O tym jak Georg Cantor hipotezy continuum dowodził

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

O tym jak Georg Cantor hipotezy continuum dowodził

(i ostatecznie zwariował)

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

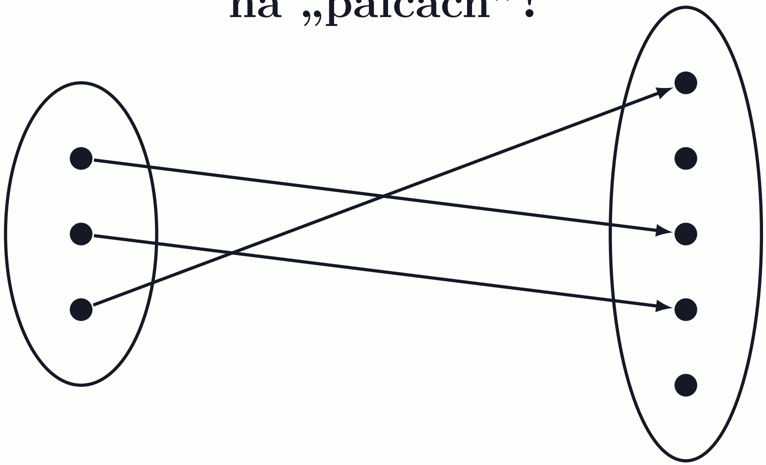
na „palcach”!

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!

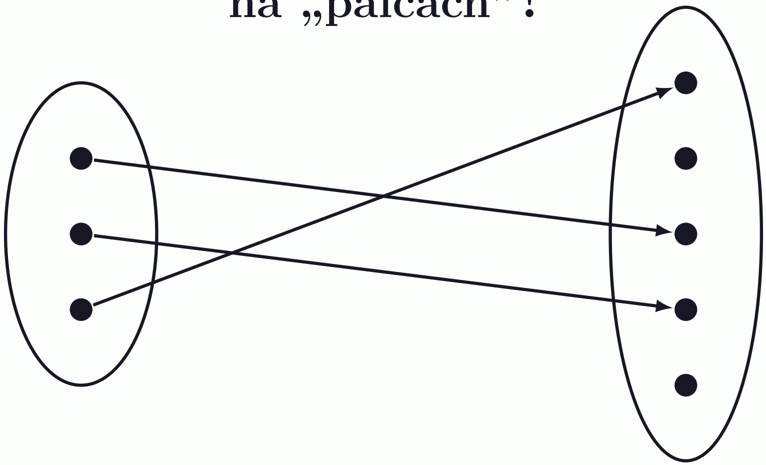
Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!



Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

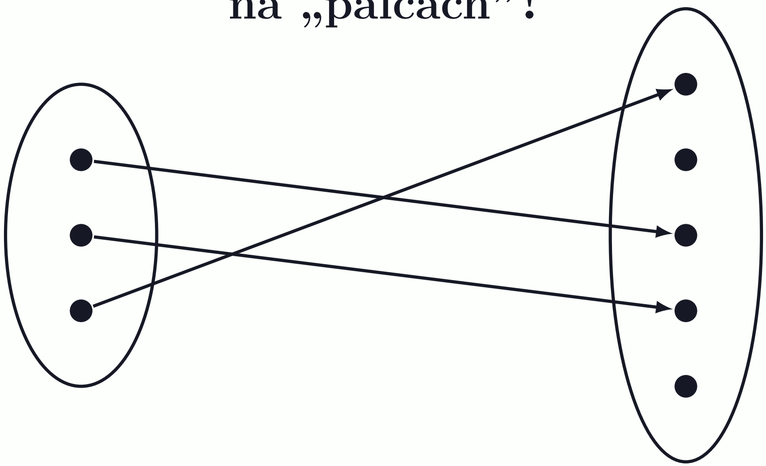
na „palcach”!



$A \leqslant B$ gdy istnieje włożenie $f\colon A \hookrightarrow B$

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!

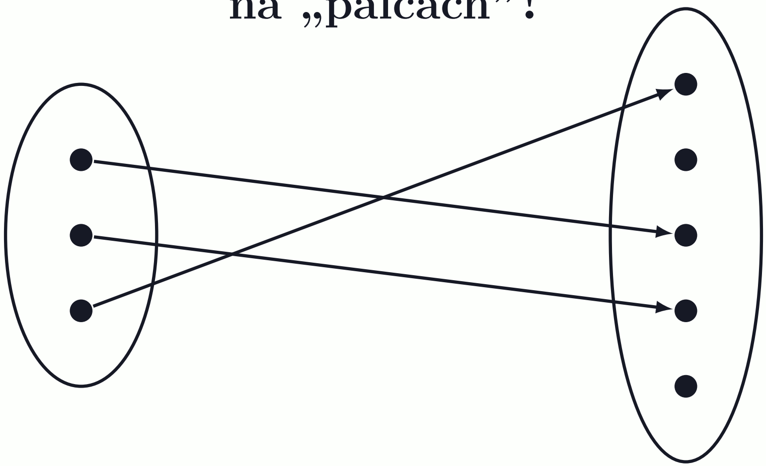


$A \leqslant B$ gdy istnieje włożenie $f\colon A \hookrightarrow B$

$$\forall a \neq a' \in A.\ f(a) \neq f(a')$$

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!



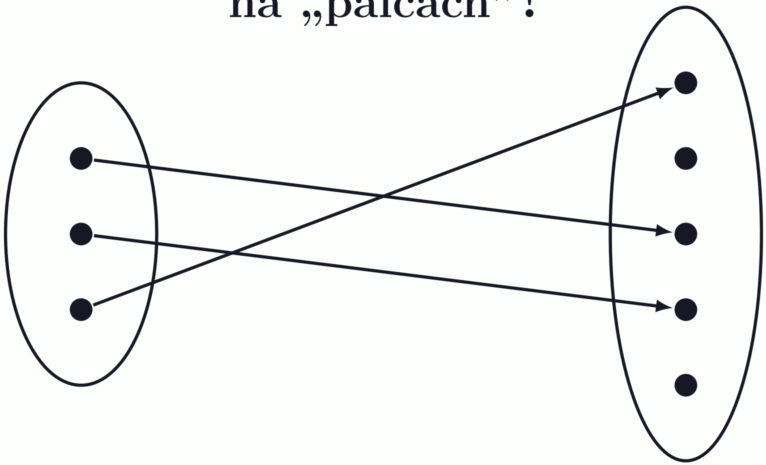
$A \leqslant B$ gdy istnieje włożenie $f\colon A \hookrightarrow B$

$$\forall a \neq a' \in A.\ f(a) \neq f(a')$$

Na przykład:

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!



$$A \leqslant B \text{ gdy istnieje } \textit{włożenie } f\colon A \hookrightarrow B$$

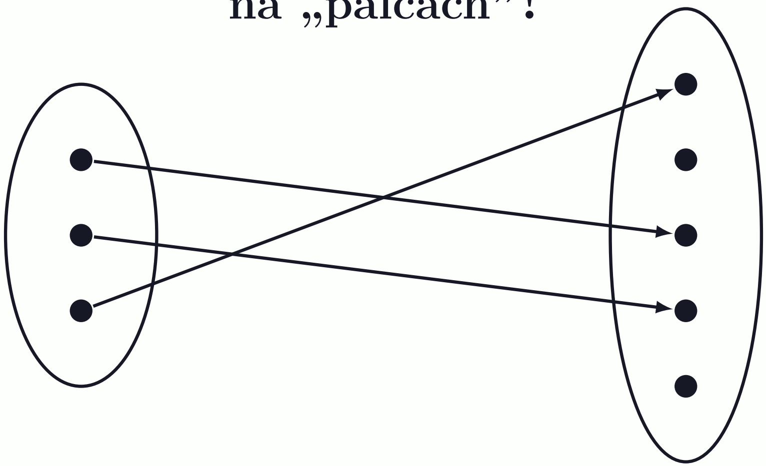
$$\forall a \neq a' \in A.\ f(a) \neq f(a')$$

Na przykład:

- $\varnothing \leqslant A$ bo $f_\varnothing\colon \varnothing \hookrightarrow A$

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!



$$A \leqslant B \text{ gdy istnieje włożenie } f\colon A \hookrightarrow B$$

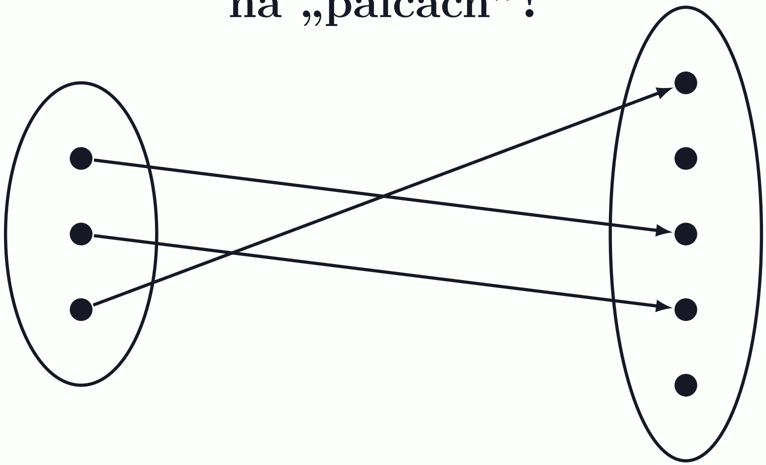
$$\forall a{\neq}a' \in A.\ f(a) \neq f(a')$$

Na przykład:

- $\varnothing \leqslant A$ bo $f_\varnothing\colon \varnothing \hookrightarrow A$
- $\{0,\ldots,n\} \leqslant \{0,1,\ldots\}{=}\mathbb{N}$ bo $f_n\colon i \mapsto i$

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!



$$A \leqslant B \text{ gdy istnieje włożenie } f\colon A \hookrightarrow B$$

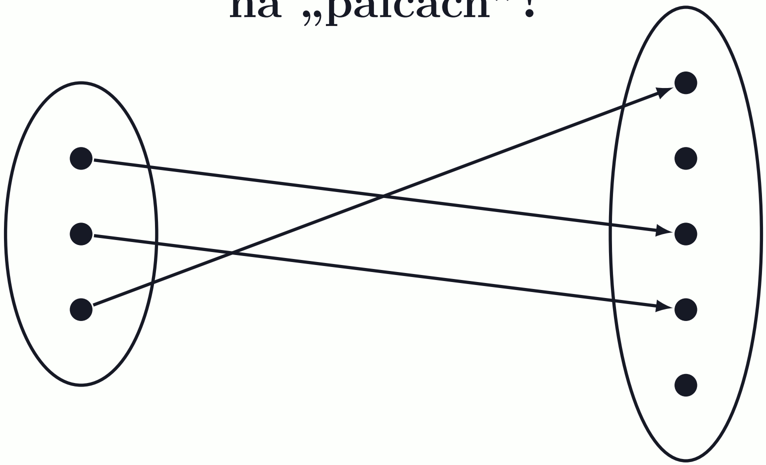
$$\forall a{\neq}a' \in A.\ f(a) \neq f(a')$$

Na przykład:

- $\varnothing \leqslant A$ bo $f_\varnothing\colon \varnothing \hookrightarrow A$
- $\{0,\ldots,n\} \leqslant \{0,1,\ldots\}{=}\mathbb{N}$ bo $f_n\colon i \mapsto i$
- $\{0,1,\ldots\} \leqslant \{42,43,\ldots\}$ bo $f_{42}\colon i \mapsto i{+}42$

Jak sprawdzić czy $3 \leqslant 5$?

na „palcach”!



$$A \leqslant B \text{ gdy istnieje włożenie } f\colon A \hookrightarrow B$$

$$\forall a{\neq}a' \in A.\ f(a) \neq f(a')$$

Na przykład:

- $\varnothing \leqslant A$ bo $f_\varnothing\colon \varnothing \hookrightarrow A$
- $\{0,\ldots,n\} \leqslant \{0,1,\ldots\}{=}\mathbb{N}$ bo $f_n\colon i \mapsto i$
- $\{0,1,\ldots\} \leqslant \{42,43,\ldots\}$ bo $f_{42}\colon i \mapsto i{+}42$
- $\ldots$

Równoliczność

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \text{ i } B \leqslant A$$

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \text{ i } B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \;\text{ i }\; B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f \colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1} \colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości. . .

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości…

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

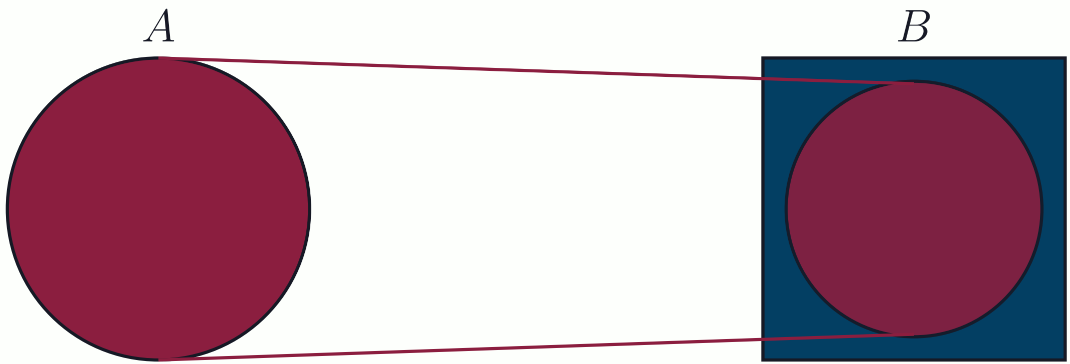
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

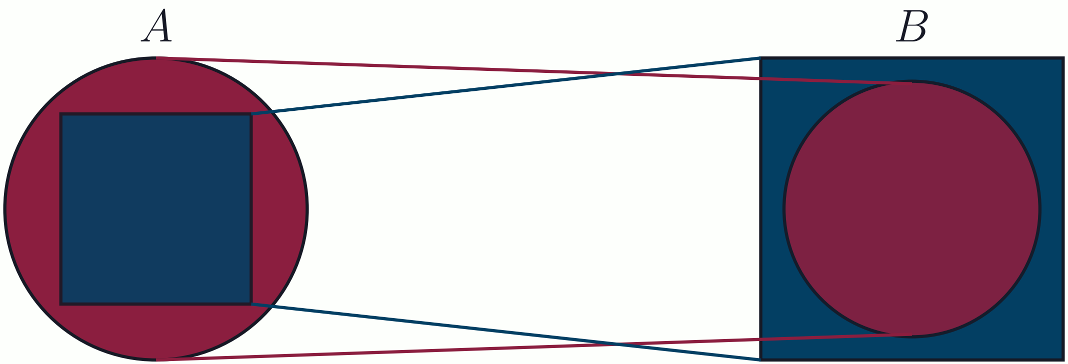
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

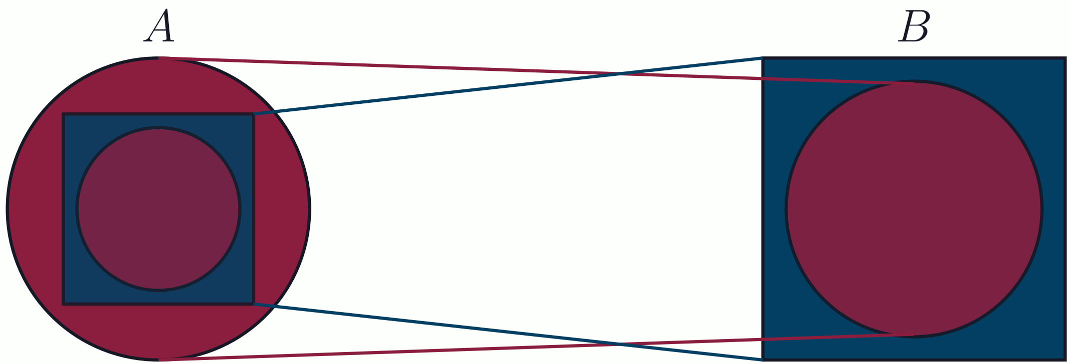
$$A \leqslant B \;\text{ i }\; B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

