Jaką zwartość ma wartość?

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Powered by BeamerikZ

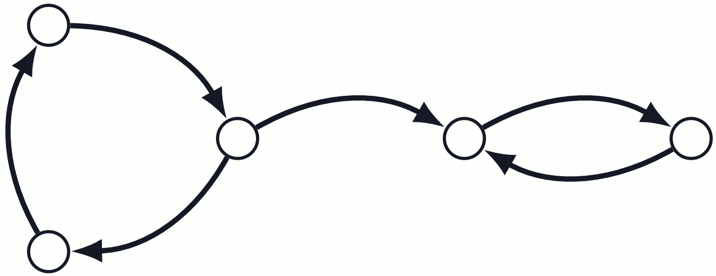
Niekończące się spacery. . .

Niekończące się spacery. . .

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.

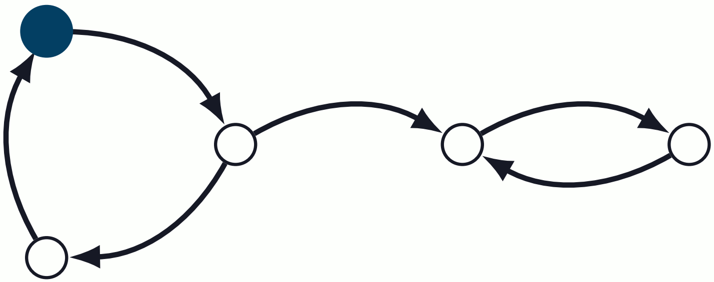
Niekończące się spacery. . .

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



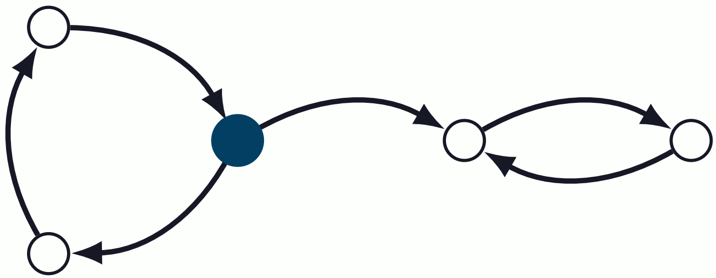
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



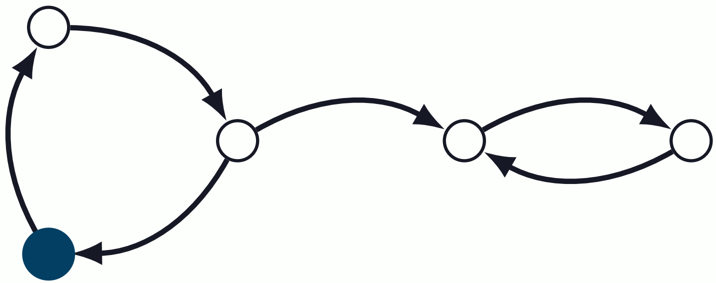
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



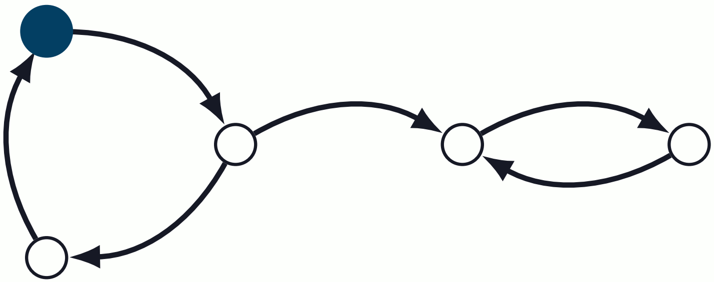
Niekończące się spacery. . .

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



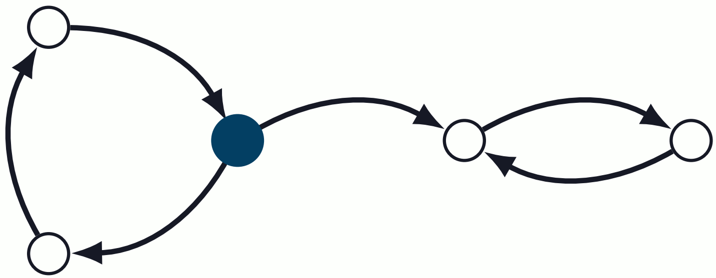
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



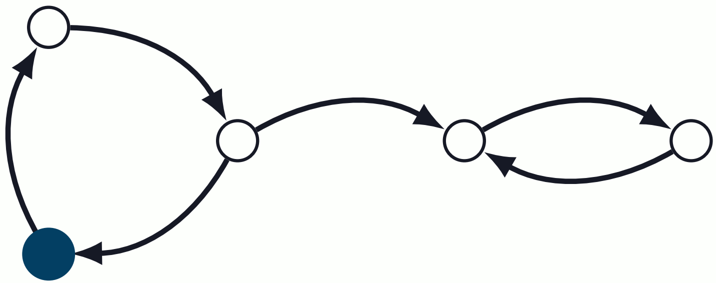
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



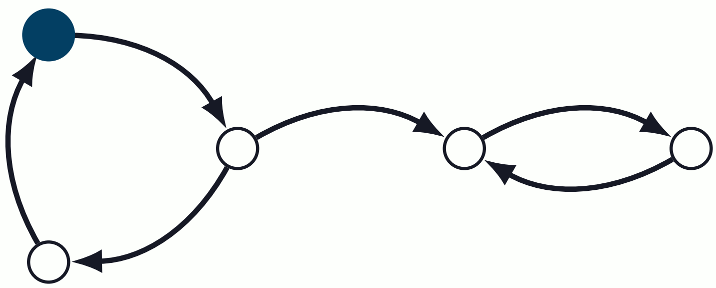
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



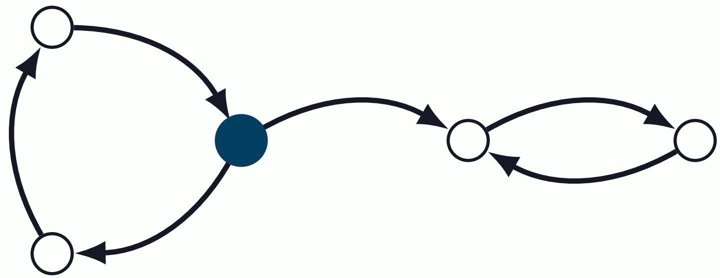
Niekończące się spacery. . .

