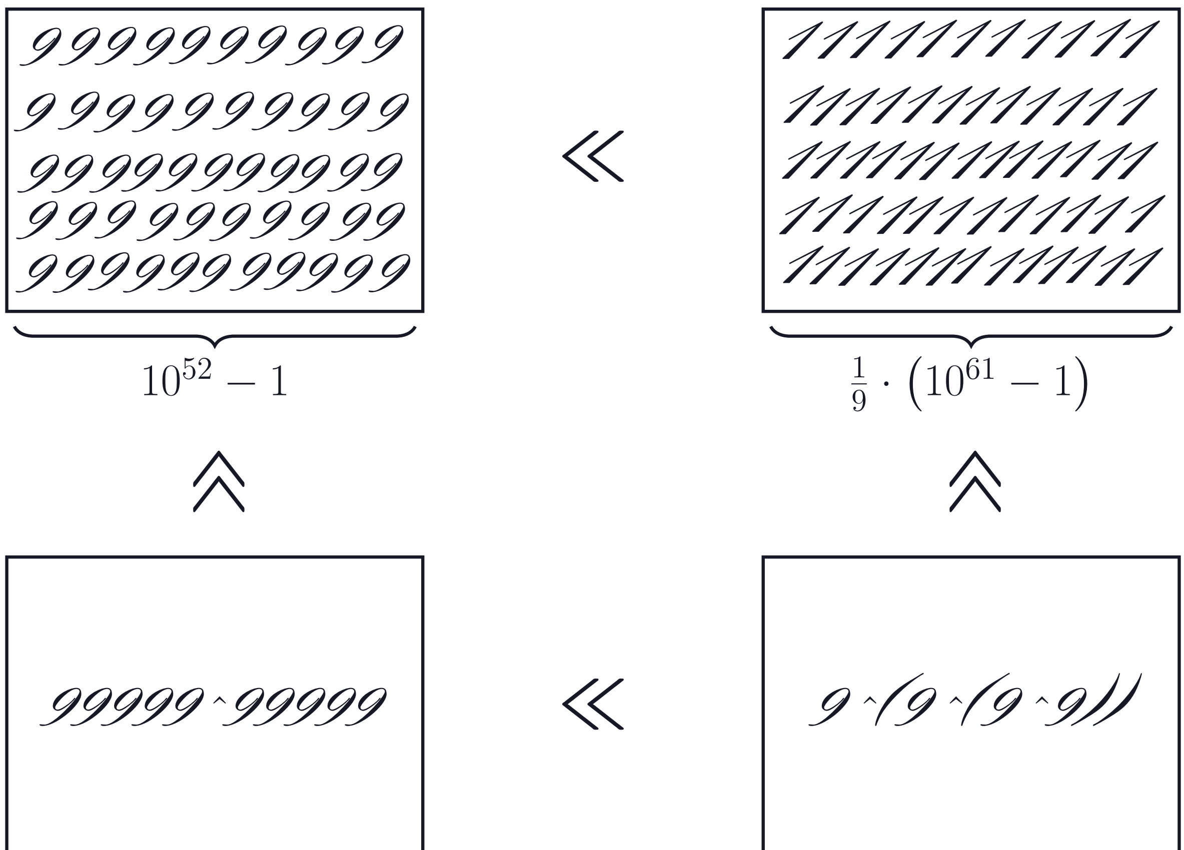
99999^99999

$\ll$

9^(9^(9^9))

“Who Can Name the Bigger Number?” (Scott Aaronson)

https://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html



⇝ nie chodzi o same **liczby** tylko **sposoby ich konstrukcji**

Notacje

$\Big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\Big)$

Notacje

$\left(\text{czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków}\right)$

Notacja strzałkowa Knutha

Notacje

$\big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \quad := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \quad = a^b$$

Notacje

$\left(\text{czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków}\right)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \quad := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \quad = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b := \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} {\scriptstyle b}$$

Notacje

$\Big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\Big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \quad := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \quad = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b := \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} b$$

$$\vdots$$

Notacje

$\Big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\Big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}{\scriptstyle b} \qquad a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

$$\vdots$$

Notacje

$\Big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\Big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \ := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \ = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b := \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} b \qquad a \uparrow^n b := \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

$$\vdots$$

Notacja Steinhausa–Mosera

Notacje

(czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków)

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} b \qquad a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

$$\vdots$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$$\triangle(n) \;:=\; n^n$$

Notacje

$\Big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\Big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} b \qquad a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

$$\vdots$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$$\triangle(n) \;:=\; n^n$$

$$\boxed{n} \;:=\; n \text{ w } n \text{ trójkątach}$$

Notacje

$\big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \ := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \ = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b := \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} {\scriptstyle b} \qquad a \uparrow^n b := \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

$$\vdots$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$:= \quad n^n$

$\boxed{n} \quad := \quad n$ w n trójkątach

$:= \quad n$ w n kwadratach

Notacje

(czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków)