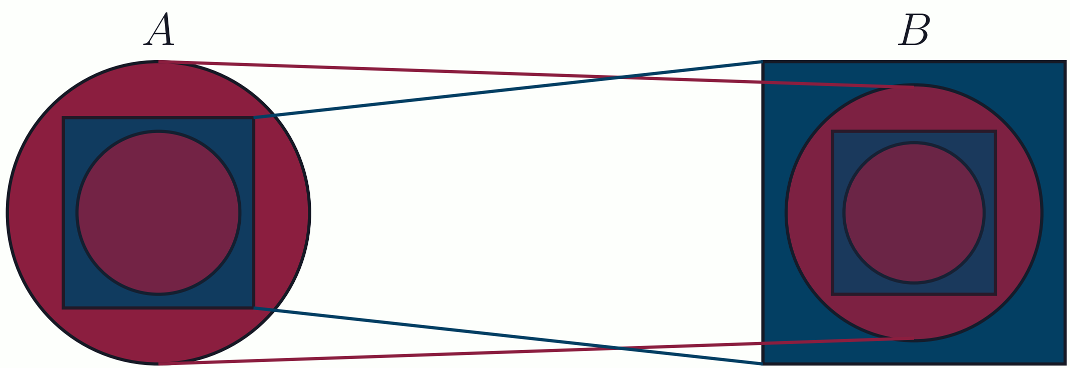
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

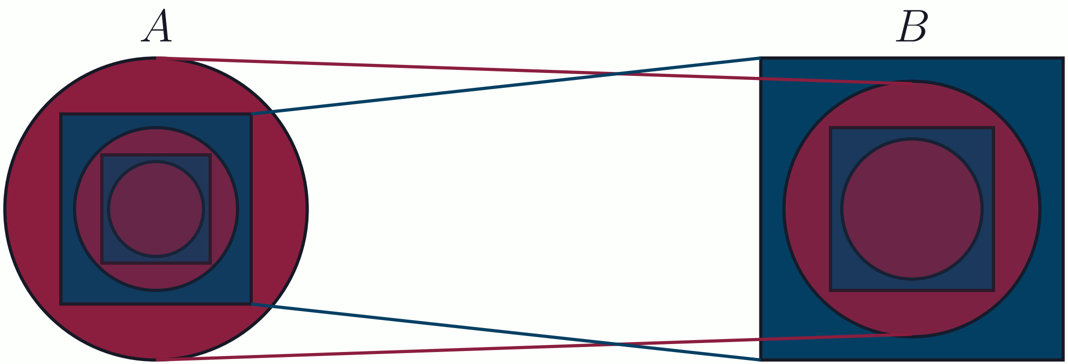
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości…



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

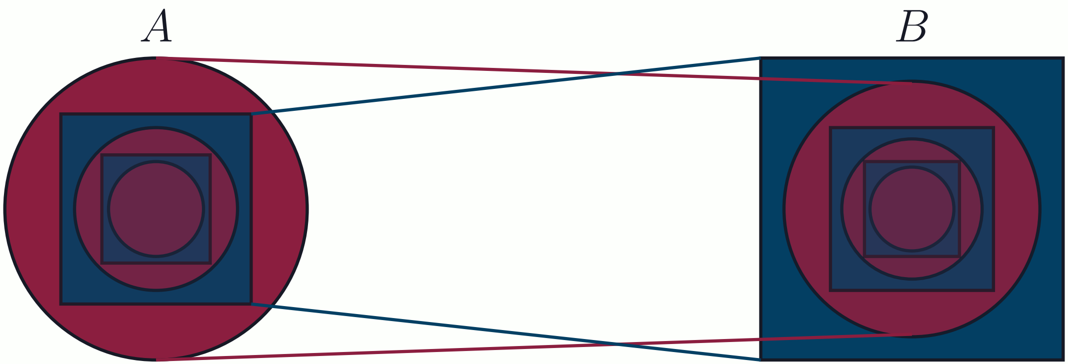
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

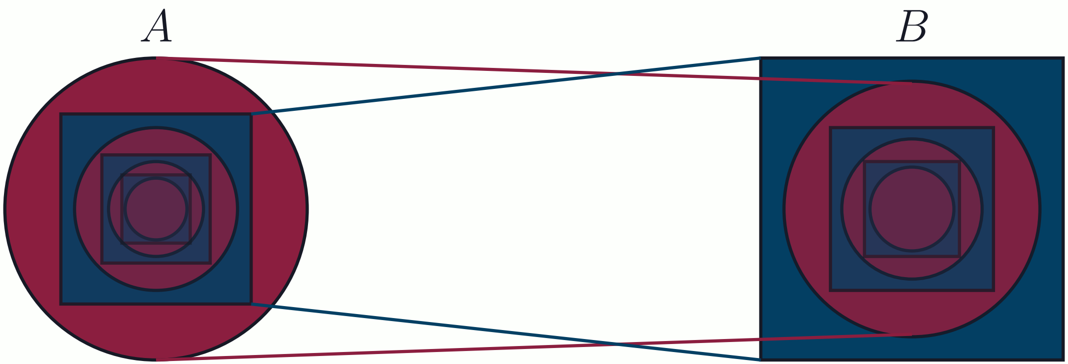
$$A \leqslant B \;\text{ i }\; B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości…



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

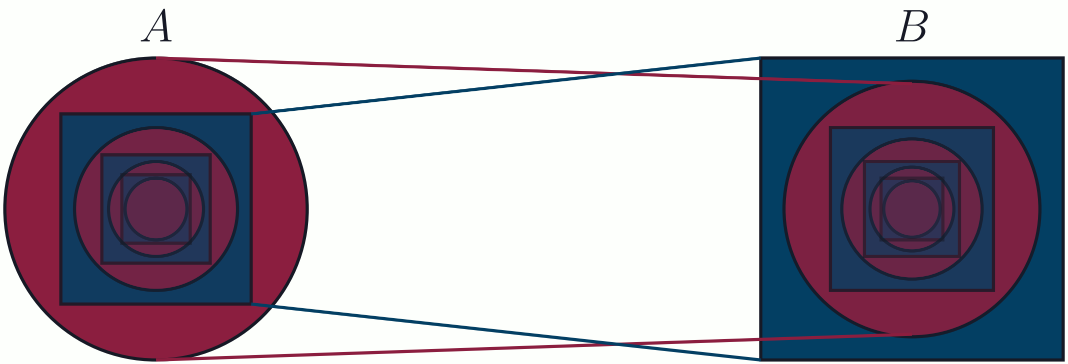
$$A \leqslant B \;\text{ i }\; B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B,\ f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości. . .



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

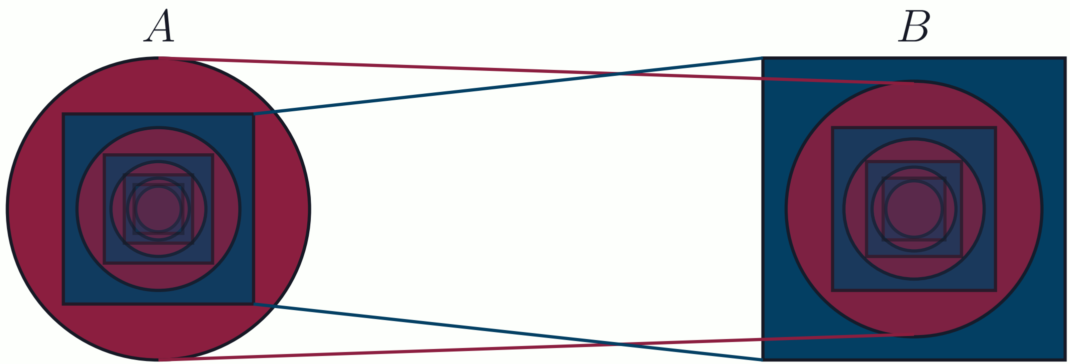
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

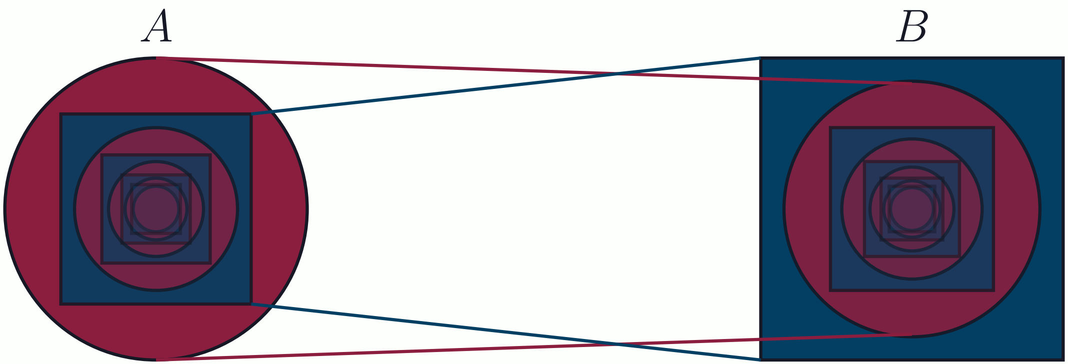
$$A \leqslant B \text{ i } B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f \colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1} \colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

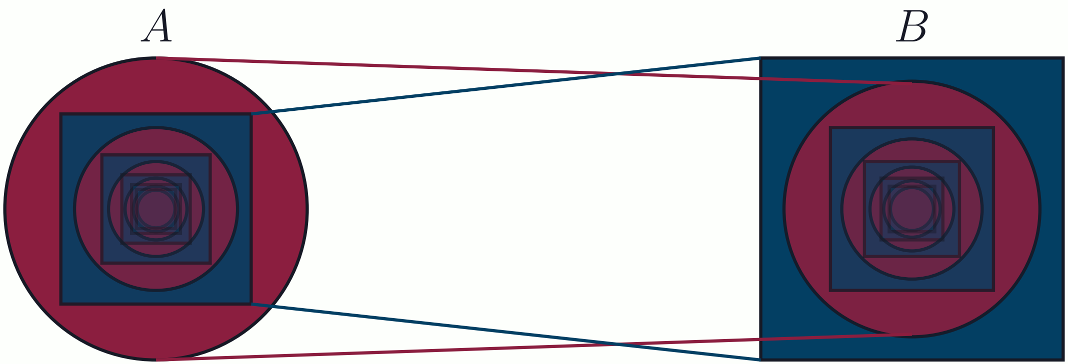
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

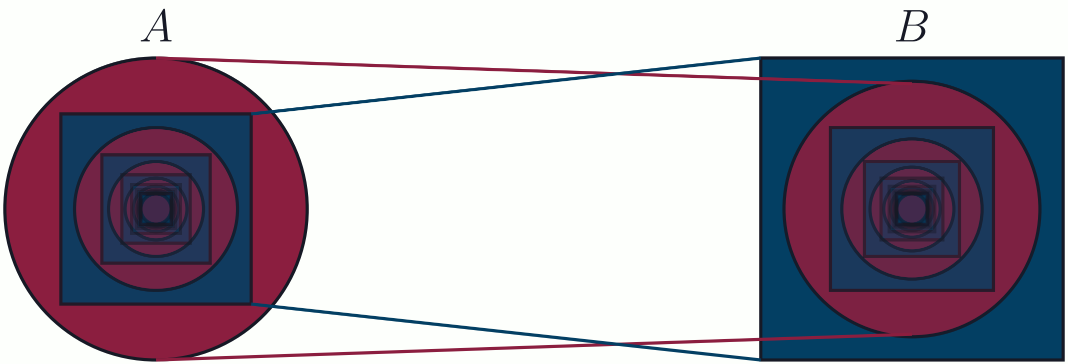
$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...



Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości...

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \quad \text{i} \quad B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości. . .

Twierdzenie [aksjomat wyboru]

Zawsze $A \leqslant B$ lub $B \leqslant A$.

Równoliczność

$$A \cong B$$

gdy

$$A \leqslant B \ \text{ i } \ B \leqslant A$$

Twierdzenie (Cantor-Schröder-Bernstein)

Jeśli $A \cong B$ to istnieje bijekcja $f\colon A \hookrightarrow B$, $f^{-1}\colon B \hookrightarrow A$.

Np. $\{a, b, c, d\} \cong \{1, 2, 3, 4\}$

Dowód Klej, nożyczki i sporo cierpliwości. . .

Twierdzenie [aksjomat wyboru]

Zawsze $A \leqslant B$ lub $B \leqslant A$.

Dowód

Suwak. . .

Przeliczalność

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q} \quad \leqslant \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}$$

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \leqslant \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}$$

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z}}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \times \mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}$$

Przeliczalność

$$A \text{ jest przeliczalny}$$

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Przeliczalność

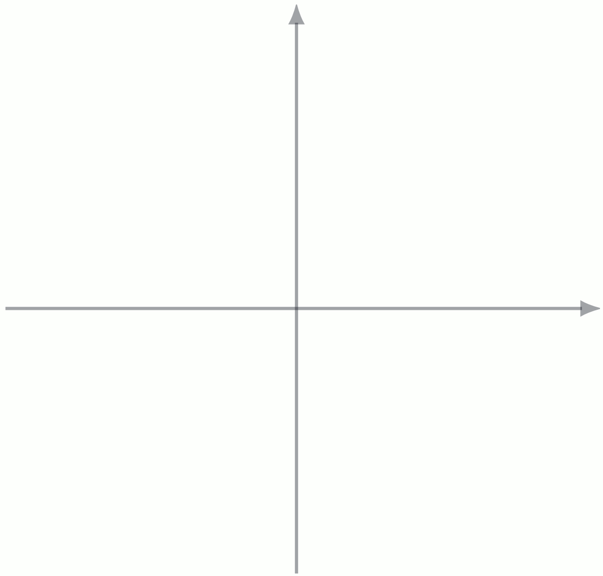
A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$



Przeliczalność

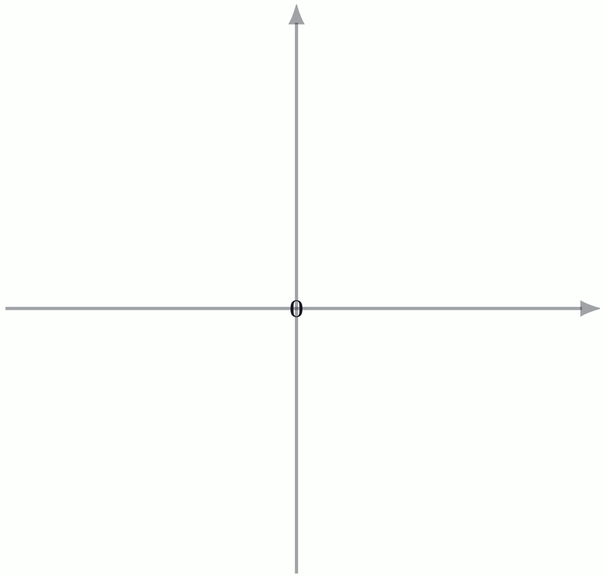
A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \leqslant \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \underbrace{\leqslant \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$



Przeliczalność

A jest przeliczalny

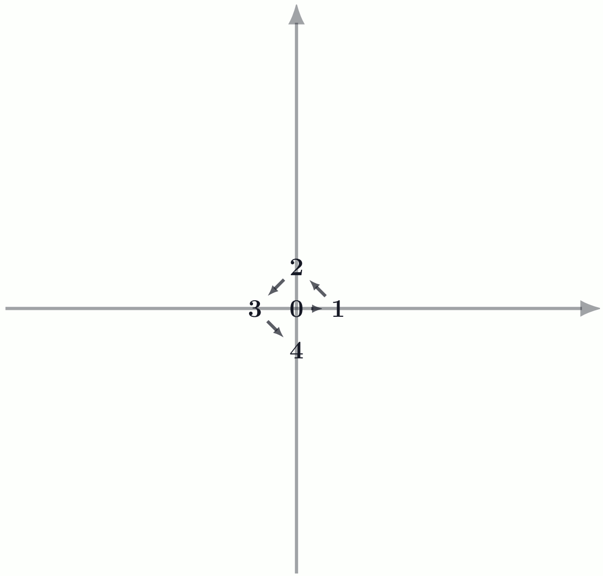
gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\mathbb{N} \leqslant \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \leqslant \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n \qquad \frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle \qquad \text{spirala}$$