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



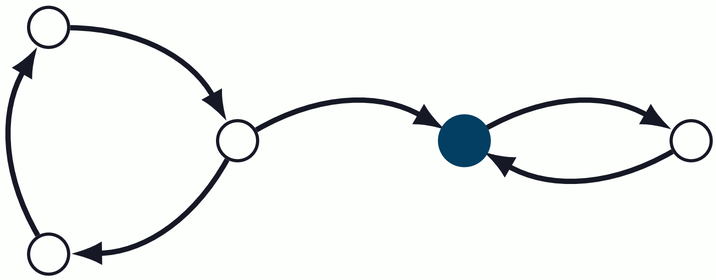
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



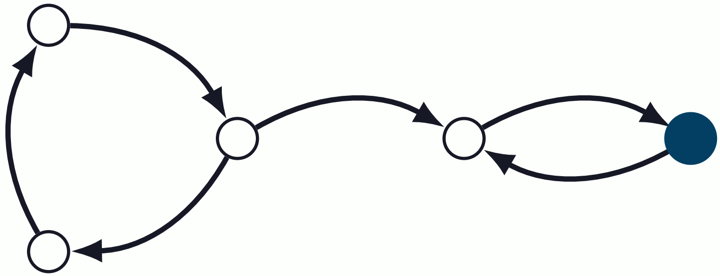
Niekończące się spacery. . .

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



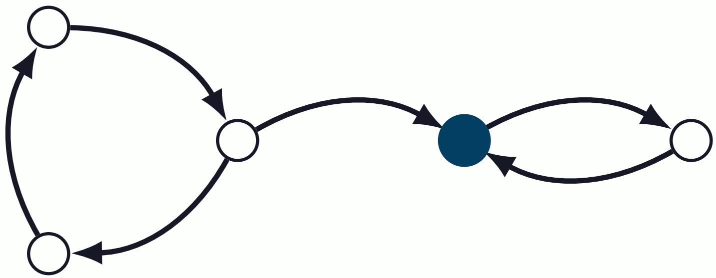
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



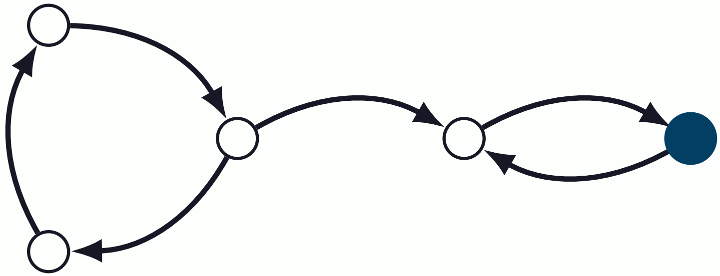
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



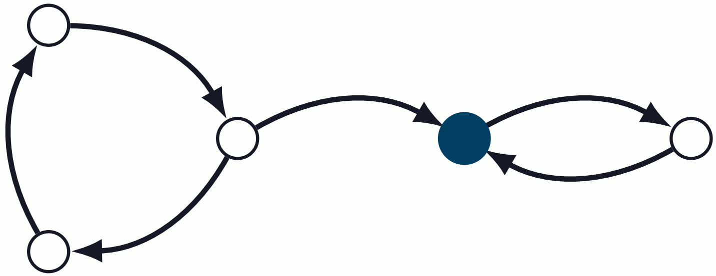
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



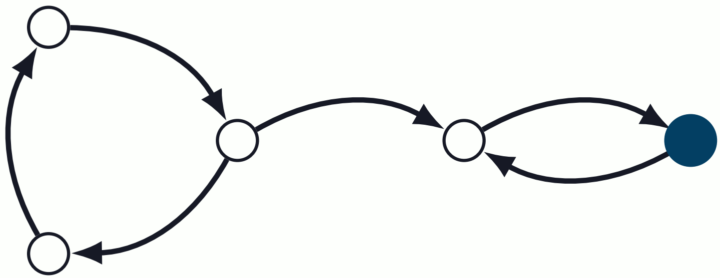
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



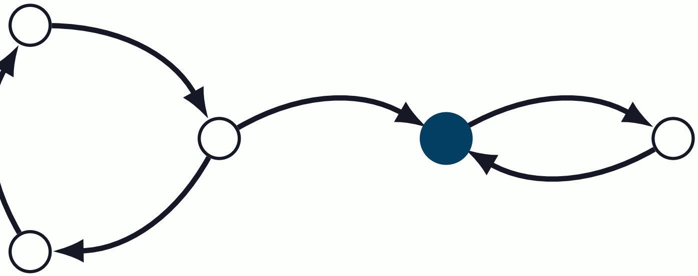
Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



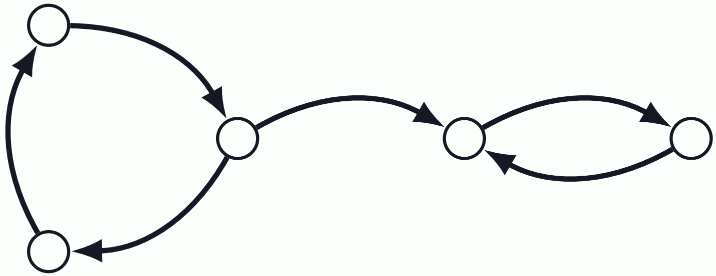
Niekończące się spacery. . .

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



Niekończące się spacery...

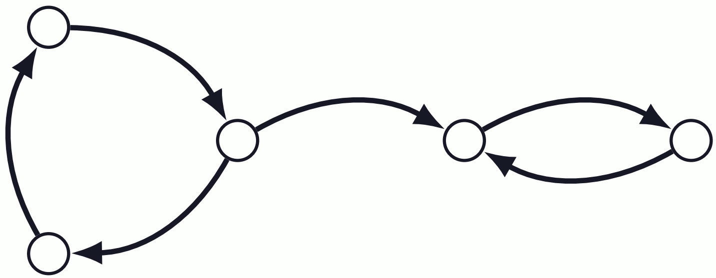
Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



Wtedy pewien wierzchołek v jest odwiedzony **nieskończenie często**.

Niekończące się spacery...

Niech $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ldots$ będzie nieskończoną ścieżką w **skończonym** grafie.



Wtedy pewien wierzchołek v jest odwiedzony **nieskończenie często**.

$\rightsquigarrow$ Pewien **podciąg** $v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots$ dla $0 \leqslant i_0 < i_1 < i_2 < \ldots$ jest stale równy v.

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

0 1

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \dots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $\left(x_0, x_1, \ldots\right)$ z X

zawiera podciąg $\left(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots\right)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $\big(x_0, x_1, \dots\big)$ z X

zawiera podciąg $\big(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots\big)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $\big[0, 1\big]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0,1]$ jest **zwarty**.

Dowód

$\blacksquare$

Spacery po odcinku

Definicja

Przestrzeń X jest **zwarta** jeśli

każdy ciąg punktów $(x_0, x_1, \ldots)$ z X

zawiera podciąg $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots)$ zbieżny w X.

Fakt

Odcinek $[0, 1]$ jest **zwarty**.

Dowód

$\blacksquare$

Definicja (równoważna*)

Z każdego pokrycia można wybrać podpokrycie **skończone**.