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}{\scriptstyle b} \qquad a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

$$\vdots$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$$\triangle(n) \quad := \quad n^n$$

$$\boxed{n} \quad := \quad n \text{ w } n \text{ trójkątach}$$

$$\pentagon(n) \quad := \quad n \text{ w } n \text{ kwadratach}$$

$$\vdots$$

Notacje

(czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków)

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} \;=\; \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\}{\scriptstyle b}$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow^{n} b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$$\triangle n \;:=\; n^n$$

$$\boxed{n} \;:=\; n \text{ w } n \text{ trójkątach}$$

$$\pentagon n \;:=\; n \text{ w } n \text{ kwadratach}$$

$$\vdots$$

Liczby Grahama

Notacje

(czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków)

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} \;=\; \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\}{\scriptstyle b}$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$$\triangle n \;:=\; n^n$$

$$\boxed{n} \;:=\; n \text{ w } n \text{ trójkątach}$$

$$\pentagon n \;:=\; n \text{ w } n \text{ kwadratach}$$

$$\vdots$$

Liczby Grahama

$$G_1 \;:=\; 3 \uparrow^4 3$$

Notacje

$\Big($czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków$\Big)$

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} \;=\; \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \right\} b$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

Notacja Steinhausa–Moersa

$n \;:=\; n^n$

$\boxed{n} \;:=\; n$ w n trójkątach

$n \;:=\; n$ w n kwadratach

$\vdots$

Liczby Grahama

$$G_1 := 3 \uparrow^4 3$$

$$G_{n+1} := 3 \uparrow^{G_n} 3$$

Notacje

(czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków)

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} \;=\; \left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}{\scriptstyle b}$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} \;=\; \textbf{dużo}$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$n \quad := \quad n^n$

$\boxed{n} \quad := \quad n$ w n trójkątach

$n \quad := \quad n$ w n kwadratach

$$\vdots$$

Liczby Grahama

$$G_1 \;:=\; 3 \uparrow^4 3$$

$$G_{n+1} \;:=\; 3 \uparrow^{G_n} 3$$

$$\vdots$$

Notacje

(czyli jak zapisać dużo operacji małą liczbą znaków)

Notacja strzałkowa Knutha

$$a \uparrow b \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \;=\; a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b \;:=\; \underbrace{a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b} = \left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}{\scriptstyle b}$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow^n b \;:=\; \underbrace{a \uparrow^{n-1} \ldots \uparrow^{n-1} a}_{b} = \textbf{dużo}$$