Przeliczalność

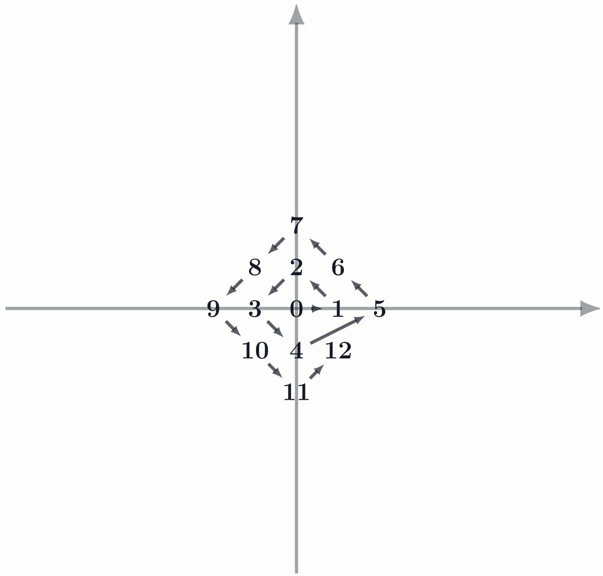
A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \leqslant \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\mathbb{Q} \leqslant \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b\rangle} \quad \underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$



Przeliczalność

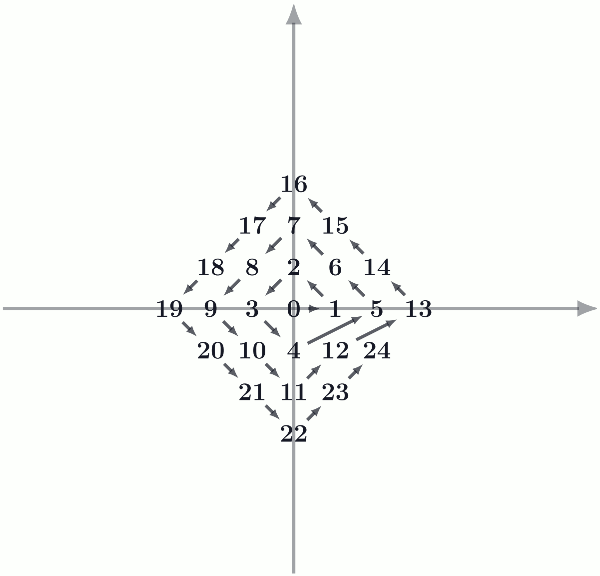
A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z}}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \times \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$



Przeliczalność

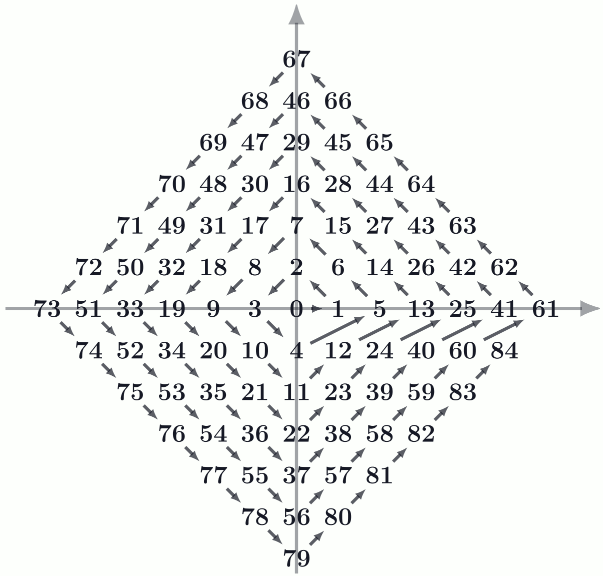
A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \;\leqslant\; \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \;\underbrace{\leqslant\; \mathbb{Z}\times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b\rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \;\leqslant\; \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$



Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Fakt

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna:

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z}}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \times \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Fakt

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ A_n \leqslant \mathbb{N}\right) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \leqslant \mathbb{N}$$

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b\rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Fakt

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ A_n \leqslant \mathbb{N}\right) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \leqslant \mathbb{N}$$

Fakt

Jeśli $\varnothing \neq A$ oraz $A \leqslant \mathbb{N}$ to

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b\rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Fakt

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ A_n \leqslant \mathbb{N}\right) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \leqslant \mathbb{N}$$

Fakt

Jeśli $\varnothing \neq A$ oraz $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{f\colon A \hookrightarrow \mathbb{N}}$ to

Przeliczalność

$$A \text{ jest } \text{przeliczalny}$$

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z} \times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b \rangle} \underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Fakt

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ A_n \leqslant \mathbb{N}\right) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \leqslant \mathbb{N}$$

Fakt

Jeśli $\varnothing \neq A$ oraz $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{f : A \hookrightarrow \mathbb{N}}$ to $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$.

Przeliczalność

A jest przeliczalny

gdy

$$A \leqslant \mathbb{N}$$

Przykład

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \leqslant \quad \mathbb{Q}}_{n \mapsto n} \quad \underbrace{\leqslant \quad \mathbb{Z}\times}_{\frac{a}{b} \mapsto \langle a, b\rangle}\underbrace{\mathbb{Z} \quad \leqslant \quad \mathbb{N}}_{\text{spirala}}$$

Fakt

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna:

$$(\forall n \in \mathbb{N}.\ A_n \leqslant \mathbb{N}) \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \leqslant \mathbb{N}$$

Fakt

Jeśli $\varnothing \neq A$ oraz $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{f\colon A \hookrightarrow \mathbb{N}}$ to $\underbrace{A = \{a_0, a_1, \ldots\}}_{f'\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{„na”}} A}$.

Nieprzeliczalność

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$ — zbiór potęgowy

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \Big\{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N} \Big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N} \qquad [\text{ czyli } \mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}} \,]$$

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Rozważmy $$A \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\Big\}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N} \qquad [\text{ czyli } \mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}]$$

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Rozważmy $$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \neq A_n$.

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N} \qquad [\text{ czyli } \mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}]$$

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Rozważmy $$A \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\Big\}$$

Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \neq A_n$.

Więc $A \notin 2^{\mathbb{N}}$.

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Rozważmy $$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \neq A_n$.

Więc $A \notin 2^{\mathbb{N}}$.

Sprzeczność!

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \left\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\right\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie (Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Rozważmy $$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\right\}$$

Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \neq A_n$.

Więc $A \notin 2^{\mathbb{N}}$.

Sprzeczność!

$\blacksquare$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \dots, \{0,1\}, \{0,2\}, \dots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N} \qquad [\text{ czyli } \mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}} \text{]}$$

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \dots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

„golibroda który goli tych mężczyzn którzy nie golą się sami”

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \big\{A_0, A_1, \ldots\big\}$.

$$A \overset{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\mathbb{N} = \big\{0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,,\ 9\,,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16, \\
A_0 &= (\\
A_1 &= (\\
A_2 &= (\\
A_3 &= (\\
A_4 &= (\\
A_5 &= (
\end{aligned}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leq \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\begin{array}{rl}
\mathbb{N} & = \big\{\, 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,,\ 9\,,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16, \\
A_0 & = \big(\ 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1 \\
A_1 & = \big(\\
A_2 & = \big(\\
A_3 & = \big(\\
A_4 & = \big(\\
A_5 & = \big(
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{ n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n \big\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
\mathbb{N} & = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = (& 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = (& 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = (& 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = (& 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = (& 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = (& 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\Big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N} \qquad [\text{ czyli } \mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}} \text{]}$$

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
A & \stackrel{\text{def}}{=} & (& & & & & & & & & & & & & & & & \\
\mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = & (0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = & (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = & (1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie (Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
A & \stackrel{\text{def}}{=} & (\\
\mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = & (\mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = & (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = & (1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \left\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\right\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie (Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \overset{\text{def}}{=} \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\right\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
A & \overset{\text{def}}{=} & (\mathbf{1} \\
\mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = & (\mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = & (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = & (1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \overset{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
A & \overset{\text{def}}{=} & (\,\mathbf{1} \\
\mathbb{N} & = & \{\,0\,, & 1\,, & 2\,, & 3\,, & 4\,, & 5\,, & 6\,, & 7\,, & 8\,, & 9\,, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = & (\,\mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = & (\,0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = & (\,1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = & (\,0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = & (\,1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = & (\,1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie (Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \overset{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
A & \overset{\text{def}}{=} & (& \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & & & & & \\
\mathbb{N} & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = & (& \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = & (& 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = & (& 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = & (& 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = & (& 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = & (& 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\preccurlyeq \mathbb{N}$$

[czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
A & \stackrel{\text{def}}{=} & (\mathbf{1} & \mathbf{0} \\
\mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
A_0 & = & (\mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & = & (0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
A_2 & = & (1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_3 & = & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
A_4 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A_5 & = & (1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$$ [czyli $\mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}}$]

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\begin{array}{lll}
A & \stackrel{\text{def}}{=} & (\mathbf{1}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{1} \\
\mathbb{N} & = & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16, \\
A_0 & = & (\mathbf{0}\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
A_1 & = & (0\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
A_2 & = & (1\ 1\ \mathbf{0}\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
A_3 & = & (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
A_4 & = & (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
A_5 & = & (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0
\end{array}$$

Nieprzeliczalność

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, \mathbb{N}\big\}$$ — zbiór potęgowy

Twierdzenie(Cantor [1891]) [metoda przekątniowa]

$$2^{\mathbb{N}} \not\leq \mathbb{N} \qquad [\text{ czyli } \mathbb{N} < 2^{\mathbb{N}} \text{]}$$

Dowód Załóżmy przeciwnie, że $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\big\}$$

$$\begin{array}{lcl}
A & \stackrel{\text{def}}{=} & (\mathbf{1}\;\; \mathbf{0}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{0}\;\; \mathbf{0}\;\; \mathbf{0}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{0}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{0}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{1}\;\; \mathbf{1} \\
\mathbb{N} & = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \\
A_0 & = & (\mathbf{0}\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1\;\; 1 \\
A_1 & = & (0\;\; \mathbf{1}\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 0 \\
A_2 & = & (1\;\; 1\;\; \mathbf{0}\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 0 \\
A_3 & = & (0\;\; 0\;\; 1\;\; \mathbf{1}\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; 1 \\
A_4 & = & (1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; \mathbf{1}\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 0 \\
A_5 & = & (1\;\; 1\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; \mathbf{1}\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 0\;\; 0
\end{array}$$

Hipoteza continuum (CH)

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\quad \mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}} \quad$ to $\quad \mathbb{N} \cong A \quad$ lub $\quad A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Hipoteza continuum (CH)

$$\text{Jeśli}\quad \mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}} \quad\text{to}\quad \mathbb{N} \cong A \quad\text{lub}\quad A \cong 2^{\mathbb{N}}.$$

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

`AKA` **pierwszy** problem Hilberta (!)

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\quad \mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}} \quad$ to $\quad \mathbb{N} \cong A \quad$ lub $\quad A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \simeq A$ lub $A \simeq 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?" (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$ …tranzytywne…

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH**

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC** „Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**”]

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**”]

Psikus [dolne tw. Löwenheima–Skolema + masaż]

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?" (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**"]

Psikus [dolne tw. Löwenheima–Skolema + masaż]

Można skonstruować $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle$ który jest przeliczalny!

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**”]

Psikus [dolne tw. Löwenheima–Skolema + masaż]

Można skonstruować $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle$ który jest przeliczalny!

Wciąż $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle \models 2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$

Hipoteza continuum (CH)

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC**

„Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**”]

Psikus [dolne tw. Löwenheima–Skolema + masaż]

Można skonstruować $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle$ który jest przeliczalny!

Wciąż $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle \models 2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$

bo $\mathcal{M}_0$ **nie zna** odpowiedniego włożenia!

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC** „Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?" (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**"]

Psikus [dolne tw. Löwenheima–Skolema + masaż]

Można skonstruować $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle$ który jest przeliczalny!

Wciąż $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle \models 2^{\mathbb{N}} \nleqslant \mathbb{N}$

bo $\mathcal{M}_0$ **nie zna** odpowiedniego włożenia!

Twierdzenie (Gödel [1940])

Konstruktywne uniwersum $\langle \mathbf{L}, \in \rangle$ spełnia **ZFC** oraz **CH**.

Jeśli $\mathbb{N} \leqslant A \leqslant 2^{\mathbb{N}}$ to $\mathbb{N} \cong A$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Aksjomaty: **ZFC** „Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?” (S., LX SMP, [2019])

Modele: $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$

Zadanie: **ZFC** $\models$ **CH** wtw. ilekroć $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **ZFC** to też $\langle \mathcal{M}, \in \rangle \models$ **CH**

wtw. **ZFC** $\vdash$ **CH** [„**ZFC** dowodzi **CH**”]

Psikus [dolne tw. Löwenheima–Skolema + masaż]

Można skonstruować $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle$ który jest przeliczalny!

Wciąż $\langle \mathcal{M}_0, \in \rangle \models 2^{\mathbb{N}} \not\leqslant \mathbb{N}$

bo $\mathcal{M}_0$ **nie zna** odpowiedniego włożenia!

Twierdzenie (Gödel [1940])

Konstruktywne uniwersum $\langle \mathbf{L}, \in \rangle$ spełnia **ZFC** oraz **CH**.

Twierdzenie (Cohen [1963]) [forcing(!)]

Można stworzyć model $\langle \mathcal{M}, \in \rangle$ spełniający **ZFC** oraz $\neg$**CH**.

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \left\{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\right\}$$

Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\Big\}$$

$$2^{<\mathbb{N}} = \Big\{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \ldots\Big\}$$

Zbiór Cantora

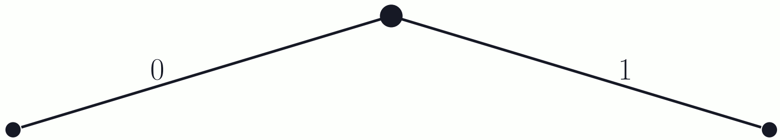
$$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\Big\}$$

$$2^{<\mathbb{N}} = \Big\{(\ ),(0),(1),(00),(01),(10),(11),\ldots\Big\}$$

Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \Big\{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\Big\}$$

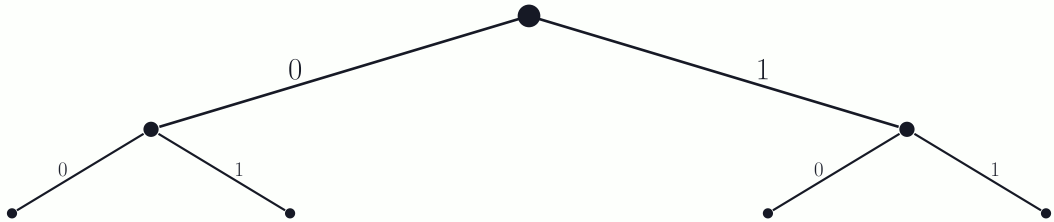
$$2^{<\mathbb{N}} = \Big\{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \dots\Big\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \big\{\alpha = (\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\big\}$$

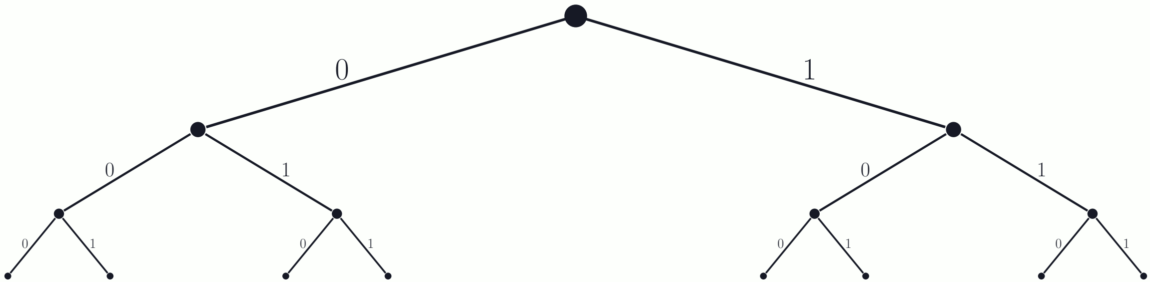
$$2^{<\mathbb{N}} = \big\{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \ldots\big\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\}$$