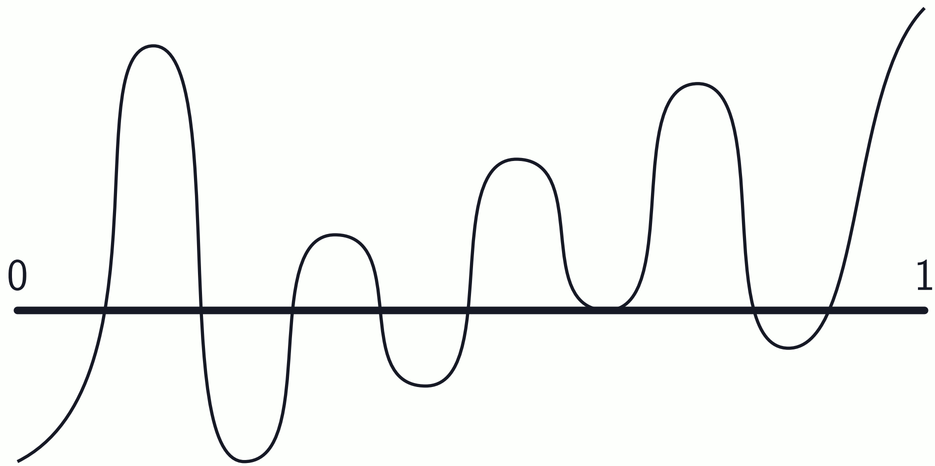
Zastosowanie

Zastosowanie

Jeśli $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.

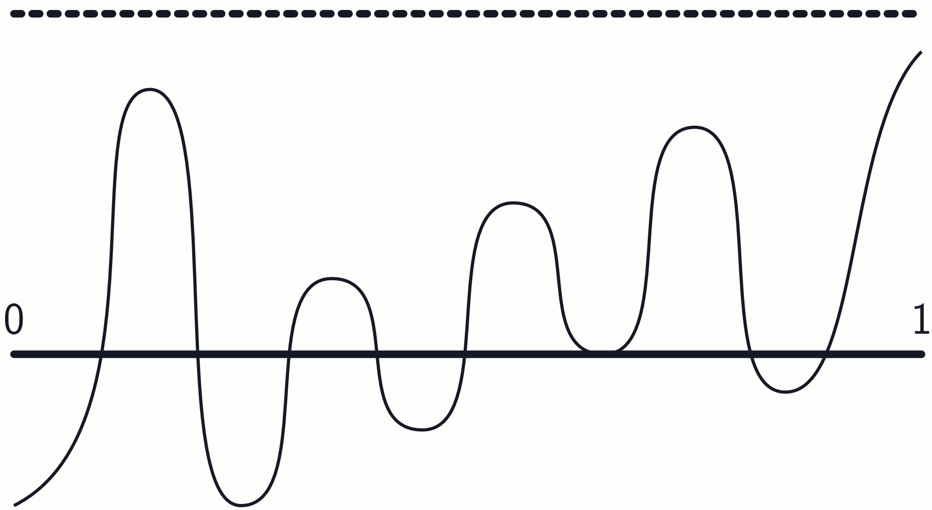
Zastosowanie

Jeśli $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.



Zastosowanie

Jeśli $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.



Zastosowanie

Jeśli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.

Dowód

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad \exists x \in [0,1]. \;\; f(x) \geqslant n$$

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad \exists x \in [0,1]. \; f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Zastosowanie

$$\boxed{\text{Jeśli } f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad \exists x \in [0,1]. \; f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**!

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad \exists x \in [0,1]. \ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ∎

Zastosowanie

Jeśli $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad \exists x \in [0,1]. \; f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ■

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1]. \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad f(x) \geqslant n$$

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ∎

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1].\ \forall n \in \mathbb{N}.\ f(x) \geqslant n$$

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ■

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1].\ \forall n \in \mathbb{N}.\ f(x) \geqslant n$$

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ∎

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1].\ \forall n \in \mathbb{N}.\ f(x) \geqslant n$$

Ciągłość **vs.** **Jednostajna ciągłość**

Zastosowanie

Jeśli $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ■

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1].\ \forall n \in \mathbb{N}.\ f(x) \geqslant n$$

Ciągłość **vs.** **Jednostajna ciągłość**

$\forall \varepsilon > 0.\ \forall x \in [0,1].\ \exists \delta > 0.$

$$f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Zastosowanie

$\boxed{\text{Jeśli } f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła to jest ograniczona.}}$

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ■

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1].\ \forall n \in \mathbb{N}.\ f(x) \geqslant n$$

Ciągłość vs. **Jednostajna ciągłość**

$\forall \varepsilon{>}0.\ \forall x{\in}[0,1].\ \exists \delta{>}0.$ $\qquad$ $\forall \varepsilon{>}0.\ \exists \delta{>}0.\ \forall x{\in}[0,1].$

$$f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Zastosowanie

Jeśli $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to jest ograniczona.

Dowód

Załóżmy przeciwnie, że:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists x \in [0,1].\ f(x) \geqslant n$$

Wybierzmy ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots$ tak by $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n$.

Niech x_∞ to granica *jakiegoś* **podciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_\infty) \geqslant n$ — **sprzeczność**! ■

Zwartość dała nam

$$\exists x \in [0,1].\ \forall n \in \mathbb{N}.\ f(x) \geqslant n$$

Ciągłość vs. **Jednostajna ciągłość**

$\forall \varepsilon>0.\ \forall x\in[0,1].\ \exists \delta>0.$ $\qquad$ $\forall \varepsilon>0.\ \exists \delta>0.\ \forall x\in[0,1].$

$$f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Ogólniej

Ogólniej

Fakt

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Np. $C_\infty = \{x \mid \forall n.\ f(x) \geqslant n\}$

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Np. $C_\infty = \{x \mid \forall n.\ f(x) \geqslant n\}$

Dowód

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0,1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Np. $C_\infty = \{x \mid \forall n.\ f(x) \geqslant n\}$

Dowód

Niech $x_n \in C_n$ świadczy o niepustości tego zbioru.

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Np. $C_\infty = \{x \mid \forall n.\ f(x) \geqslant n\}$

Dowód

Niech $x_n \in C_n$ świadczy o niepustości tego zbioru.

Niech x_{i_n} to podciąg zbieżny do pewnego x_∞.

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Np. $C_\infty = \{x \mid \forall n.\ f(x) \geqslant n\}$

Dowód

Niech $x_n \in C_n$ świadczy o niepustości tego zbioru.

Niech x_{i_n} to podciąg zbieżny do pewnego x_∞.

Dla dowolnego n, z domkniętości C_{i_n} mamy $x_\infty \in C_{i_n}$.

Ogólniej

Fakt

Załóżmy, że X jest zwarta.

Np. $X = [0, 1]$

Niech $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots$ to zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych.

Np. $C_n = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$

Wtedy przecięcie $C_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ jest niepuste.

Np. $C_\infty = \{x \mid \forall n.\ f(x) \geqslant n\}$

Dowód

Niech $x_n \in C_n$ świadczy o niepustości tego zbioru.

Niech x_{i_n} to podciąg zbieżny do pewnego x_∞.

Dla dowolnego n, z domkniętości C_{i_n} mamy $x_\infty \in C_{i_n}$.

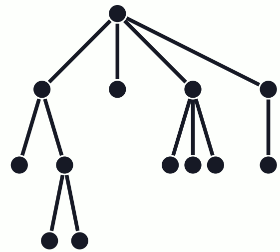
Więc $x_\infty \in C_\infty$.