Notacja Steinhausa–Mosera

$:= \quad n^n$

$:= \quad n$ w n trójkątach

$:= \quad n$ w n kwadratach

$$\vdots$$

Liczby Grahama

$$G_1 \;:=\; 3 \uparrow^4 3$$

$$G_{n+1} \;:=\; 3 \uparrow^{G_n} 3$$

$$\vdots$$

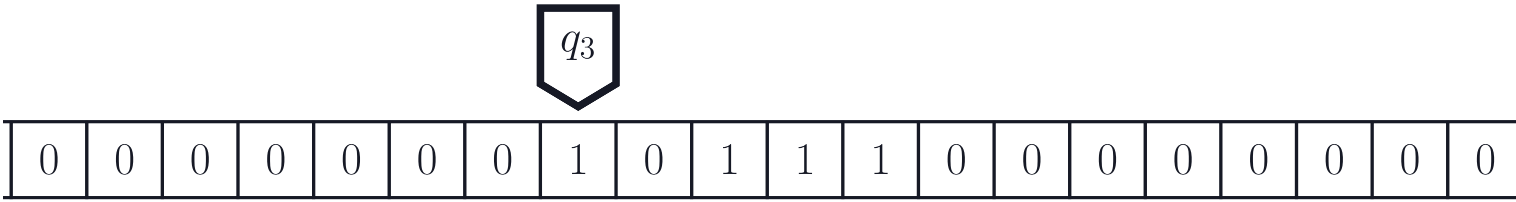
$$G_{64} \;=\; \textbf{bardzo dużo}$$

Maszyny Turinga

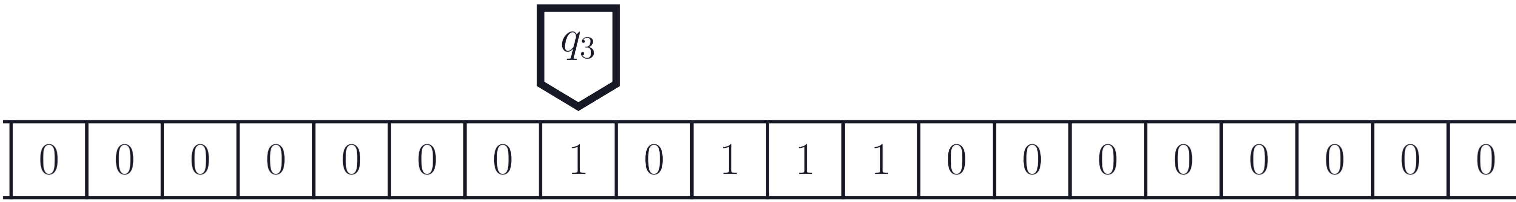
Maszyny Turinga

0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Maszyny Turinga



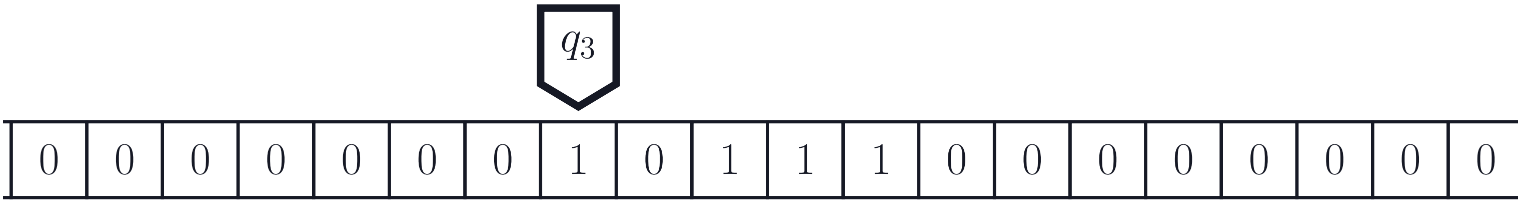
Maszyny Turinga



$\mathcal{M}$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

Maszyny Turinga

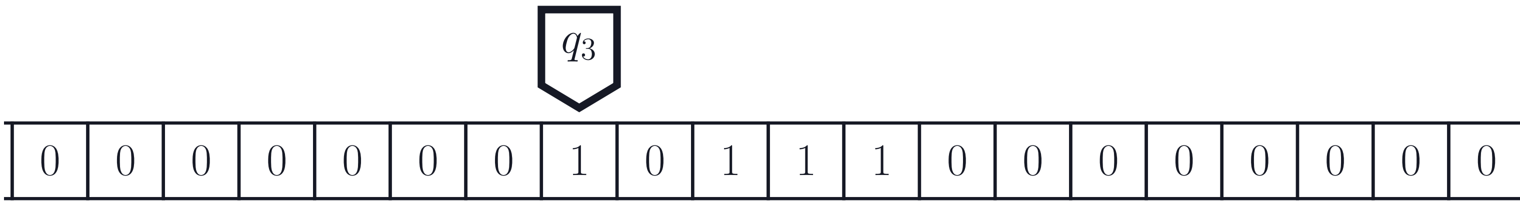