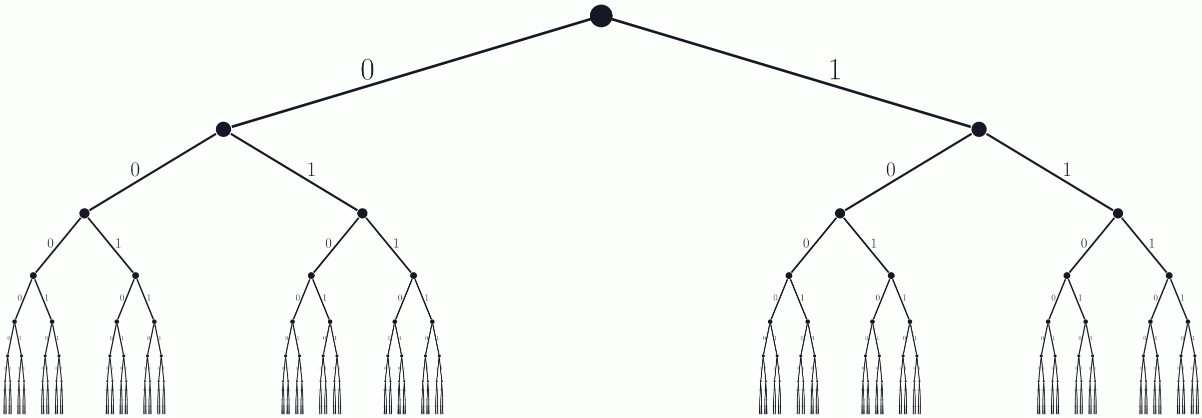
$$2^{<\mathbb{N}} = \{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \ldots\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\}$$

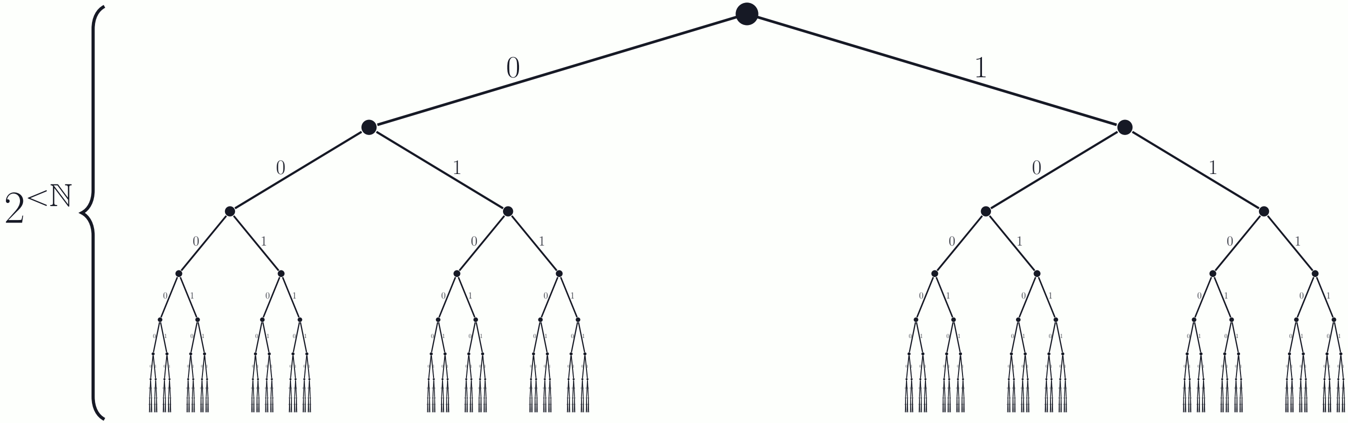
$$2^{<\mathbb{N}} = \{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \ldots\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \left\{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\right\}$$

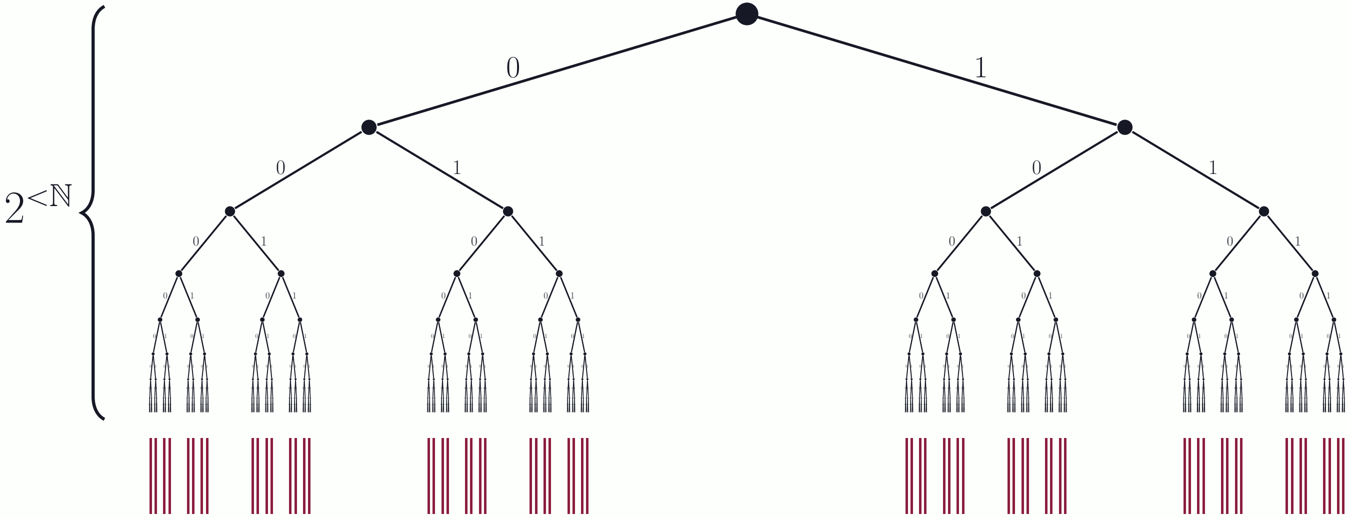
$$2^{<\mathbb{N}} = \left\{(\,),(0),(1),(00),(01),(10),(11),\dots\right\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \left\{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\right\}$$

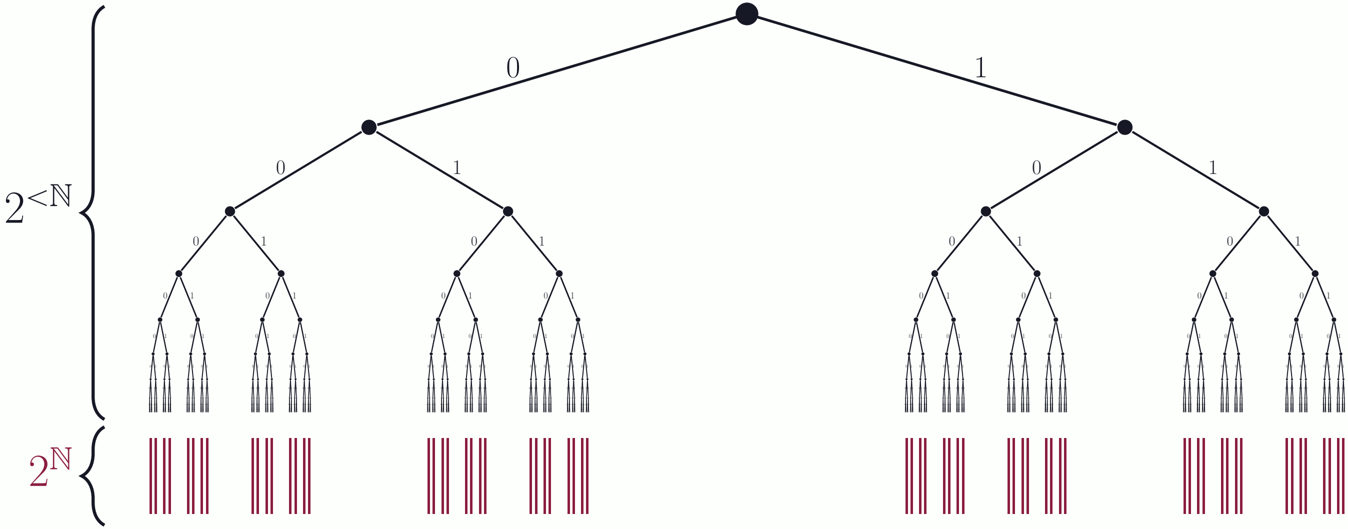
$$2^{<\mathbb{N}} = \left\{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \ldots\right\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\}$$

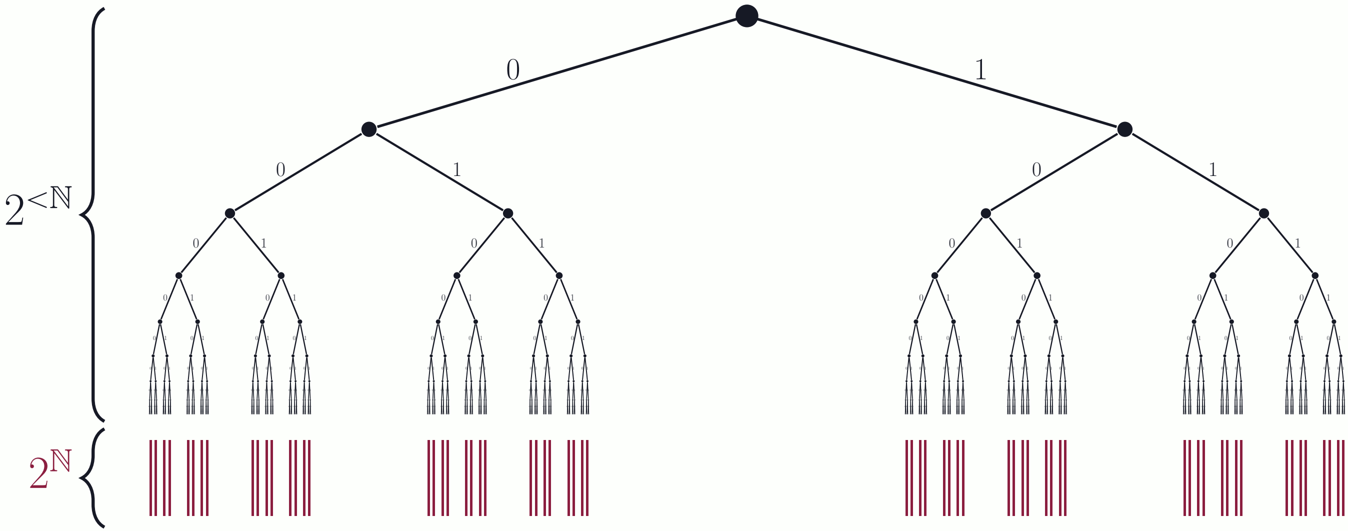
$$2^{<\mathbb{N}} = \{(\,),(0),(1),(00),(01),(10),(11),\ldots\}$$



Zbiór Cantora

$$2^{\mathbb{N}} = \{\alpha{=}(\alpha_0\alpha_1\cdots) \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha_n \in \{0,1\}\}$$

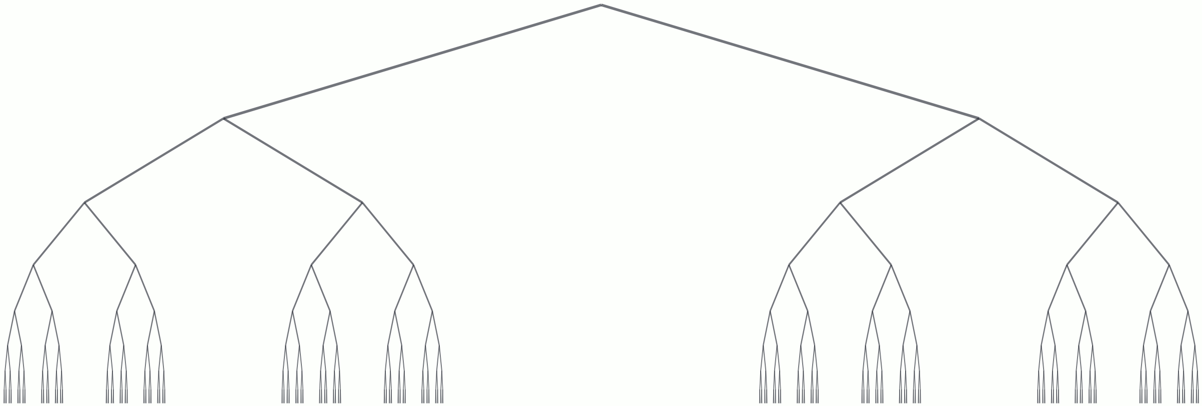
$$2^{<\mathbb{N}} = \{(\,), (0), (1), (00), (01), (10), (11), \ldots\}$$



A jak wygląda podzbiór $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$?

Drzewa

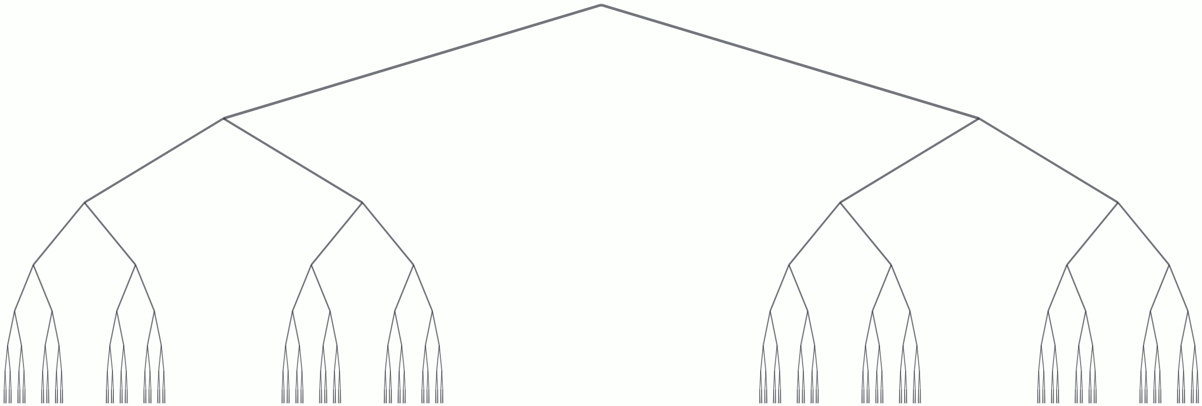
Drzewa



Drzewa

Porządek prefiksowy

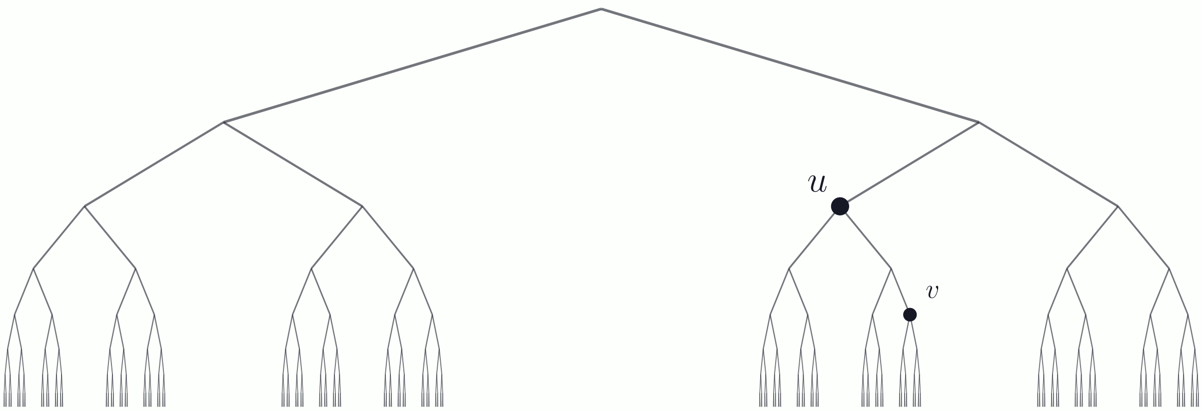
$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$