■

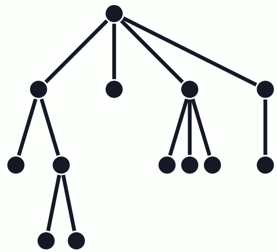
And now for something completely different

Drzewa

Drzewa



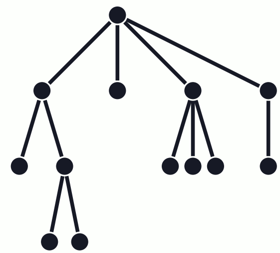
Lemat Königa



Drzewa

Lemat Königa

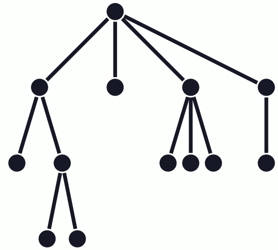
Jeśli T jest drzewem,



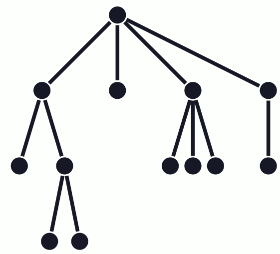
Lemat Königa

Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,



Lemat Königa

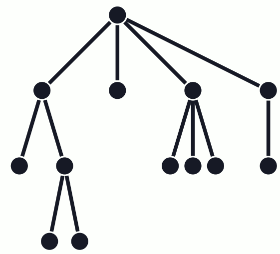


Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

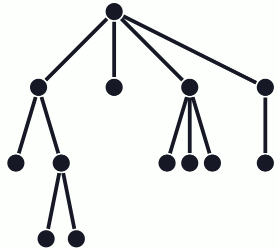
każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

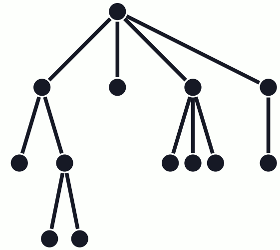
Lemat Königa

Jeśli T jest drzewem,
każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,
oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków
to T ma nieskończoną gałąź.



Dowód

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

Drzewa

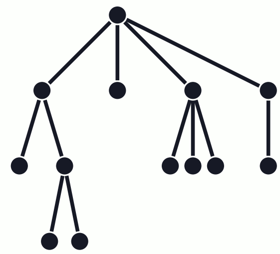
Lemat Königa

Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

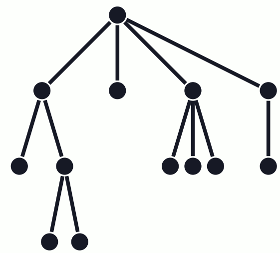


Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

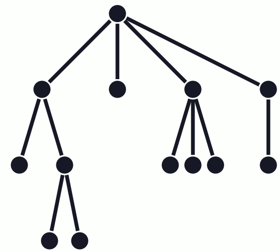
Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

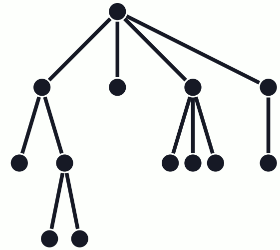
Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

Drzewa

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

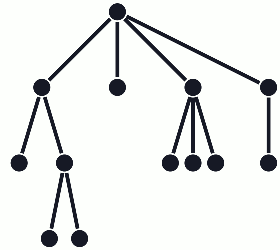
T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

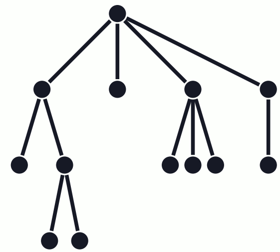
T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

$\rightsquigarrow$ Ciąg $v_0, v_1, \ldots$ to nieskończona gałąź T.

$\blacksquare$

Drzewa

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

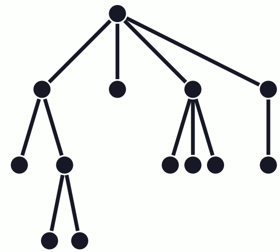
T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

$\rightsquigarrow$ Ciąg $v_0, v_1, \ldots$ to nieskończona gałąź T.

$\blacksquare$

Drzewa

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

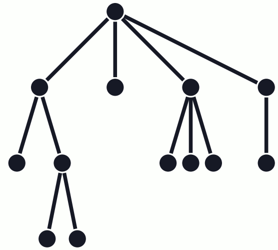
$\rightsquigarrow$ Ciąg $v_0, v_1, \ldots$ to nieskończona gałąź T.

$\blacksquare$

Lemat Königa $\equiv$ Zwartość

Drzewa

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

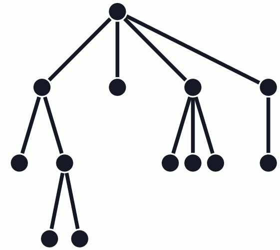
$\rightsquigarrow$ Ciąg $v_0, v_1, \ldots$ to nieskończona gałąź T.

$\blacksquare$

Lemat Königa $\equiv$ Zwartość [**Reverse Mathematics**]

Drzewa

Lemat Königa



Jeśli T jest drzewem,

każdy wierzchołek T ma skończenie wiele dzieci,

oraz T ma nieskończenie wiele wierzchołków

to T ma nieskończoną gałąź.

Dowód

Oznaczmy korzeń T jako v_0. Wiemy, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_0.

Ale v_0 ma tylko skończenie wiele dzieci.

Więc istnieje dziecko v_1 wierzchołka v_0 takie, że

T posiada nieskończenie wiele wierzchołków poniżej v_1.

$\rightsquigarrow$ Ciąg $v_0, v_1, \ldots$ to nieskończona gałąź T.

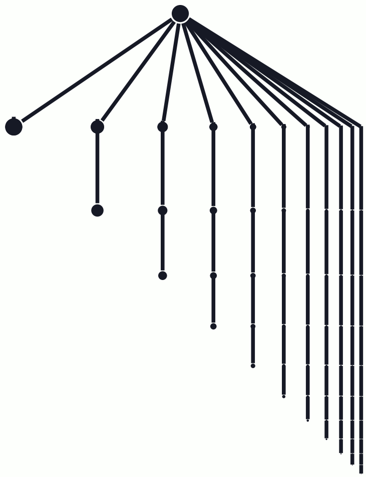
$\blacksquare$

Lemat Königa $\equiv$ Zwartość [**Reverse Mathematics**]

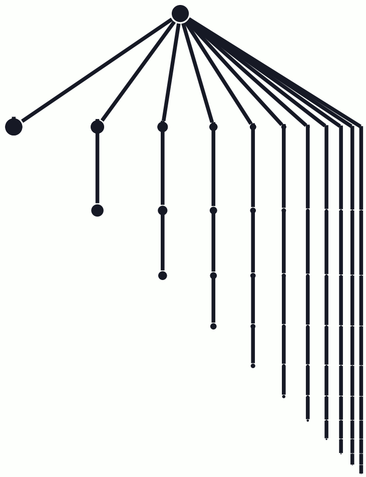
[**AKA Second-hand Mathematics**]