$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Maszyny Turinga

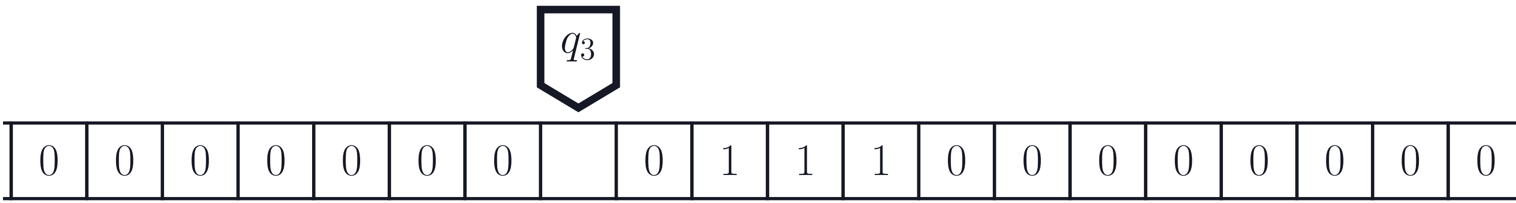


$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Maszyny Turinga

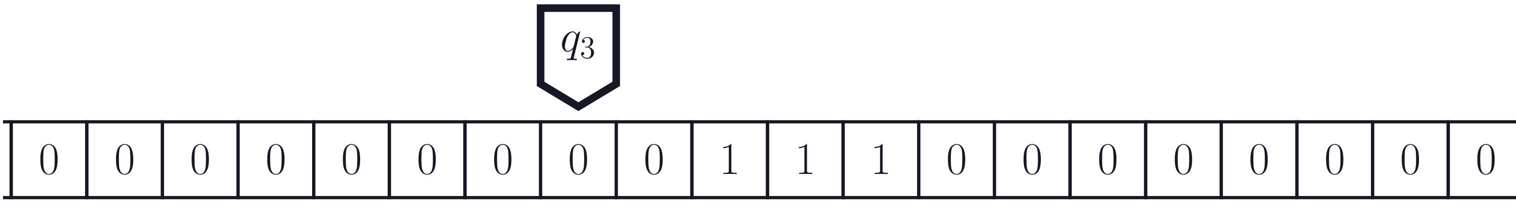


$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Maszyny Turinga

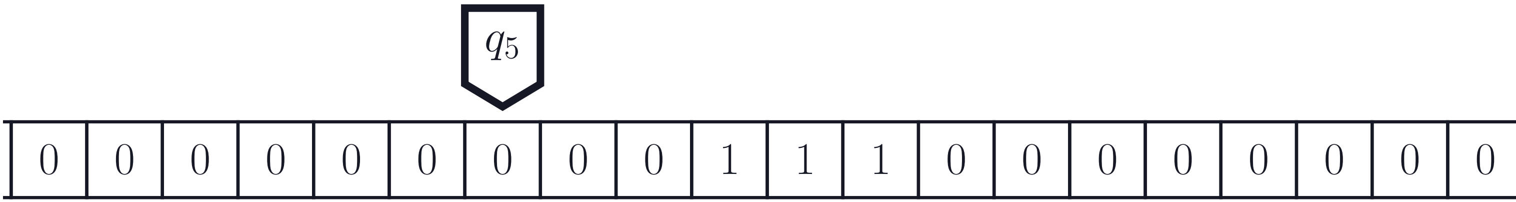


$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Maszyny Turinga

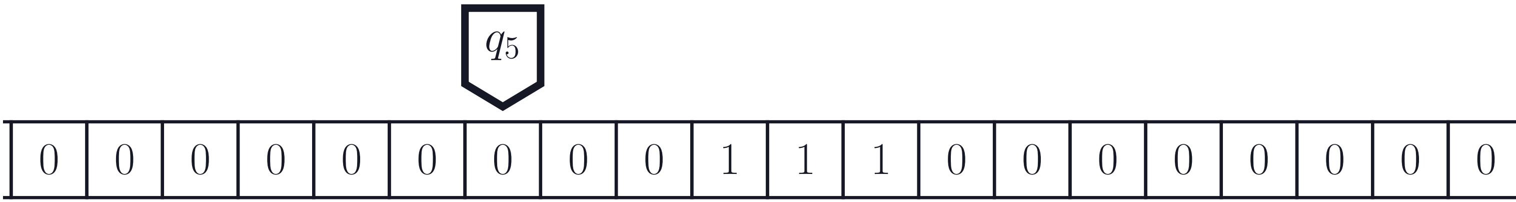


$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Maszyny Turinga



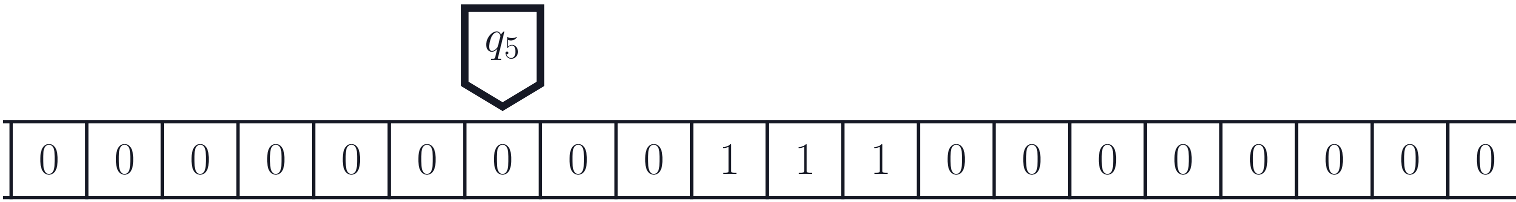
$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Na początku: $\quad q = q_0 \qquad [\cdots 0000 \cdots]$