Drzewa

Porządek prefiksowy

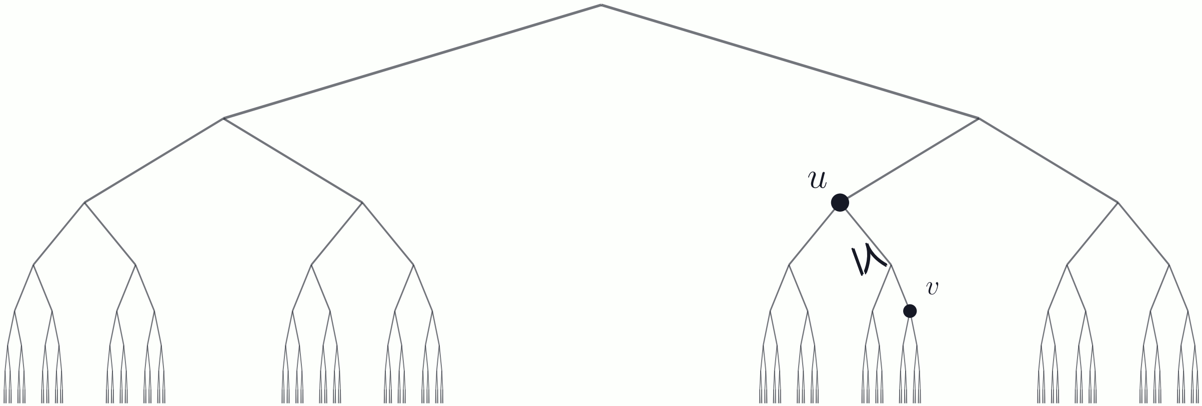
$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$



Drzewa

Porządek prefiksowy

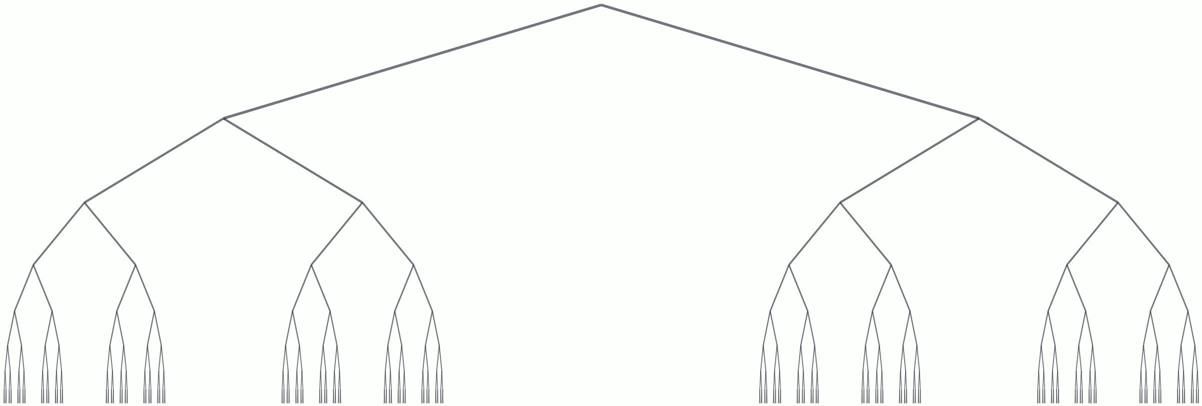
$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$



Drzewa

Porządek prefiksowy

$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$



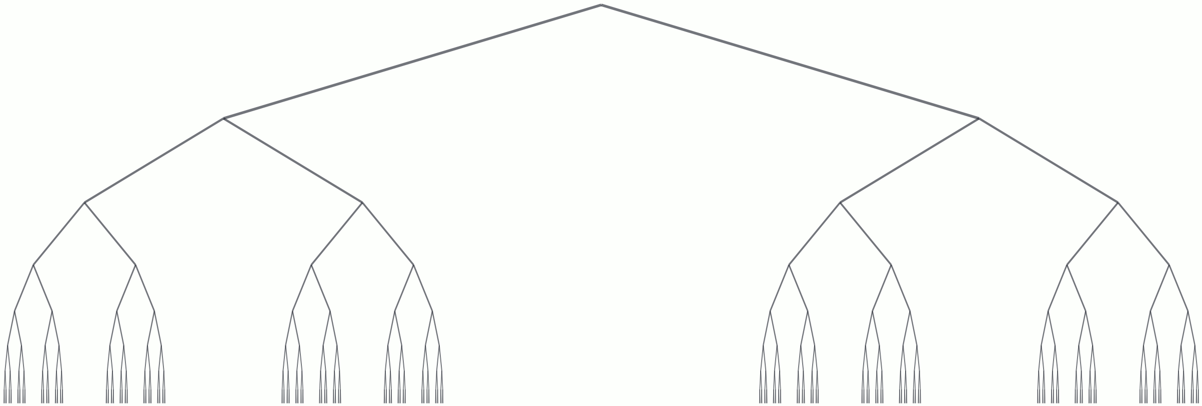
Drzewa

Porządek prefiksowy

$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$

Drzewo

$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ takie, że jeśli $u \preceq v \in T$ to $u \in T$



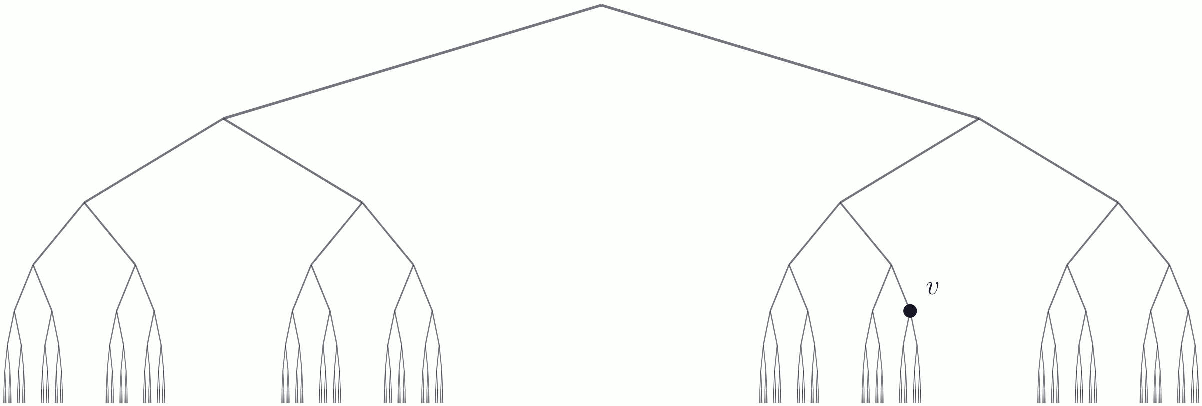
Drzewa

Porządek prefiksowy

$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$

Drzewo

$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ takie, że jeśli $u \preceq v \in T$ to $u \in T$



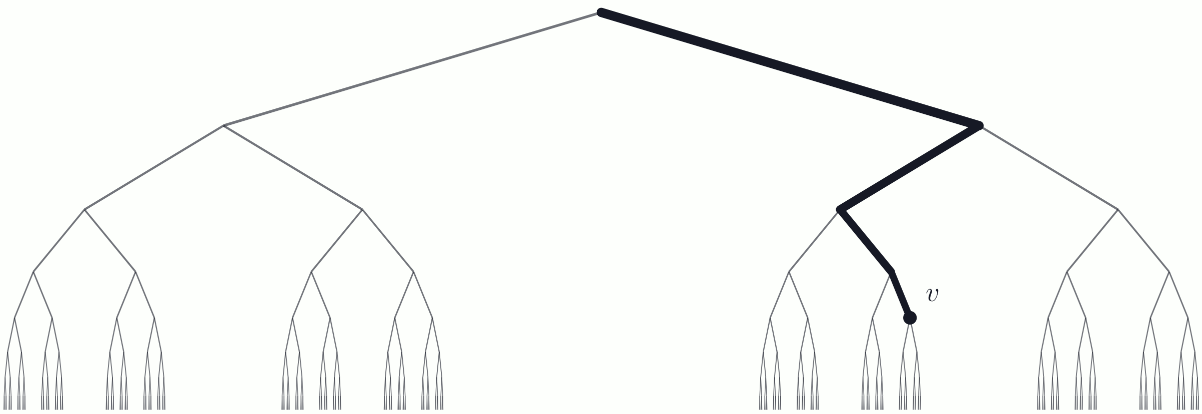
Drzewa

Porządek prefiksowy

$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$

Drzewo

$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ takie, że jeśli $u \preceq v \in T$ to $u \in T$



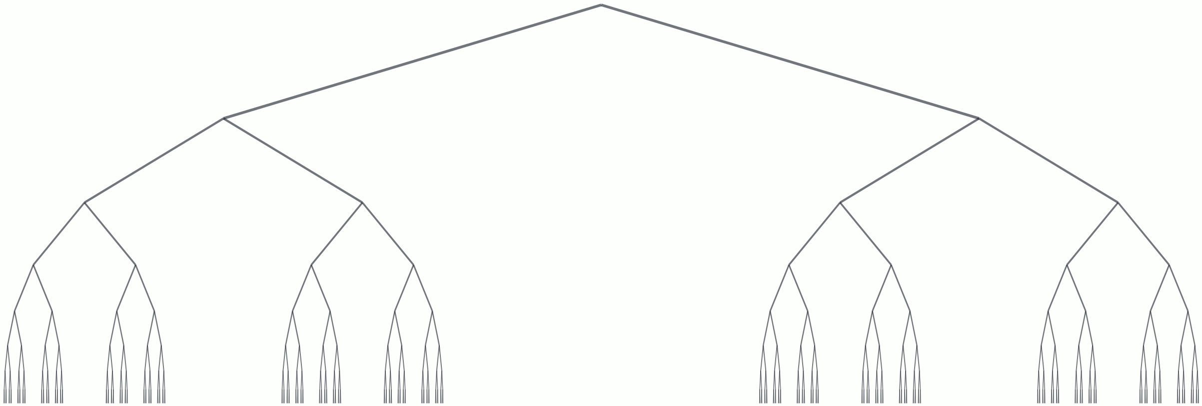
Drzewa

Porządek prefiksowy

$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$

Drzewo

$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ takie, że jeśli $u \preceq v \in T$ to $u \in T$



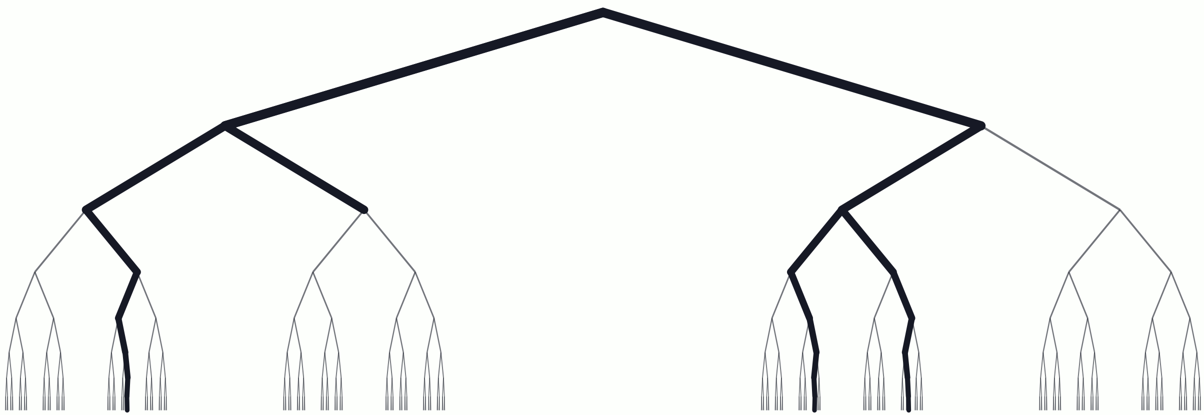
Drzewa

Porządek prefiksowy

$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$

Drzewo

$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ takie, że jeśli $u \preceq v \in T$ to $u \in T$



Drzewa

Porządek prefiksowy

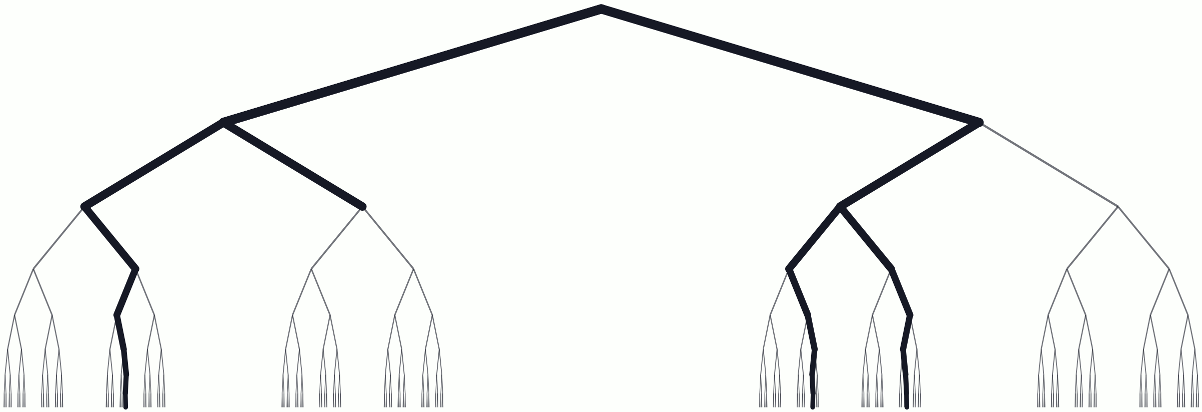
$u \preceq v$ na przykład $(10) \preceq (1011)$

Drzewo

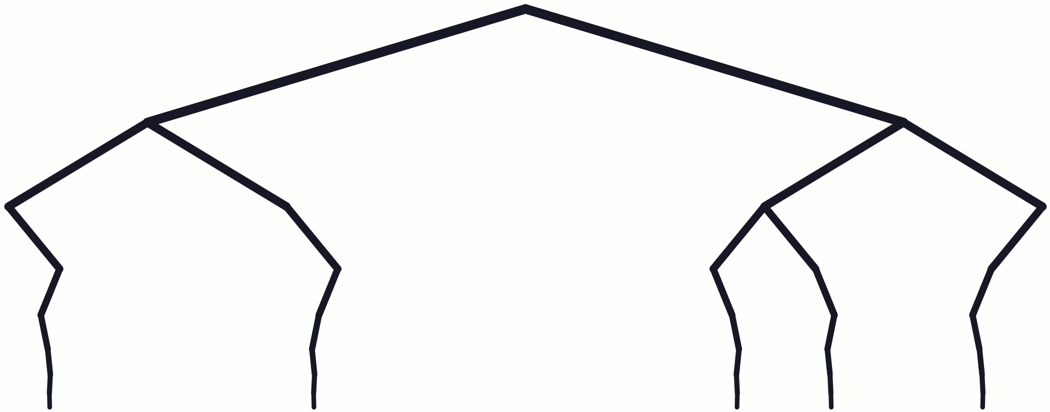
$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ takie, że jeśli $u \preceq v \in T$ to $u \in T$

Gałęzie (nieskończone)

$$[T] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \alpha\restriction_n \in T\right\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

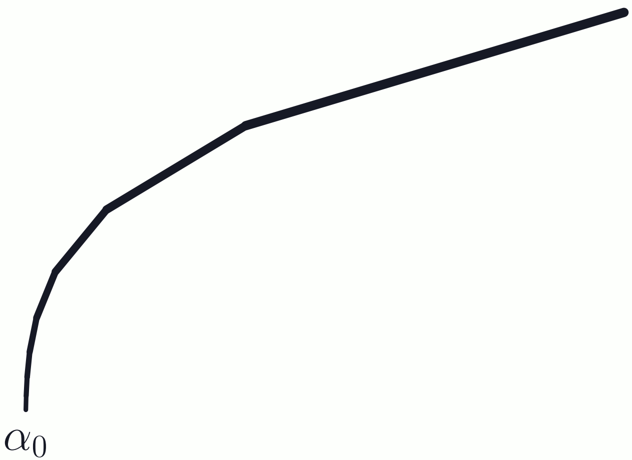
Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