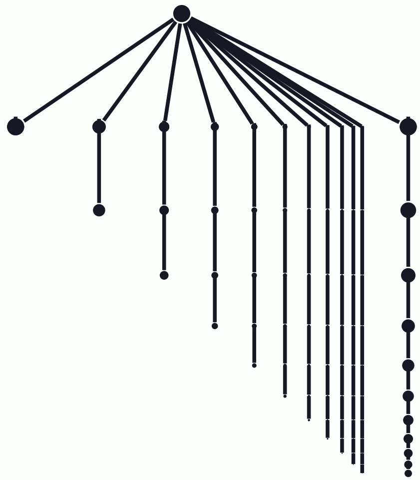
Państwo jeże

Państwo jeże

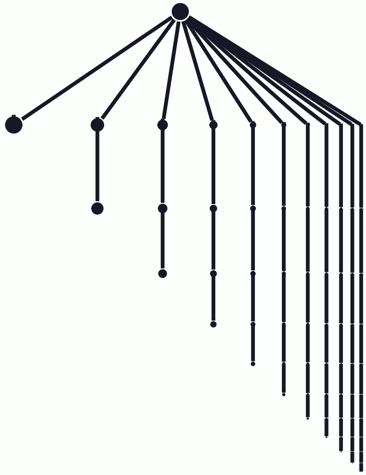


Państwo jeże

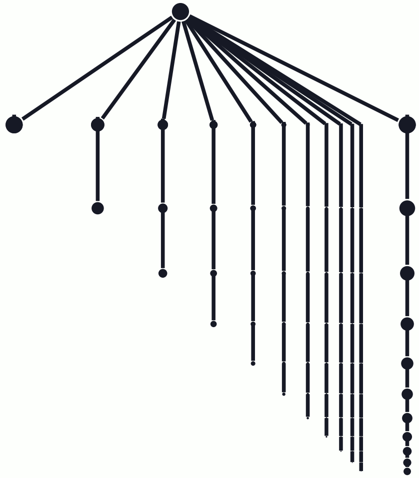




Państwo jeże

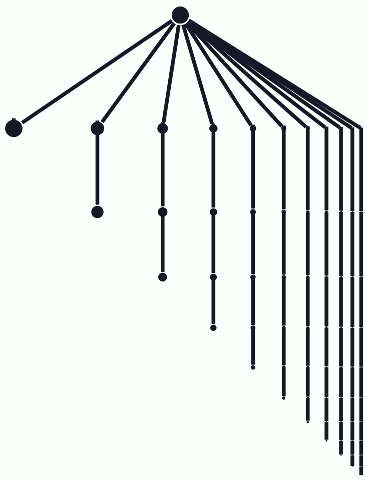


Pani jeż

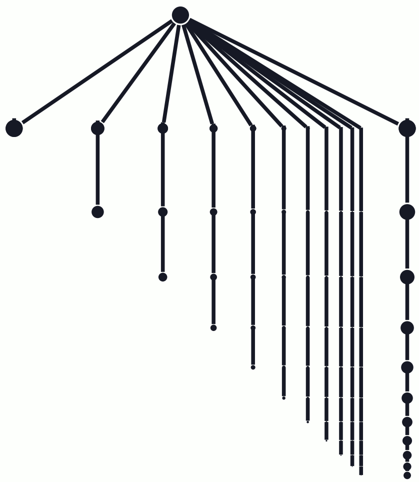


Pan jeż

Państwo jeże



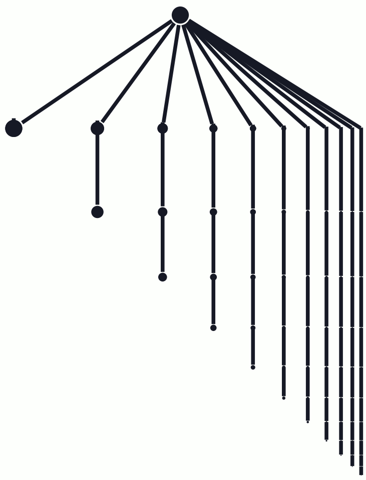
Pani jeż



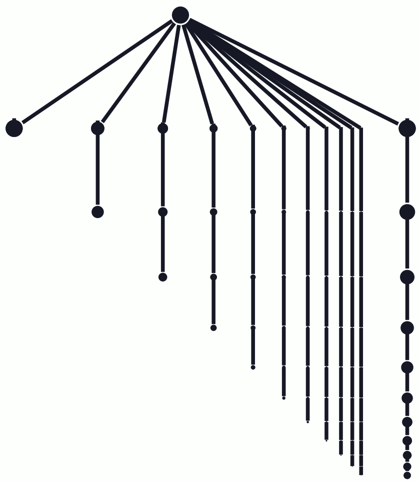
Pan jeż

⇝ Dobre ufundowanie

Państwo jeże



Pani jeż

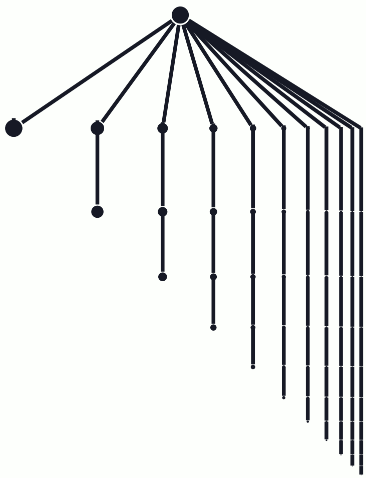


Pan jeż

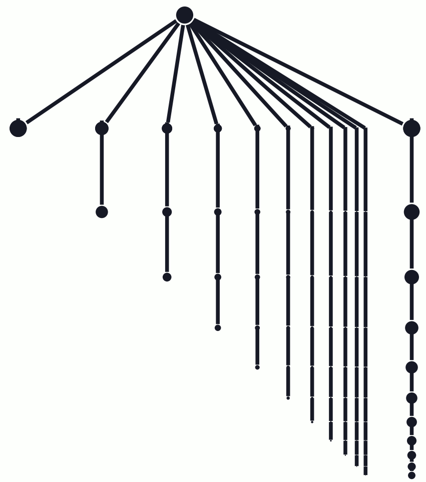
⇝ Dobre ufundowanie

⇝ Bisymulacyjna równoważność

Państwo jeże



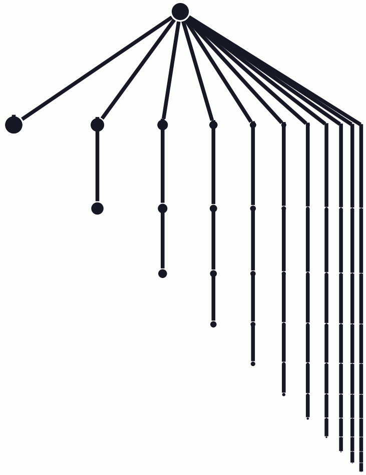
Pani jeż



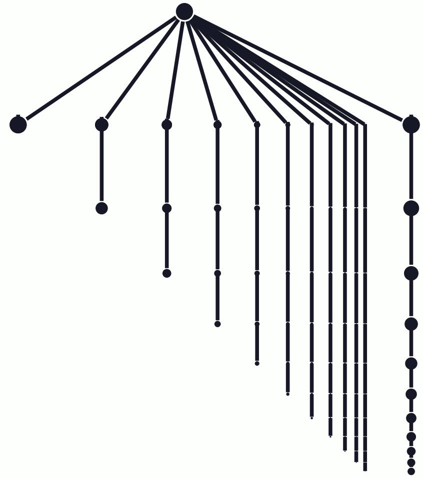
Pan jeż

- ⇝ Dobre ufundowanie
- ⇝ Bisymulacyjna równoważność
- ⇝ Logika modalna

Państwo jeże



Pani jeż



Pan jeż

$\leadsto$ Dobre ufundowanie

$\leadsto$ Bisymulacyjna równoważność

$\leadsto$ Logika modalna

$\leadsto$ ...