Maszyny Turinga



$$\mathcal{M}$$

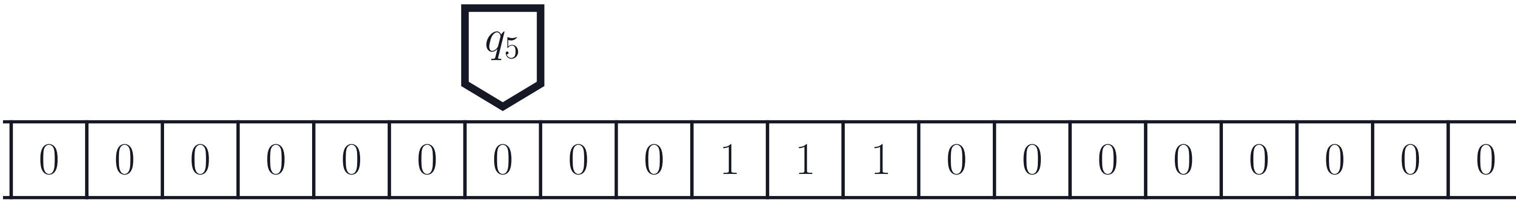
$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Na początku: $q = q_0$ $\left[\cdots 0000 \cdots\right]$

Na końcu: $q = q_{n-1}$

Maszyny Turinga



$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

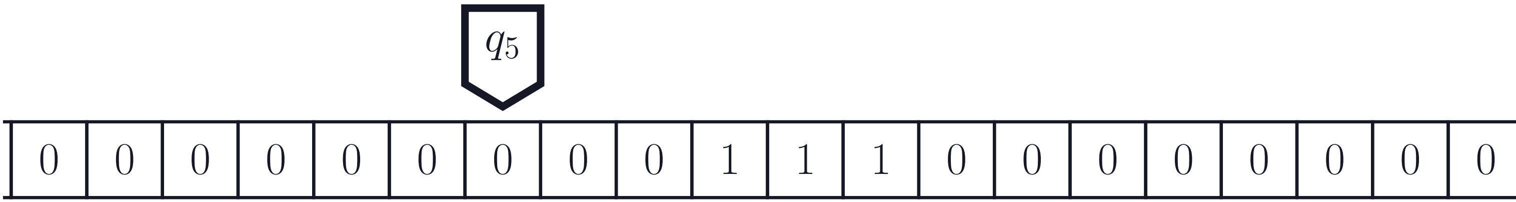
$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Na początku: $q = q_0$ $\quad [\cdots 0000 \cdots]$

Na końcu: $q = q_{n-1}$

Rozmiar$\big(\mathcal{M}\big) := n$

Maszyny Turinga



$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

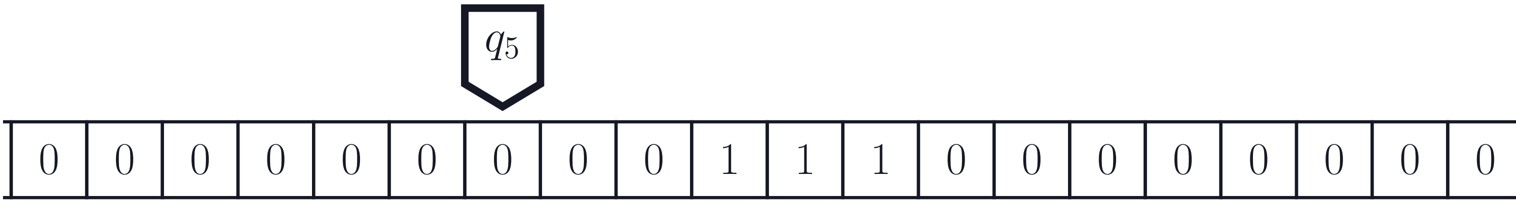
Na początku: $q = q_0$ $\quad [\cdots 0000 \cdots]$

Na końcu: $q = q_{n-1}$

$\mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) := n$

$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \in \{0, 1, \ldots \infty\}$

Maszyny Turinga



$$\mathcal{M}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ q_3, 0 \mapsto 0, \blacktriangleright, q_4 \\ q_3, 1 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_5 \\ q_4, 0 \mapsto 0, \blacktriangleleft, q_4 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Na początku: $q = q_0$ $\qquad [\cdots 0000 \cdots]$

Na końcu: $q = q_{n-1}$

$\mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) := n$

$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \in \{0, 1, \ldots \infty\}$

Fakt

Dla każdego n jest tylko **skończenie wiele** maszyn rozmiaru n.