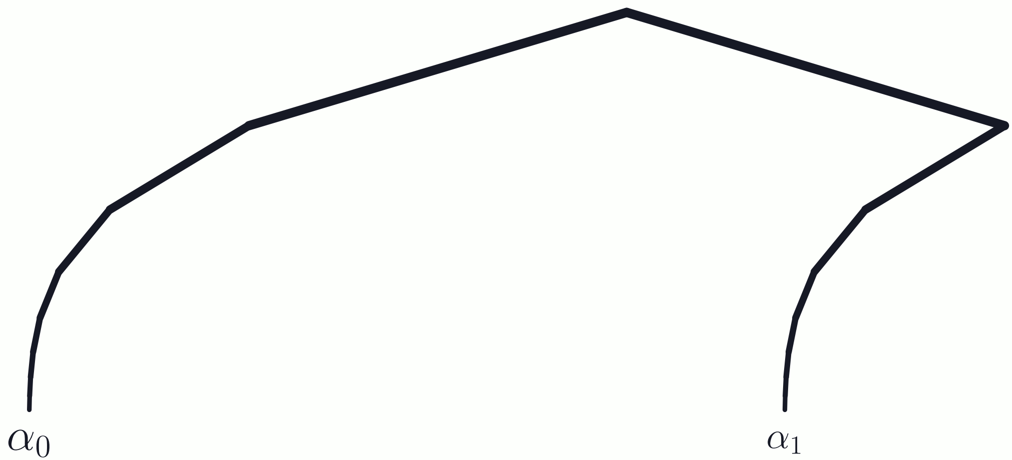
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

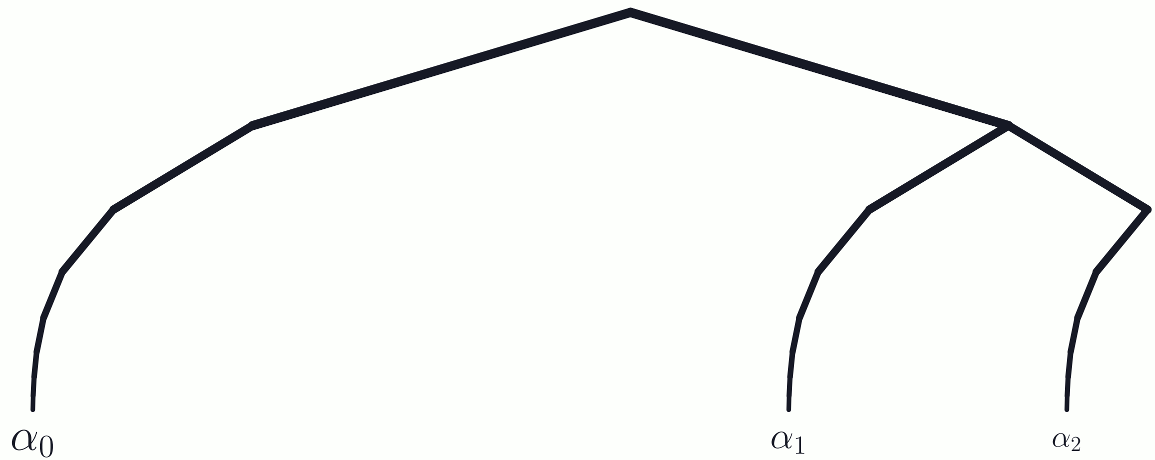
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

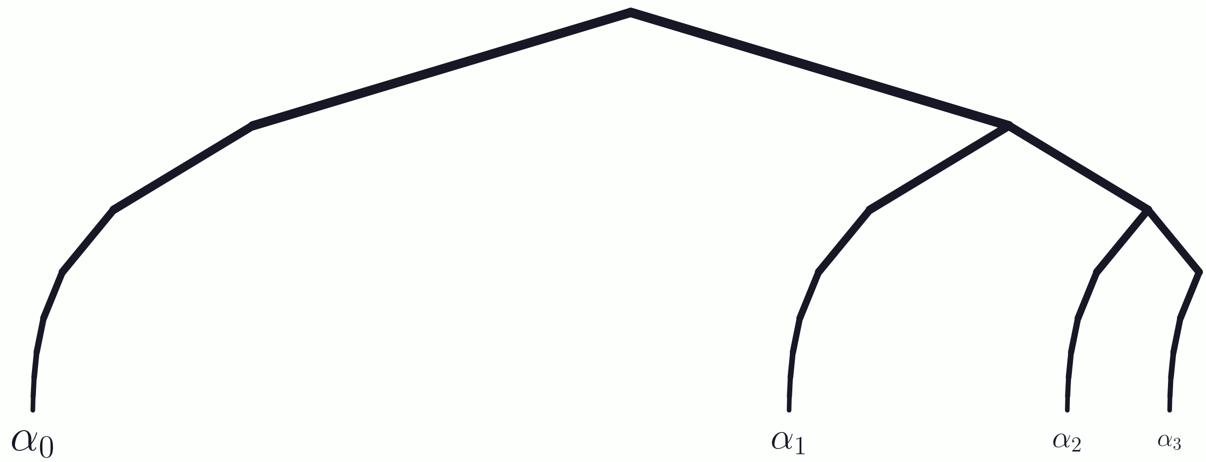
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

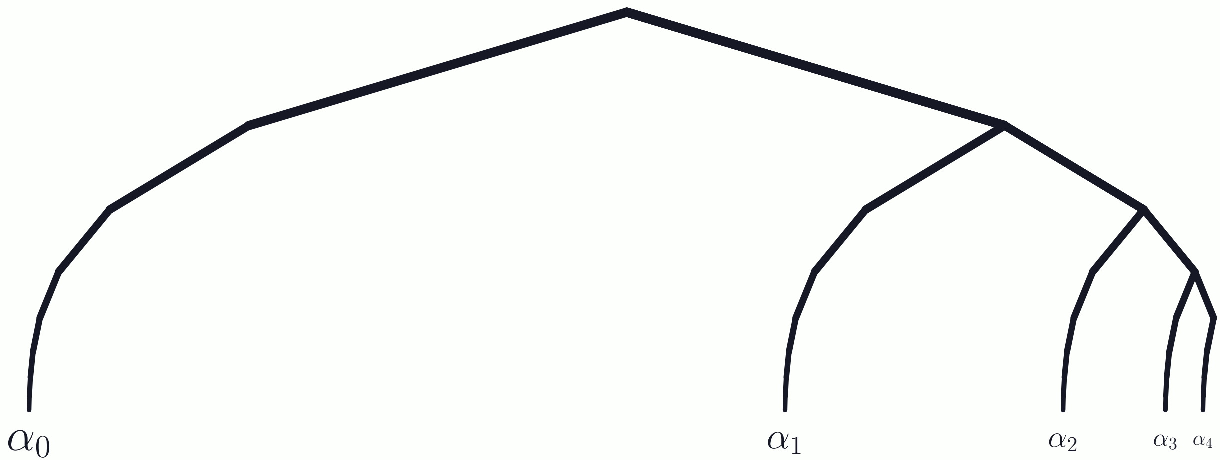
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

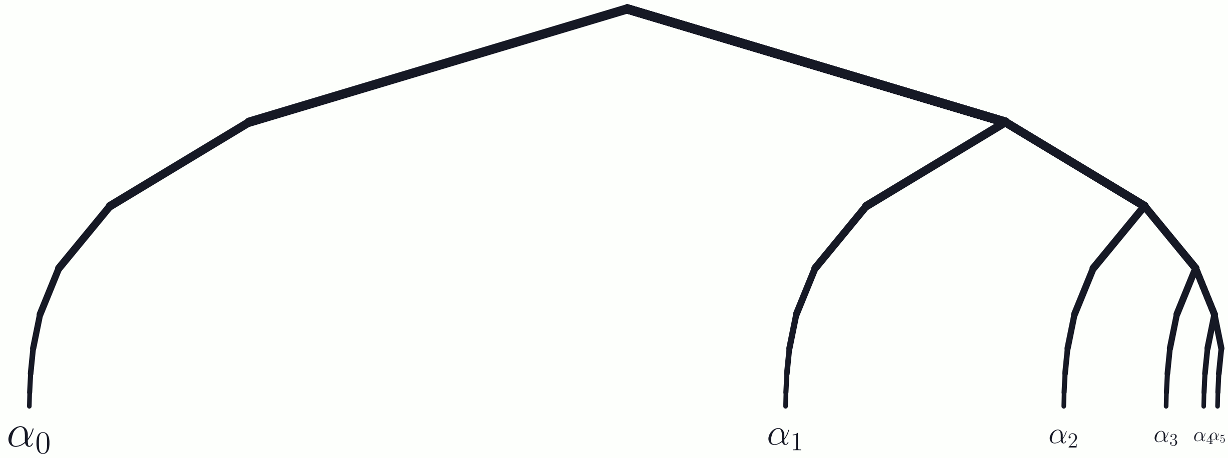
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

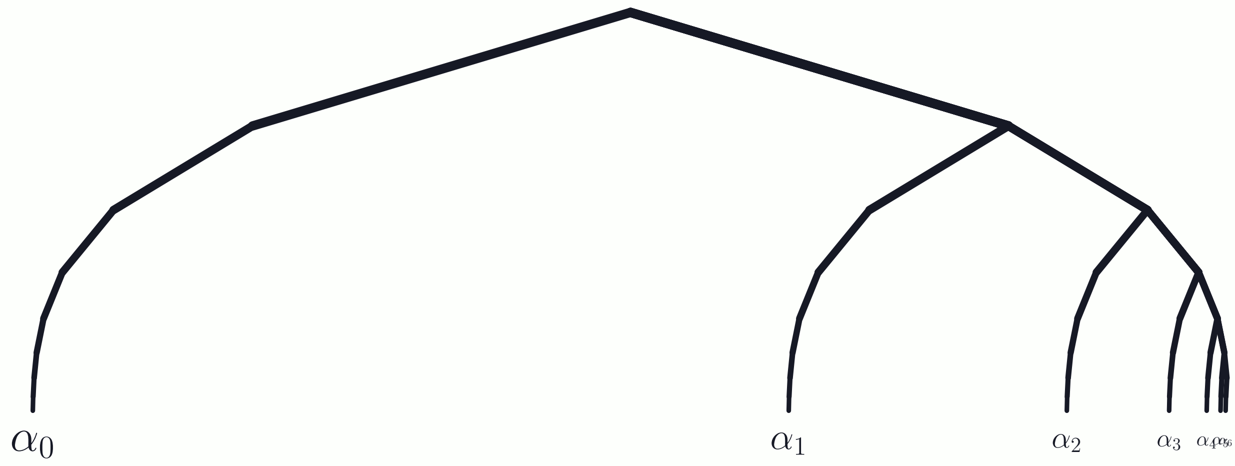
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

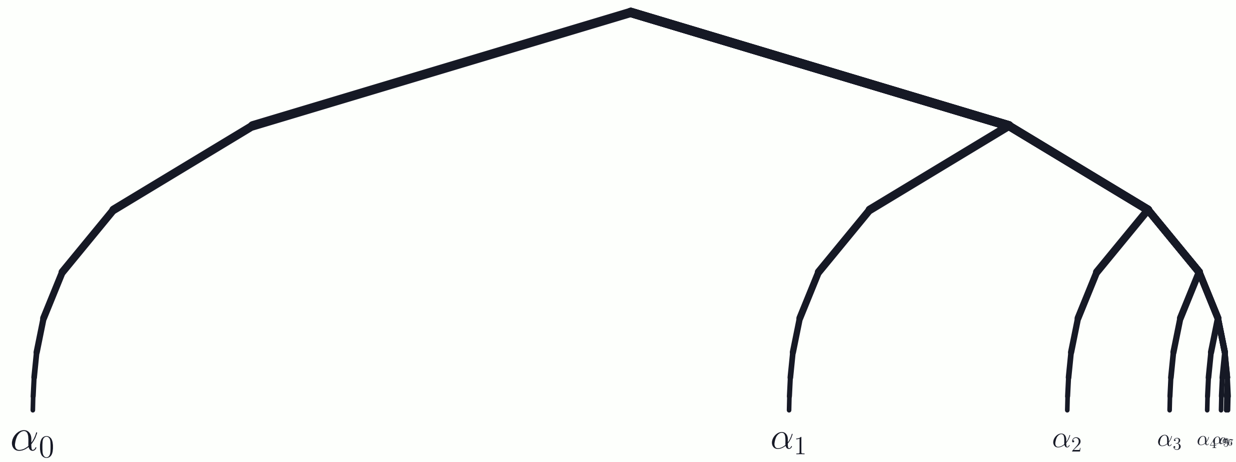
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

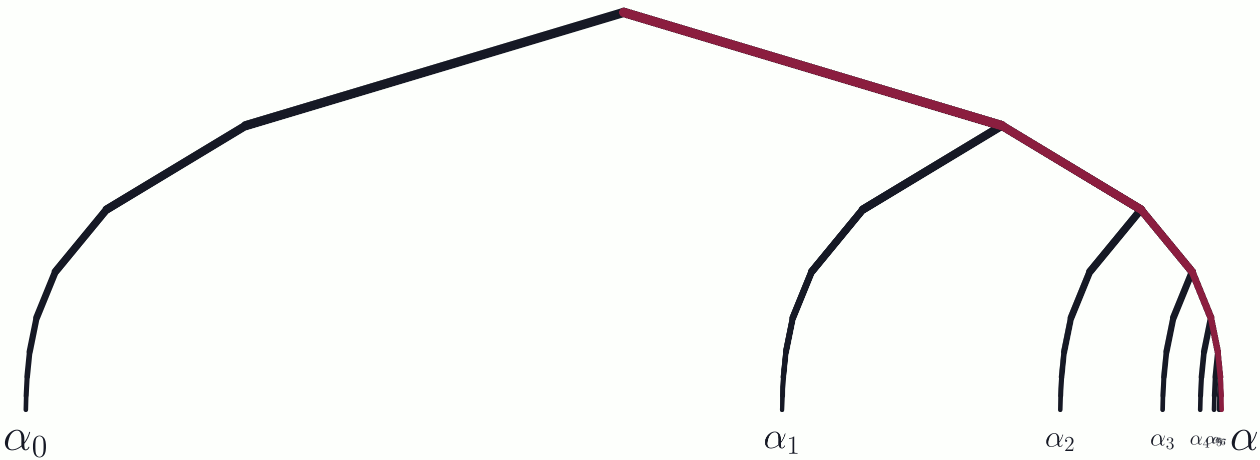
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$



Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Dowód

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Dowód

Weźmy $$T \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \alpha{\upharpoonright}_n \mid \alpha \in A,\ n \in \mathbb{N} \}$$

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Dowód

Weźmy $$T \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \alpha\restriction_n \ \mid\ \alpha \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Wtedy $A \subseteq [T]$

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Dowód

Weźmy $$T \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \alpha\restriction_n \mid \alpha \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Wtedy $A \subseteq [T]$

Oraz $[T] \subseteq \mathrm{cl}(A)$ — „domknięcie A”

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Dowód

Weźmy $$T \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \alpha{\restriction}_n \mid \alpha \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Wtedy $A \subseteq [T]$

Oraz $[T] \subseteq \mathrm{cl}(A)$ — „domknięcie A"

Więc $[T] = \mathrm{cl}(A)$

Które zbiory $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ są postaci $[T]$?

Tylko **domknięte**: jeśli $A = [T]$ to

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$

Wszystkie **domknięte**: jeśli $\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in A,\ \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A\right)$

to $A = [T]$ dla pewnego T

Dowód

Weźmy $$T \overset{\text{def}}{=} \{\, \alpha{\restriction_n} \ \mid\ \alpha \in A,\ n \in \mathbb{N} \}$$

Wtedy $A \subseteq [T]$

Oraz $[T] \subseteq \mathrm{cl}(A)$ — „domknięcie A"

Więc $[T] = \mathrm{cl}(A) = A$ (gdy A jest domknięty). ∎

Zbiory gęste...