Logika pierwszego rzędu

Formuły

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Przykład

$$\exists x.\ \forall y.\ x{=}y \vee E(x, y)$$

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Anty-przykład

$$\exists X.\ \forall x \in X.\ \exists y \in X.\ E(x, y)$$

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \lor \phi', \quad \phi \land \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Uwaga

Aksjomatyka Zermelo–Fraenkela-Choice'a (**ZFC**)

to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu!!!

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Uwaga

Aksjomatyka Zermelo–Fraenkela-Choice'a (**ZFC**)

to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu!!!

W tej aksjomatyce jest jedna relacja:

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Uwaga

Aksjomatyka Zermelo–Fraenkela-Choice'a (**ZFC**)

to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu!!!

W tej aksjomatyce jest jedna relacja: $\in$

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Uwaga

Aksjomatyka Zermelo–Fraenkela-Choice'a (**ZFC**)

to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu!!!

W tej aksjomatyce jest jedna relacja: $\in$

Np. zbiór pusty $\emptyset$ jest zdefiniowany tak by $\forall x.\ \neg(x \in \emptyset)$.

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

[**Definicja prawdy** wg. Tarskiego]

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

[**Definicja prawdy** wg. Tarskiego]

$\mathcal{M} \models \exists x.\ \phi(x)$ **gdy** istnieje $x \in M$ takie, że $\mathcal{M} \models \phi(x)$

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

[**Definicja prawdy** wg. Tarskiego]

$\mathcal{M} \models \exists x.\ \phi(x)$ **gdy** istnieje $x \in M$ takie, że $\mathcal{M} \models \phi(x)$

$\mathcal{M} \models \phi \vee \phi'$ **gdy** $\mathcal{M} \models \phi(x)$ lub $\mathcal{M} \models \phi'(x)$

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

[**Definicja prawdy** wg. Tarskiego]

$\mathcal{M} \models \exists x.\ \phi(x)$ **gdy** istnieje $x \in M$ takie, że $\mathcal{M} \models \phi(x)$

$\mathcal{M} \models \phi \vee \phi'$ **gdy** $\mathcal{M} \models \phi(x)$ lub $\mathcal{M} \models \phi'(x)$

$\mathcal{M} \models \neg\phi$ **gdy** nie zachodzi $\mathcal{M} \models \phi(x)$

Logika pierwszego rzędu

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

[**Definicja prawdy** wg. Tarskiego]

$\mathcal{M} \models \exists x.\ \phi(x)$ **gdy** istnieje $x \in M$ takie, że $\mathcal{M} \models \phi(x)$

$\mathcal{M} \models \phi \vee \phi'$ **gdy** $\mathcal{M} \models \phi(x)$ lub $\mathcal{M} \models \phi'(x)$

$\mathcal{M} \models \neg\phi$ **gdy** nie zachodzi $\mathcal{M} \models \phi(x)$

$\mathcal{M} \models (x = y)$ **gdy** x jest równe y

Formuły

$$\exists x.\ \phi(x), \quad \forall x.\ \phi(x), \quad \phi \vee \phi', \quad \phi \wedge \phi', \quad \neg\phi, \quad x = y$$

$+$ relacje pochodzące od modelu: $E(x, y)$, $x \leqslant y$, ...

Modele

$$\mathcal{M} = \langle M, E_1, E_2, \ldots \rangle$$

- M to zbiór — **uniwersum**
- E_i to relacje na M (np. krawędzie grafu)

Spełnianie

[**Definicja prawdy** wg. Tarskiego]

$\mathcal{M} \models \exists x.\ \phi(x)$	**gdy**	istnieje $x \in M$ takie, że $\mathcal{M} \models \phi(x)$
$\mathcal{M} \models \phi \vee \phi'$	**gdy**	$\mathcal{M} \models \phi(x)$ lub $\mathcal{M} \models \phi'(x)$
$\mathcal{M} \models \neg\phi$	**gdy**	nie zachodzi $\mathcal{M} \models \phi(x)$
$\mathcal{M} \models (x = y)$	**gdy**	x jest równe y
$\mathcal{M} \models E_i(x, y)$	**gdy**	$(x, y) \in E_i$

Zwartość w logice

Zwartość w logice

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Zwartość w logice

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

Zwartość w logice

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

$\rightsquigarrow$ Jeśli $\Gamma' = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ to istnieje model $\mathcal{M}_n$ taki, że

$$\mathcal{M}_n \models \phi_0,\ \mathcal{M}_n \models \phi_1,\ \ldots,\ \mathcal{M}_n \models \phi_n$$

Zwartość w logice

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

$\rightsquigarrow$ Jeśli $\Gamma' = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ to istnieje model $\mathcal{M}_n$ taki, że

$$\mathcal{M}_n \models \phi_0,\ \mathcal{M}_n \models \phi_1,\ \ldots,\ \mathcal{M}_n \models \phi_n$$

$$\Big[\ \text{równoważnie } \mathcal{M} \models \phi_0 \wedge \ldots \wedge \phi_n\ \Big]$$

Zwartość w logice

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

$\rightsquigarrow$ Jeśli $\Gamma' = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ to istnieje model $\mathcal{M}_n$ taki, że

$$\mathcal{M}_n \models \phi_0,\ \mathcal{M}_n \models \phi_1,\ \ldots,\ \mathcal{M}_n \models \phi_n$$

$$\Big[\text{ równoważnie } \mathcal{M} \models \phi_0 \wedge \ldots \wedge \phi_n \Big]$$

Wtedy cały zbiór Γ też ma pewien model $\mathcal{M}_\infty$ taki, że

$$\mathcal{M}_\infty \models \phi_0,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_1,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_2,\ \ldots$$

Zwartość w logice

Twierdzenie o zwartości

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

$\rightsquigarrow$ Jeśli $\Gamma' = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ to istnieje model $\mathcal{M}_n$ taki, że

$$\mathcal{M}_n \models \phi_0,\ \mathcal{M}_n \models \phi_1,\ \ldots,\ \mathcal{M}_n \models \phi_n$$

$$\Big[\ \text{równoważnie } \mathcal{M} \models \phi_0 \wedge \ldots \wedge \phi_n\ \Big]$$