Busy Beaver (pracowity bóbr)

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$$\mathbf{BB}(3) = \,?$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}_0 \\ \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_N \end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}_0 \\ \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_N \end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) \;\; = \infty \\ \mathcal{M}_1 & \\ \mathcal{M}_2 & \\ \vdots & \\ \mathcal{M}_N & \end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = \ ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) & = \infty \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \mathcal{M}_2 & & \\ \vdots & & \\ \mathcal{M}_N & & \end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = \,?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) & = \infty \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \mathcal{M}_2 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2) & = \infty \\ \vdots & & \\ \mathcal{M}_N & & \end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) & = \infty \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\mathcal{M}_2 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2) & = \infty \\
\vdots & \vdots & \\
\mathcal{M}_N & &
\end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) & = \infty \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\mathcal{M}_2 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2) & = \infty \\
\vdots & \quad\vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) & = \infty \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\mathcal{M}_2 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2) & = \infty \\
\vdots & \quad\vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

$$\begin{array}{lll}
\cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\
\vdots & \vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = ?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\begin{array}{lll}
\cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\
\vdots & \quad\vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = \,?$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll}
\xcancel{\mathcal{M}_0 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0) & = \infty} \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\xcancel{\mathcal{M}_2 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2) & = \infty} \\
\vdots & \vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}\right\} \max = 21$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll} \cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\ \vdots & \quad\vdots & \\ \mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21 \end{array}\right\} \max = 21$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(1) = 0$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll}
\cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\
\vdots & \vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}\right\} \max = 21$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(1) = 0$

$\mathbf{BB}(2) = 6$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll} \cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\ \vdots & \vdots & \\ \mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21 \end{array}\right\} \max = 21$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(1) = 0$

$\mathbf{BB}(2) = 6$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll} \cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\ \vdots & \quad\vdots & \\ \mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21 \end{array}\right\} \max = 21$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(1) = 0$

$\mathbf{BB}(2) = 6$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(4) = 107$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll}
\cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\
\mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\
\cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\
\vdots & \vdots & \\
\mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21
\end{array}\right\} \max = 21$$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:
2. Czasy działania:
3. Kończą:
4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll} \cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\ \vdots & \quad\vdots & \\ \mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21 \end{array}\right\} \max = 21$$

$\mathbf{BB}(1) = 0$

$\mathbf{BB}(2) = 6$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(4) = 107$

$\mathbf{BB}(5) = ?$

Busy Beaver (pracowity bóbr)

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}(\mathcal{M}) \leqslant n,\ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

1. Maszyny rozmiaru $\leqslant 3$:

2. Czasy działania:

3. Kończą:

4. Maksimum:

$$\left.\begin{array}{lll} \cancel{\mathcal{M}_0} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_0)} & \cancel{= \infty} \\ \mathcal{M}_1 & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_1) & = 16 \\ \cancel{\mathcal{M}_2} & \cancel{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}_2)} & \cancel{= \infty} \\ \vdots & \quad\vdots & \\ \mathcal{M}_N & \mathrm{Czas}(\mathcal{M}_N) & = 21 \end{array}\right\} \max = 21$$

$\mathbf{BB}(1) = 0$

$\mathbf{BB}(2) = 6$

$\mathbf{BB}(3) = 21$

$\mathbf{BB}(4) = 107$

$\mathbf{BB}(5) = ?$

$(\geqslant 47'176'870)$

BB(n) rośnie szybko

BB(n) rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy
$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n

$\mathbf{BB}(n)$ **rośnie szybko**

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

dla każdego n mamy $\mathcal{M}[n] = f(n)$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n
- uruchamia $\mathcal{M}$ by obliczyć $k := f(n)$

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n
- uruchamia $\mathcal{M}$ by obliczyć $k := f(n)$
- czeka przynajmniej k kroków (modyfikując taśmę)

$\mathbf{BB}(n)$ **rośnie szybko**

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n
- uruchamia $\mathcal{M}$ by obliczyć $k := f(n)$
- czeka przynajmniej k kroków (modyfikując taśmę)
- kończy pracę

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n
- uruchamia $\mathcal{M}$ by obliczyć $k := f(n)$
- czeka przynajmniej k kroków (modyfikując taśmę)
- kończy pracę

3. $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}'_n\big) \leqslant 2\log n + C + \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big)$

$\mathbf{BB}(n)$ rośnie szybko

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:

$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n
- uruchamia $\mathcal{M}$ by obliczyć $k := f(n)$
- czeka przynajmniej k kroków (modyfikując taśmę)
- kończy pracę

3. $\text{Rozmiar}\big(\mathcal{M}'_n\big) \leqslant 2\log n + C + \text{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n \qquad \big(\text{d.d.d. } n\big)$

$\mathbf{BB}(n)$ **rośnie szybko**

Twierdzenie

Jeśli $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest obliczalna to dla dostatecznie dużych n mamy
$$\mathbf{BB}(n) \gg f(n).$$

Dowód

1. Niech $\mathcal{M}$ będzie **maszyną Turinga** obliczającą f:
$$\text{dla każdego } n \text{ mamy } \mathcal{M}[n] = f(n)$$