Zbiory gęste...

Rozważmy $A_{\text{fin}} = \left\{ \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \alpha_n{=}1 \text{ tylko dla skończenie wielu } n \right\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

Zbiory gęste...

Rozważmy $A_{\text{fin}} = \left\{ \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \alpha_n{=}1 \text{ tylko dla skończenie wielu } n \right\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ A_{fin} to rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$

Zbiory gęste...

Rozważmy $A_{\text{fin}} = \left\{ \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \alpha_n{=}1 \text{ tylko dla skończenie wielu } n \right\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ A_{fin} to rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$

Weźmy $T_{\text{fin}} = \{ \alpha\!\upharpoonright_n \mid \alpha \in A_{\text{fin}},\ n \in \mathbb{N}\}$

Zbiory gęste...

Rozważmy $A_{\text{fin}} = \{\ \alpha \in 2^{\mathbb{N}}\ \mid\ \alpha_n{=}1$ tylko dla skończenie wielu $n\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ A_{fin} to rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$

Weźmy $T_{\text{fin}} = \{\ \alpha{\restriction}_n\ \mid\ \alpha \in A_{\text{fin}},\ n \in \mathbb{N}\}$

Wtedy $T_{\text{fin}} = 2^{<\mathbb{N}}$ (!)

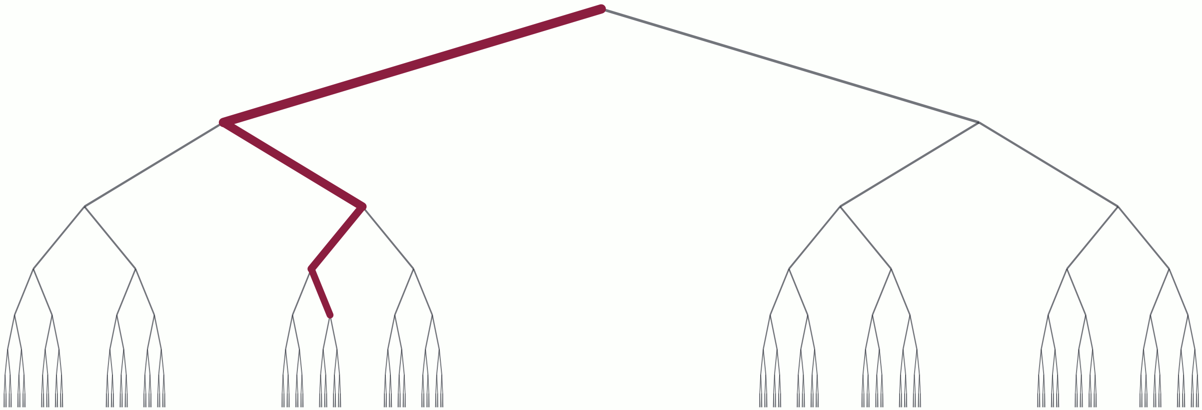
Zbiory gęste...

Rozważmy $A_{\text{fin}} = \{\, \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \;\mid\; \alpha_n{=}1$ tylko dla skończenie wielu $n\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ A_{fin} to rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$

Weźmy $T_{\text{fin}} = \{\, \alpha{\restriction}_n \;\mid\; \alpha \in A_{\text{fin}},\; n \in \mathbb{N}\}$

Wtedy $T_{\text{fin}} = 2^{<\mathbb{N}}$ (!)



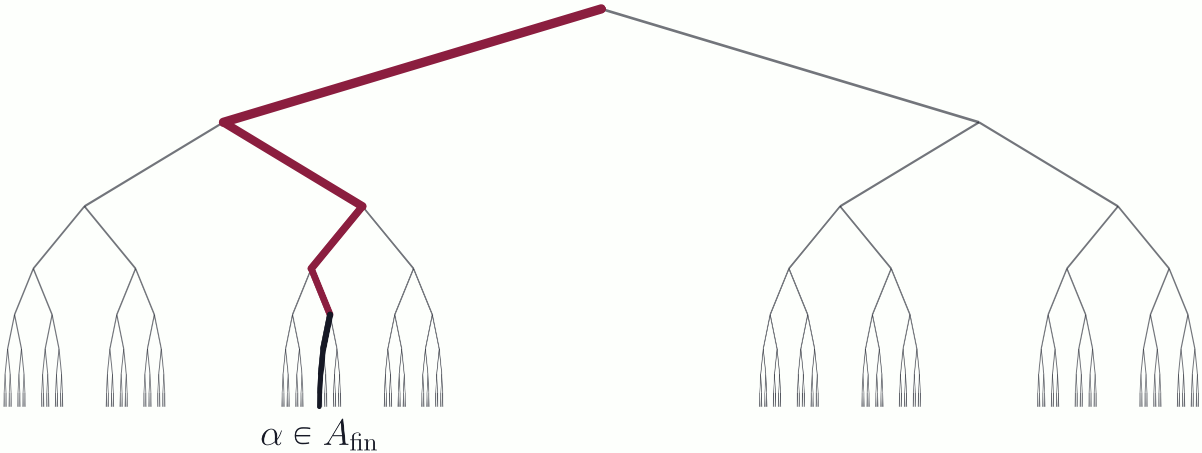
Zbiory gęste...

Rozważmy $A_{\mathrm{fin}} = \{\, \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \;\mid\; \alpha_n{=}1$ tylko dla skończenie wielu $n\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ A_{fin} to rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$

Weźmy $T_{\mathrm{fin}} = \{\, \alpha\!\restriction_n \;\mid\; \alpha \in A_{\mathrm{fin}},\; n \in \mathbb{N}\}$

Wtedy $T_{\mathrm{fin}} = 2^{<\mathbb{N}}$ (!)



Zbiory gęste. . .

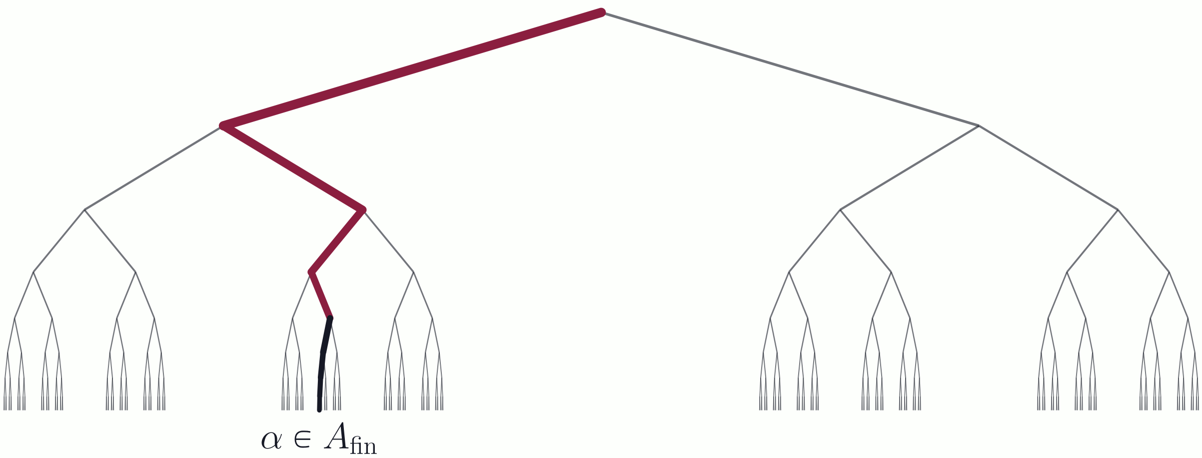
Rozważmy $A_{\text{fin}} = \{\, \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid \alpha_n{=}1 \text{ tylko dla skończenie wielu } n\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ A_{fin} to rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$

Weźmy $T_{\text{fin}} = \{\, \alpha{\restriction}_n \mid \alpha \in A_{\text{fin}},\ n \in \mathbb{N}\}$

Wtedy $T_{\text{fin}} = 2^{<\mathbb{N}}$ (!)

Więc $[T_{\text{fin}}] = 2^{\mathbb{N}} \neq A_{\text{fin}}$



Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\restriction}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo

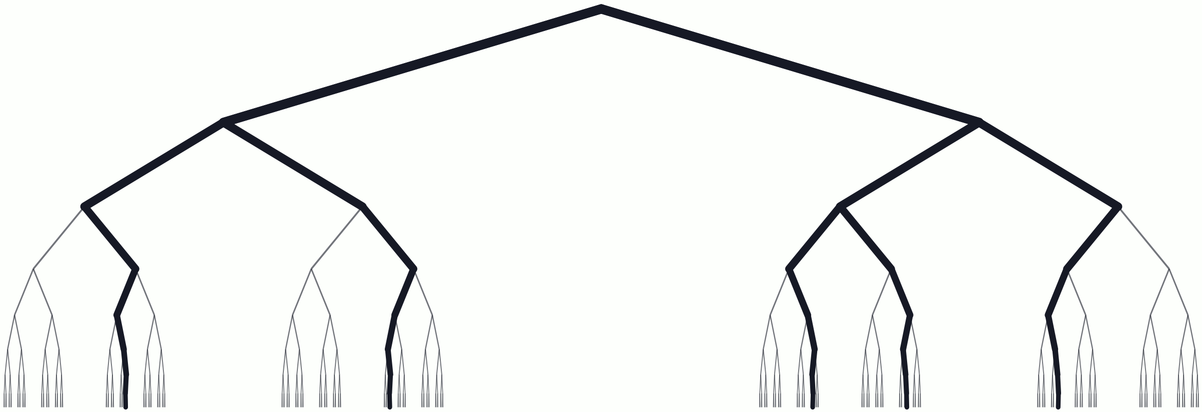
Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\restriction}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo



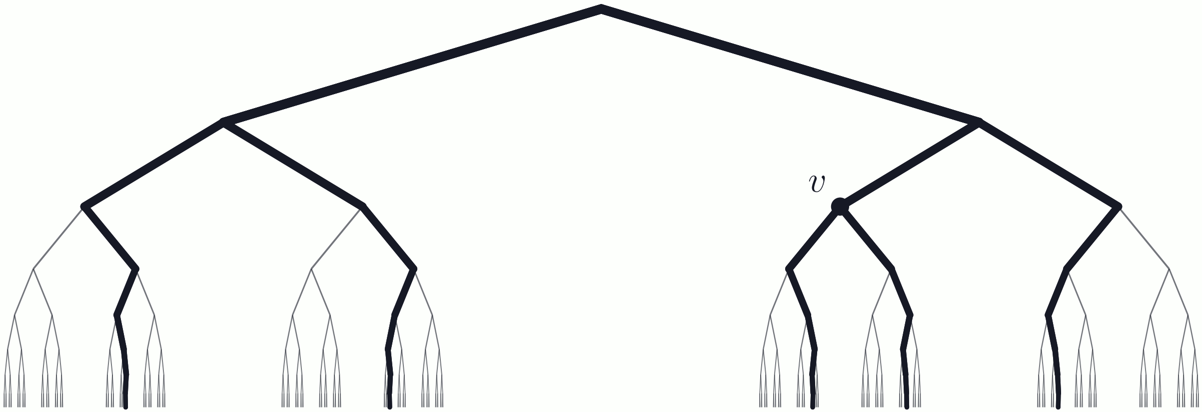
Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T\restriction_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo



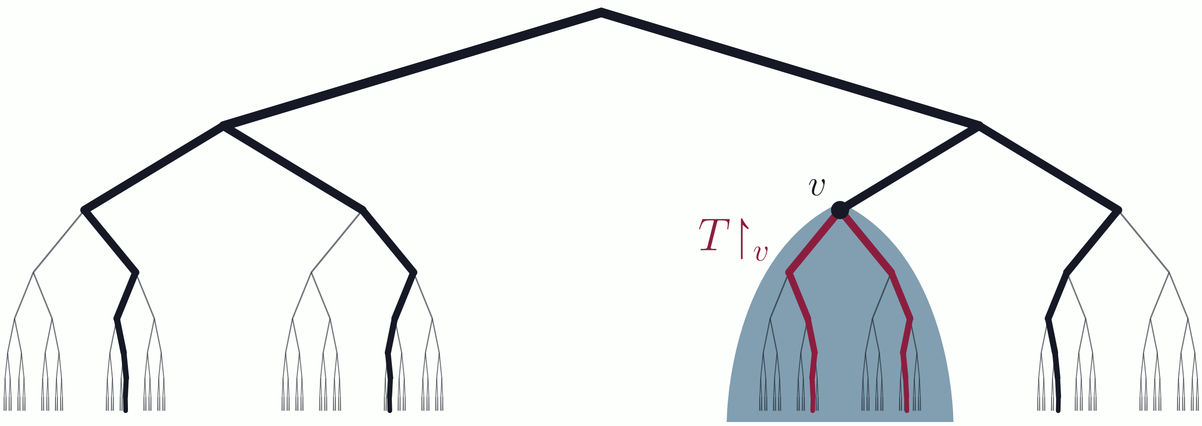
Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\upharpoonright}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo



Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T\restriction_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T\restriction_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $T' \stackrel{\text{def}}{=} \big\{v \in T \;\big|\; [T\restriction_v] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\big\}$

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T\!\upharpoonright_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $$T' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in T \;\middle|\; \left[T\!\upharpoonright_v\right] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\right\}$$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\restriction}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $$T' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in T \;\middle|\; \left[T{\restriction}_v\right] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\right\}$$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem
- Przypadki:

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\restriction}_v \overset{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $$T' \overset{\text{def}}{=} \left\{v \in T \;\middle|\; \left[T{\restriction}_v\right] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\right\}$$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem
- Przypadki:
  1. Jeśli $T' = \varnothing$ to $(\,) \notin T'$.

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\restriction}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $$T' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in T \;\middle|\; [T{\restriction}_v] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\right\}$$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem
- Przypadki:
  1. Jeśli $T' = \varnothing$ to $(\,) \notin T'$.

     Ale $T = T{\restriction}_{(\,)}$ więc $[T]$ jest **przeliczalny**.

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T\!\upharpoonright_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $T' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in T \;\middle|\; [T\!\upharpoonright_v] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\right\}$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem
- Przypadki:
  1. Jeśli $T' = \varnothing$ to $(\,) \notin T'$.

     Ale $T = T\!\upharpoonright_{(\,)}$ więc $[T]$ jest **przeliczalny**.
  2. Załóżmy, że $T' \neq \varnothing$ i $(\,) \in T'$.