Wtedy cały zbiór Γ też ma pewien model $\mathcal{M}_\infty$ taki, że

$$\mathcal{M}_\infty \models \phi_0,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_1,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_2,\ \ldots$$

Zwartość w logice

Twierdzenie o zwartości

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

$\rightsquigarrow$ Jeśli $\Gamma' = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ to istnieje model $\mathcal{M}_n$ taki, że

$$\mathcal{M}_n \models \phi_0,\ \mathcal{M}_n \models \phi_1,\ \ldots,\ \mathcal{M}_n \models \phi_n$$

$$\Big[\ \text{równoważnie } \mathcal{M} \models \phi_0 \wedge \ldots \wedge \phi_n\ \Big]$$

Wtedy cały zbiór Γ też ma pewien model $\mathcal{M}_\infty$ taki, że

$$\mathcal{M}_\infty \models \phi_0,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_1,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_2,\ \ldots$$

Problem

Zwartość w logice

Twierdzenie o zwartości

Niech $\Gamma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ to zbiór formuł logiki pierwszego rzędu.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma **model**.

$\rightsquigarrow$ Jeśli $\Gamma' = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ to istnieje model $\mathcal{M}_n$ taki, że

$$\mathcal{M}_n \models \phi_0,\ \mathcal{M}_n \models \phi_1,\ \ldots,\ \mathcal{M}_n \models \phi_n$$

$$\Big[\ \text{równoważnie } \mathcal{M} \models \phi_0 \wedge \ldots \wedge \phi_n\ \Big]$$

Wtedy cały zbiór Γ też ma pewien model $\mathcal{M}_\infty$ taki, że

$$\mathcal{M}_\infty \models \phi_0,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_1,\ \mathcal{M}_\infty \models \phi_2,\ \ldots$$

Problem

Jak brać granice modeli?!

„Dowód“ tw. o zwartości

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

Niech Γ taka, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma model.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

Niech Γ taka, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma model.

Załóżmy przez sprzeczność, że cała Γ **nie ma** modelu.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

Niech Γ taka, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma model.

Załóżmy przez sprzeczność, że cała Γ **nie ma** modelu.

Wtedy $\Gamma \models \bot \rightsquigarrow$ założenie Γ prowadzi do **fałszu**.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

Niech Γ taka, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma model.

Załóżmy przez sprzeczność, że cała Γ **nie ma** modelu.

Wtedy $\Gamma \models \bot \rightsquigarrow$ założenie Γ prowadzi do **fałszu**.

Czyli istnieje skończony dowód $\bot$ z aksjomatów Γ.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

Niech Γ taka, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma model.

Załóżmy przez sprzeczność, że cała Γ **nie ma** modelu.

Wtedy $\Gamma \models \bot \rightsquigarrow$ założenie Γ prowadzi do **fałszu**.

Czyli istnieje skończony dowód $\bot$ z aksjomatów Γ.

Ten dowód używa skończenie wielu aksjomatów $\Gamma' \subset \Gamma$.

„Dowód“ tw. o zwartości

Definicja

Mówimy, że $\Gamma \models \phi$ jeśli

każdy model spełniający wszystkie formuły z Γ

spełnia też ϕ.

Twierdzenie o pełności (Gödel [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ to istnieje skończony dowód ϕ z aksjomatów Γ.

Dowód tw. o zwartości

Niech Γ taka, że każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ ma model.

Załóżmy przez sprzeczność, że cała Γ **nie ma** modelu.

Wtedy $\Gamma \models \bot \rightsquigarrow$ założenie Γ prowadzi do **fałszu**.

Czyli istnieje skończony dowód $\bot$ z aksjomatów Γ.

Ten dowód używa skończenie wielu aksjomatów $\Gamma' \subset \Gamma$.

Więc już $\Gamma' \models \bot \rightsquigarrow \Gamma'$ **nie może** mieć modelu $\rightsquigarrow$ **sprzeczność**! ∎

Zastosowanie 1

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Dla $n \geqslant 0$ niech ϕ_n mówi, że **nie ma** ścieżki z x_0 do y_0 długości dokładnie n.

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Dla $n \geqslant 0$ niech ϕ_n mówi, że **nie ma** ścieżki z x_0 do y_0 długości dokładnie n.

Niech $\Gamma = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Dla $n \geqslant 0$ niech ϕ_n mówi, że **nie ma** ścieżki z x_0 do y_0 długości dokładnie n.

Niech $\Gamma = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\Gamma' = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \ldots, \phi_n\}$ ma model:

Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

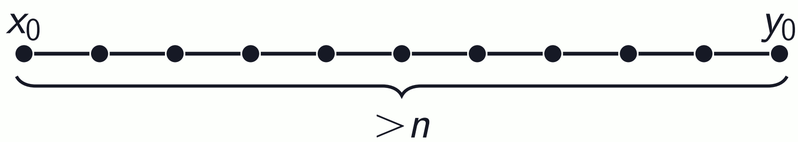
Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Dla $n \geqslant 0$ niech ϕ_n mówi, że **nie ma** ścieżki z x_0 do y_0 długości dokładnie n.

Niech $\Gamma = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\Gamma' = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \ldots, \phi_n\}$ ma model:



Zastosowanie 1

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

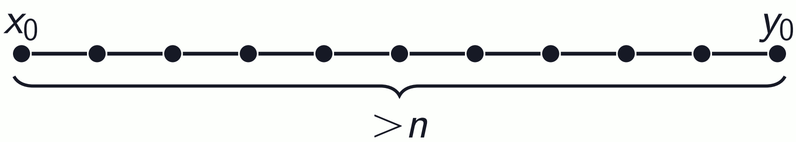
Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Dla $n \geqslant 0$ niech ϕ_n mówi, że **nie ma** ścieżki z x_0 do y_0 długości dokładnie n.

Niech $\Gamma = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\Gamma' = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \ldots, \phi_n\}$ ma model:



Tw. o zwartości $\Rightarrow$ cała Γ ma model

Osiągalność

Niech $\mathrm{REACH}(x, y)$ gdy istnieje ścieżka z x do y w danym grafie.

Fakt

Nie istnieje formuła logiki pierwszego rzędu $\phi(x, y)$ definiująca $\mathrm{REACH}(x, y)$.

Dowód

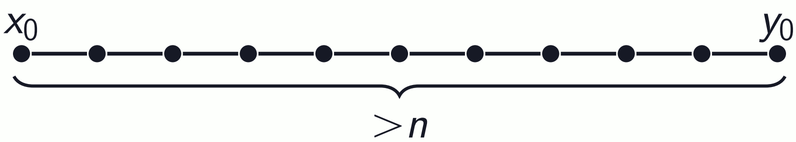
Załóżmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje.

Ustalmy dwie nazwy stałych x_0 i y_0.

Dla $n \geqslant 0$ niech ϕ_n mówi, że **nie ma** ścieżki z x_0 do y_0 długości dokładnie n.