2. Niech $\mathcal{M}'_n$ będzie **maszyną Turinga** która:

- wypisuje na pustej taśmie liczbę n
- uruchamia $\mathcal{M}$ by obliczyć $k := f(n)$
- czeka przynajmniej k kroków (modyfikując taśmę)
- kończy pracę

3. $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}'_n\big) \leqslant 2\log n + C + \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n \quad \big(\text{d.d.d. } n\big)$

4. $\mathbf{BB}(n) \geqslant \mathrm{Czas}(\mathcal{M}'_n) > f(n) \quad \big(\text{d.d.d. } n\big)$

BB(n) rozwiązuje *problem stopu*

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje *problem stopu*

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje ***problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

$\mathbf{BB}(n)$ **rozwiązuje *problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje ***problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje *problem stopu*

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

Załóżmy, że umiemy policzyć $T := \mathbf{BB}(n_0)$.

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje ***problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

Załóżmy, że umiemy policzyć $T := \mathbf{BB}(n_0)$.

Weźmy $\mathcal{M}$ taką że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$.

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje ***problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

Załóżmy, że umiemy policzyć $T := \mathbf{BB}(n_0)$.

Weźmy $\mathcal{M}$ taką że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$.

Uruchamiamy $\mathcal{M}$ na dokładnie $T{+}1$ kroków:

$\mathbf{BB}(n)$ **rozwiązuje *problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

Załóżmy, że umiemy policzyć $T := \mathbf{BB}(n_0)$.

Weźmy $\mathcal{M}$ taką że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$.

Uruchamiamy $\mathcal{M}$ na dokładnie $T+1$ kroków:

a. $\mathcal{M}$ skończyła pracę $\implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje *problem stopu*

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

Załóżmy, że umiemy policzyć $T := \mathbf{BB}(n_0)$.

Weźmy $\mathcal{M}$ taką że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$.

Uruchamiamy $\mathcal{M}$ na dokładnie $T+1$ kroków:

a. $\mathcal{M}$ skończyła pracę $\implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$

b. $\mathcal{M}$ nie skończyła pracy $\implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) > \mathbf{BB}(n) \implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) = \infty$

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje *problem stopu*

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Dowód

Załóżmy, że umiemy policzyć $T := \mathbf{BB}(n_0)$.

Weźmy $\mathcal{M}$ taką że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$.

Uruchamiamy $\mathcal{M}$ na dokładnie $T+1$ kroków:

a. $\mathcal{M}$ skończyła pracę $\implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$

b. $\mathcal{M}$ nie skończyła pracy $\implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) > \mathbf{BB}(n) \implies \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) = \infty$

■

$\mathbf{BB}(n)$ **rozwiązuje *problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

BB(n) rozwiązuje ***problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość **BB**(n_0).

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Twierdzenie (Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 748 stanach, taka że:

$$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff \text{teoria } \mathbf{ZFC} \text{ jest sprzeczna}$$

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje ***problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Twierdzenie (Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 748 stanach, taka że:

$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff$ teoria **ZFC** jest sprzeczna

Twierdzenie (Aaronson [2016]; Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 744 stanach, taka że:

$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff$ hipoteza Riemanna jest fałszywa

BB(n) **rozwiązuje *problem stopu***

$$\mathbf{BB}(n) := \max\left\{\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \,\middle|\, \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty\right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Twierdzenie (Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 748 stanach, taka że:

$$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff \text{teoria } \mathbf{ZFC} \text{ jest sprzeczna}$$

Twierdzenie (Aaronson [2016]; Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 744 stanach, taka że:

$$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff \text{hipoteza Riemanna jest fałszywa}$$

$\vdots$

$\mathbf{BB}(n)$ rozwiązuje *problem stopu*

$$\mathbf{BB}(n) := \max \left\{ \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) \;\middle|\; \mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n, \mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \right\} \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Radó [1962])

Załóżmy, że dla pewnego n_0 znamy wartość $\mathbf{BB}(n_0)$.

Wtedy dla każdej maszyny $\mathcal{M}$ takiej że $\mathrm{Rozmiar}\big(\mathcal{M}\big) \leqslant n_0$

umiemy stwierdzić czy $\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty$.