Niech $\Gamma = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\Gamma' = \{\phi(x_0, y_0), \phi_0, \ldots, \phi_n\}$ ma model:



Tw. o zwartości $\Rightarrow$ cała Γ ma model $\rightsquigarrow$ **sprzeczność**! ■

Zastosowanie 2

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA $=$ tożsamości arytmetyczne $+$ schemat aksjomatu **indukcji**

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA $=$ tożsamości arytmetyczne $+$ schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \left\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \right\rangle$$

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA $=$ tożsamości arytmetyczne $+$ schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \left\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \right\rangle$$

Trick

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano

[wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA $=$ tożsamości arytmetyczne $+$ schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano

[wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA $=$ tożsamości arytmetyczne $+$ schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Niech $\Gamma = \mathbf{PA} \cup \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Niech $\Gamma = \mathbf{PA} \cup \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ jest spełniony przez pewien model $\mathcal{N}'$.

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA $=$ tożsamości arytmetyczne $+$ schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Niech $\Gamma = \mathbf{PA} \cup \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ jest spełniony przez pewien model $\mathcal{N}'$.

Gdzie $\mathcal{N}'$ to $\mathcal{N}$ z ω ustawioną na dostatecznie dużą liczbę.

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Niech $\Gamma = \mathbf{PA} \cup \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ jest spełniony przez pewien model $\mathcal{N}'$.

Gdzie $\mathcal{N}'$ to $\mathcal{N}$ z ω ustawioną na dostatecznie dużą liczbę.

Więc istnieje model $\mathcal{N}_\infty$ całej Γ.

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Niech $\Gamma = \mathbf{PA} \cup \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ jest spełniony przez pewien model $\mathcal{N}'$.

Gdzie $\mathcal{N}'$ to $\mathcal{N}$ z ω ustawioną na dostatecznie dużą liczbę.

Więc istnieje model $\mathcal{N}_\infty$ całej Γ.

W tym modelu wartość ω jest **większa** od każdej z liczb $n = 0, 1, \ldots$!

Zastosowanie 2

Arytmetyka Peano [wyłącznie formuły logiki pierwszego rzędu!]

PA = tożsamości arytmetyczne + schemat aksjomatu **indukcji**

Zamierzony model

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant \rangle$$

Trick

Dodajmy symbol stałej ω.

Oraz formuły ϕ_n dla $n \geqslant 0$:

$$\phi_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leqslant \omega$$

Niech $\Gamma = \mathbf{PA} \cup \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$.

Każdy skończony podzbiór $\Gamma' \subset \Gamma$ jest spełniony przez pewien model $\mathcal{N}'$.

Gdzie $\mathcal{N}'$ to $\mathcal{N}$ z ω ustawioną na dostatecznie dużą liczbę.

Więc istnieje model $\mathcal{N}_\infty$ całej Γ.

W tym modelu wartość ω jest **większa** od każdej z liczb $n = 0, 1, \ldots$!

$\rightsquigarrow$ taka ω to **niestandardowa** liczba naturalna...

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry [pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry [pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry

[pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry

[pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Własności

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Własności

$$A \cap B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U}$$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Własności

$$A \cap B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U}$$

$$A \cup B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U}$$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry [pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Własności

$$A \cap B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U}$$

$$A \cup B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U}$$

$$A \in \mathcal{U} \iff (\mathbb{N} - A) \notin \mathcal{U}$$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry [pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Własności

$$A \cap B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U}$$

$$A \cup B \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U}$$

. . . **Tarski**. . .

$$A \in \mathcal{U} \iff (\mathbb{N} - A) \notin \mathcal{U}$$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry

[pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Produkt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\infty = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry [pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$\varnothing \notin \mathcal{F}$, $\quad \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, $\quad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$, $\quad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Produkt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\infty = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$

Ultraprodukt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\mathcal{U} = \mathcal{M}_\infty / \sim_\mathcal{U}$

Dowód tw. o zwartości — ultrafiltry [pracujemy nad $\mathbb{N}$]

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Produkt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\infty = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$

Ultraprodukt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\mathcal{U} = \mathcal{M}_\infty / \sim_\mathcal{U}$

gdzie $\vec{x} \sim_\mathcal{U} \vec{y} \iff \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\} \in \mathcal{U}$

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\emptyset \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Produkt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\infty = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$

Ultraprodukt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\mathcal{U} = \mathcal{M}_\infty / \sim_\mathcal{U}$

gdzie $\quad \vec{x} \sim_\mathcal{U} \vec{y} \iff \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\} \in \mathcal{U}$

Twierdzenie Łosia [1955]

$\mathcal{M}_\mathcal{U} \models \phi$ wtedy i tylko wtedy gdy $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M}_n \models \phi\} \in \mathcal{U}$.

Filtr $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

$$\varnothing \notin \mathcal{F}, \qquad \mathbb{N} \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}, \qquad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

Np. $\mathcal{F}_\infty = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \infty\}$

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$

Filtr maksymalny **lub** $\forall A \subseteq \mathbb{N}.\ A \in \mathcal{U} \vee (\mathbb{N} - A) \in \mathcal{U}$

Np. maksymalne rozszerzenie $\mathcal{F}_\infty$

Produkt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\infty = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$

Ultraprodukt $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{M}_\mathcal{U} = \mathcal{M}_\infty / \sim_\mathcal{U}$

gdzie $\vec{x} \sim_\mathcal{U} \vec{y} \iff \big\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\big\} \in \mathcal{U}$

Twierdzenie Łosia [1955]

$\mathcal{M}_\mathcal{U} \models \phi$ wtedy i tylko wtedy gdy $\big\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M}_n \models \phi\big\} \in \mathcal{U}$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}_\mathcal{U}$ spełnia wszystkie formuły $\phi_0, \phi_1, \ldots$

Podsumowanie

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

1'. **Lemat Königa**:

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

1'. **Lemat Königa**:

   Summa summarum to samo, chociaż kombinatorycznie i na drzewach.

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

1'. **Lemat Königa**:

   Summa summarum to samo, chociaż kombinatorycznie i na drzewach.

2. **Zwartość w logice**:

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

1'. **Lemat Königa**:

   Summa summarum to samo, chociaż kombinatorycznie i na drzewach.

2. **Zwartość w logice**:

   Szukany obiekt powstaje przez **ultraprodukt**.

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

1'. **Lemat Königa**:

   Summa summarum to samo, chociaż kombinatorycznie i na drzewach.

2. **Zwartość w logice**:

   Szukany obiekt powstaje przez **ultraprodukt**.

   $\rightsquigarrow$ może mieć niestandardowy *kształt*. . .

Podsumowanie

Zwartość pozwala konstruować obiekty o porządanych własnościach.

1. **Wariant topologiczny**:

   Szukany obiekt to granica wybranych aproksymacji.

   Ale działa tylko dla własności **domkniętych**.

1'. **Lemat Königa**:

   Summa summarum to samo, chociaż kombinatorycznie i na drzewach.

2. **Zwartość w logice**:

   Szukany obiekt powstaje przez **ultraprodukt**.

   $\rightsquigarrow$ może mieć niestandardowy *kształt*...

   Ale działa dla własności z całej logiki pierwszego rzędu.