Twierdzenie (Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 748 stanach, taka że:

$$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff \text{teoria } \mathbf{ZFC} \text{ jest sprzeczna}$$

Twierdzenie (Aaronson [2016]; Pavlus [2020])

Istnieje $\mathcal{M}$ o 744 stanach, taka że:

$$\mathrm{Czas}(\mathcal{M}) < \infty \iff \text{hipoteza Riemanna jest fałszywa}$$

$\vdots$

\+ kamienne tablice

Paradoks kłamcy

Paradoks kłamcy

$n \quad :=$ „największa liczba naturalna,

Paradoks kłamcy

n := „największa liczba naturalna,

którą można zdefiniować w języku polskim,

Paradoks kłamcy

$$n \quad := \quad \text{„największa liczba naturalna,}$$
$$\text{którą można zdefiniować w języku polskim,}$$
$$\text{z użyciem} \leqslant 100 \text{ symboli”}$$

Paradoks kłamcy

n := „największa liczba naturalna,
który można zdefiniować w języku polskim,
z użyciem $\leqslant 100$ symboli”

n' := „największa liczba naturalna,
którą można zdefiniować w języku polskim,
z użyciem $\leqslant 100$ symboli; dodać 1”

Paradoks kłamcy

n := „największa liczba naturalna,
którą można zdefiniować w języku polskim,
z użyciem $\leqslant 100$ symboli"

n' := „największa liczba naturalna,
którą można zdefiniować w języku polskim,
z użyciem $\leqslant 100$ symboli; dodać 1"

$$n \geqslant n' = n+1$$

Paradoks kłamcy

n := „największa liczba naturalna,
którą można zdefiniować w języku polskim,
z użyciem $\leqslant$ 100 symboli"

n' := „największa liczba naturalna,
którą można zdefiniować w języku polskim,
z użyciem $\leqslant$ 100 symboli; dodać 1"

$$n \geqslant n' = n+1$$

p := „to zdanie jest fałszywe"

Paradoks kłamcy

$$\begin{aligned} n \quad &:= \text{„największa liczba naturalna,} \\ &\qquad\qquad \text{którą można zdefiniować w języku polskim,} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{z użyciem} \leqslant 100 \text{ symboli”} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n' \quad &:= \text{„największa liczba naturalna,} \\ &\qquad\qquad \text{którą można zdefiniować w języku polskim,} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{z użyciem} \leqslant 100 \text{ symboli; dodać 1”} \end{aligned}$$

$$n \geqslant n' = n+1$$

$$p \quad := \text{„to zdanie jest fałszywe”}$$

$$p = \neg p$$

Paradoks kłamcy

$$
\begin{aligned}
n \quad &:= \text{„największa liczba naturalna,}\\
&\qquad\qquad \text{którą można zdefiniować w języku polskim,}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{z użyciem} \leqslant 100 \text{ symboli”}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n' \quad &:= \text{„największa liczba naturalna,}\\
&\qquad\qquad \text{którą można zdefiniować w języku polskim,}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{z użyciem} \leqslant 100 \text{ symboli; dodać 1”}
\end{aligned}
$$

$$n \geqslant n' = n+1$$

$p \quad :=$ „to zdanie jest fałszywe”

$$p = \neg p$$

Twierdzenie (Tarski [1933]) (*o niedefiniowalności prawdy*)

Niech **L** to logika (spełniająca pewne założenia).

Własność „formuła logiki **L** o numerze i jest prawdziwa”

jest **niedefiniowalna** w **L**.

Podsumowanie

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

np. $a \uparrow^n b$, n, G_{64}, ...

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

np. $a \uparrow^n b$, n, G_{64}, …

Można też brać maksimum pewnych **klas obliczeń**, np: $\mathbf{BB}(n)$

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

np. $a \uparrow^n b$, 

, G_{64}, ...

Można też brać maksimum pewnych **klas obliczeń**, np: $\mathbf{BB}(n)$

...ale wtedy dana liczba przestaje być **obliczalna**

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

np. $a \uparrow^n b$, n, G_{64}, ...

Można też brać maksimum pewnych **klas obliczeń**, np: $\mathbf{BB}(n)$

...ale wtedy dana liczba przestaje być **obliczalna**

Poznanie wartości takiej liczby pozwala (w teorii) rozwiązać

trudne problemy matematyki

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

np. $a \uparrow^n b$, n, G_{64}, ...

Można też brać maksimum pewnych **klas obliczeń**, np: $\mathbf{BB}(n)$

...ale wtedy dana liczba przestaje być **obliczalna**

Poznanie wartości takiej liczby pozwala (w teorii) rozwiązać

trudne problemy matematyki

...potrzeba tylko sporo cierpliwości...

Podsumowanie

Istnieją NAPRAWDĘ DUŻE liczby naturalne!

Można je definiować jako wynik konkretnych **obliczeń**

np. $a \uparrow^n b$, n, G_{64}, ...

Można też brać maksimum pewnych **klas obliczeń**, np: $\mathbf{BB}(n)$

...ale wtedy dana liczba przestaje być **obliczalna**

Poznanie wartości takiej liczby pozwala (w teorii) rozwiązać

trudne problemy matematyki

...potrzeba tylko sporo cierpliwości...

No i warto uważać, by uniknąć **paradoksu kłamcy**!