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\upharpoonright_v} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $$T' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in T \;\middle|\; [T{\upharpoonright_v}] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\right\}$$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem
- Przypadki:
  1. Jeśli $T' = \varnothing$ to $(\,) \notin T'$.
  Ale $T = T{\upharpoonright_{(\,)}}$ więc $[T]$ jest **przeliczalny**.
  2. Załóżmy, że $T' \neq \varnothing$ i $(\,) \in T'$.
  Czyli $[T]$ jest **nieprzeliczalny**

Hipoteza Continuum dla zbiorów domkniętych

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Dowód

- $A = [T]$ dla pewnego $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$
- Dla $v \in 2^{<\mathbb{N}}$ niech $T{\restriction}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid v \cdot u \in T\} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ to poddrzewo
- Niech $T' \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in T \mid [T{\restriction}_v] \text{ jest } \textbf{nieprzeliczalny}\}$
- $T' \subseteq T$ oraz T' jest drzewem
- Przypadki:
  1. Jeśli $T' = \varnothing$ to $() \notin T'$.
  Ale $T = T{\restriction}_{()}$ więc $[T]$ jest **przeliczalny**.
  2. Załóżmy, że $T' \neq \varnothing$ i $() \in T'$.
  Czyli $[T]$ jest **nieprzeliczalny** $\rightsquigarrow$ trzeba wykazać, że $[T] \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Lemat

Lemat

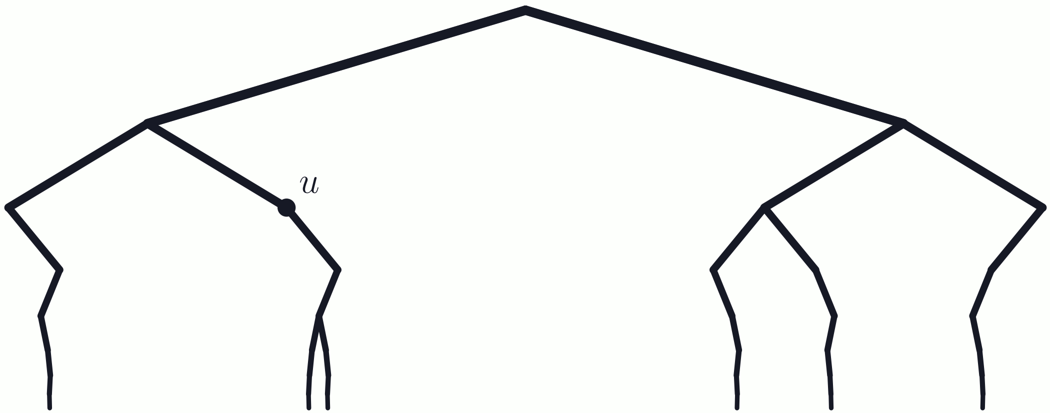
Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że:

Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

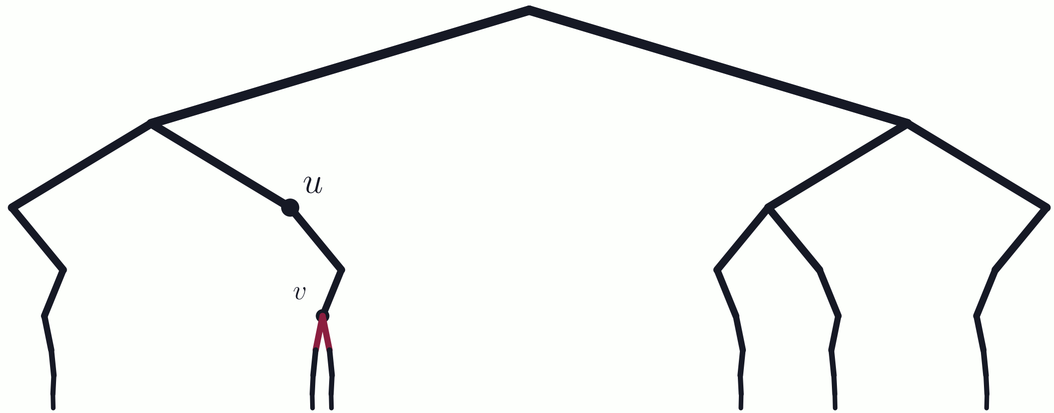
Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

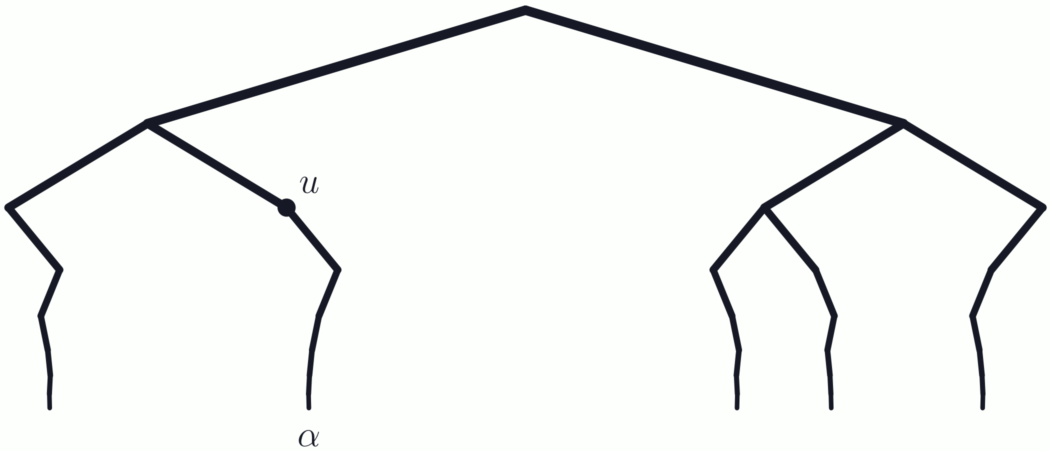
Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.

Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.

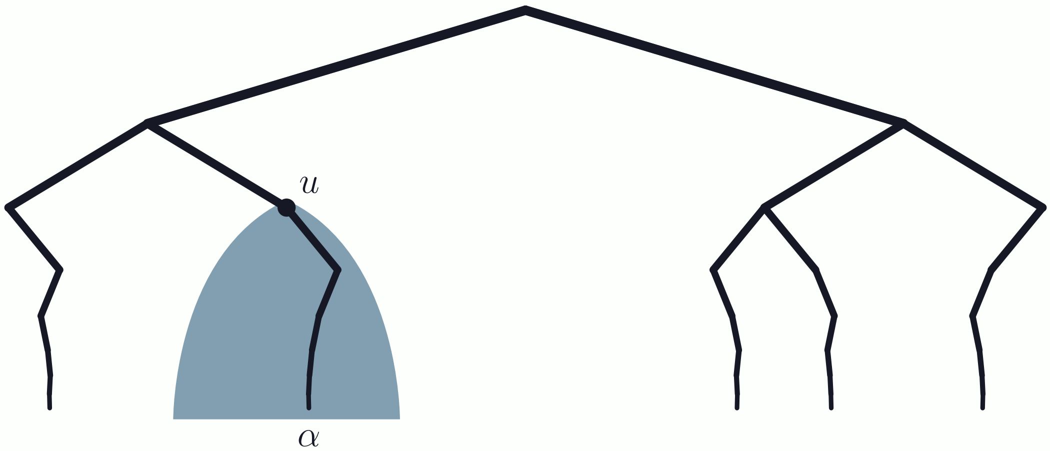


Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.



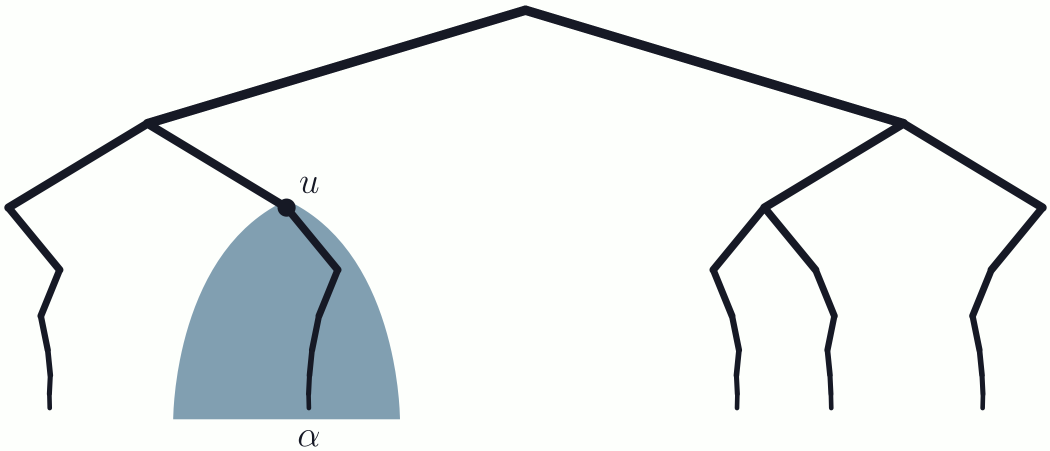
Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.

Wtedy $[T{\upharpoonright}_u]$ jest **nieprzeliczalny**.



Lemat

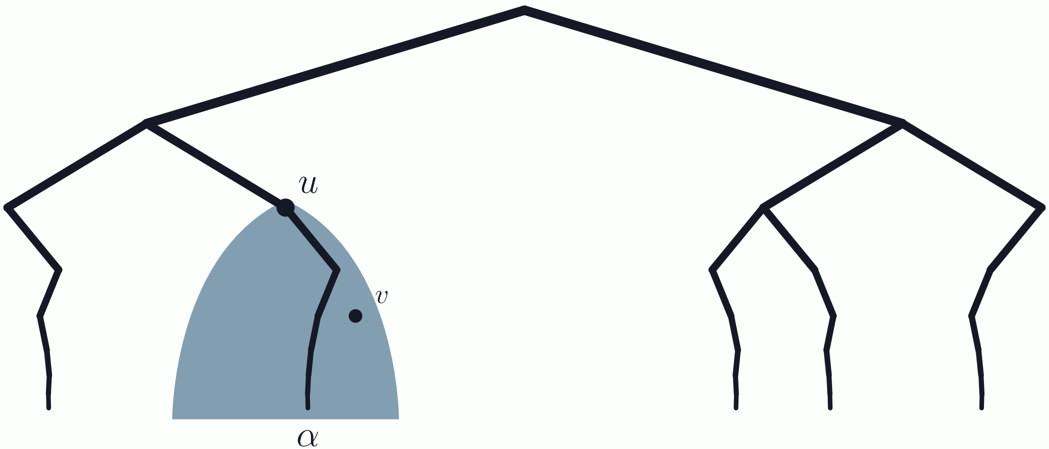
Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.

Wtedy $[T{\restriction}_u]$ jest **nieprzeliczalny**.

Ale dla dowolnego $v \succ u$ *poza* α zbiór $[T{\restriction}_v]$ jest przeliczalny.



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

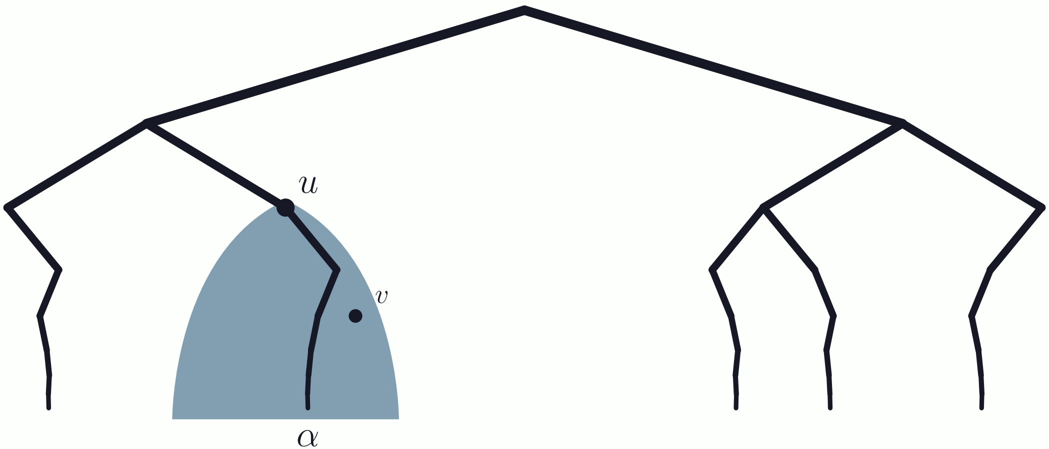
Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.

Wtedy $[T{\restriction}_u]$ jest **nieprzeliczalny**.

Ale dla dowolnego $v > u$ *poza* α zbiór $[T{\restriction}_v]$ jest przeliczalny.

Sprzeczność bo

$$u \cdot [T{\restriction}_u] = \{\alpha\} \cup \bigcup_{v>u, v \not< \alpha} v \cdot [T{\restriction}_v]$$



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Dowód

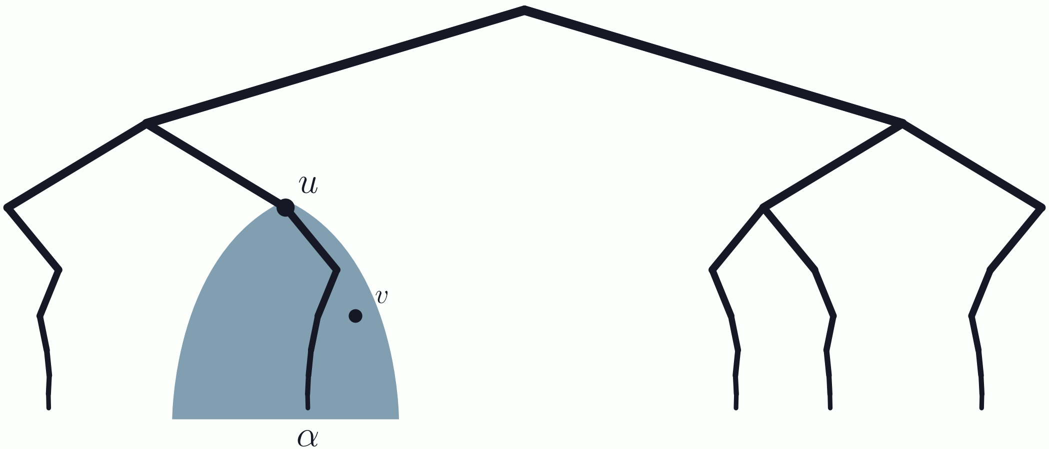
Załóżmy przeciwnie: $u \in T'$ nie ma rozgałęzienia.

Wtedy $[T{\restriction}_u]$ jest **nieprzeliczalny**.

Ale dla dowolnego $v > u$ *poza* α zbiór $[T{\restriction}_v]$ jest przeliczalny.

Sprzeczność bo

$$u \cdot [T{\restriction}_u] = \{\alpha\} \cup \bigcup_{v>u, v \not< \alpha} v \cdot [T{\restriction}_v] \qquad \blacksquare$$



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$(\,) \in T'$

Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$(\,) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$

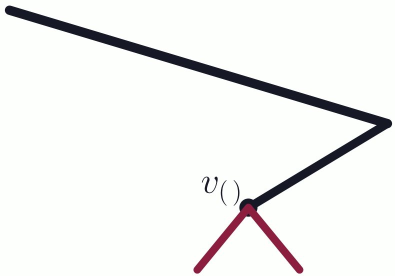
Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$(\,) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$



Lemat

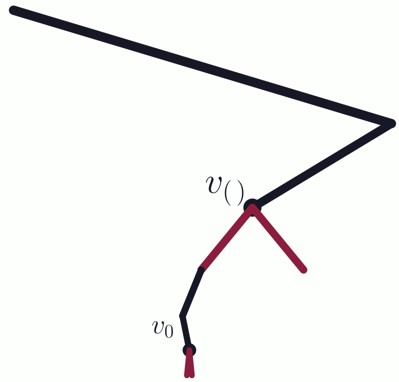
Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$( ) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{()} \succ ( )$

więc istnieją rozgałęzienia $v_0 \succ v_{()}{\cdot}0$



Lemat

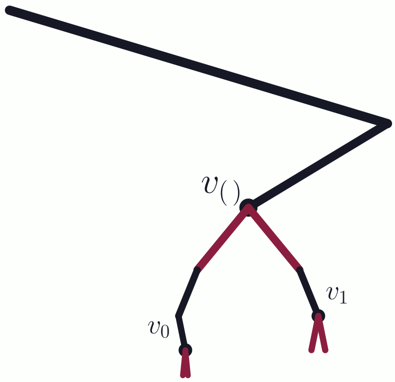
Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$(\,) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$

więc istnieją rozgałęzienia $v_0 \succ v_{(\,)}{\cdot}0$, $v_1 \succ v_{(\,)}{\cdot}1$



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \succeq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

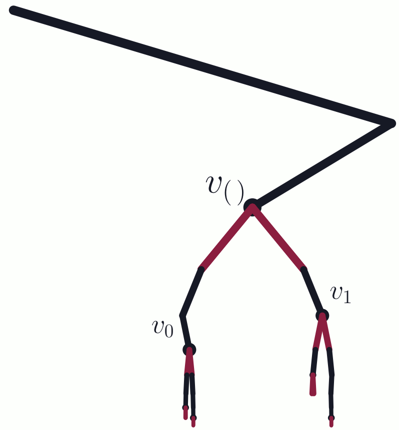
Indukcja

$(\,) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$

więc istnieją rozgałęzienia $v_0 \succ v_{(\,)}{\cdot}0$, $v_1 \succ v_{(\,)}{\cdot}1$

więc ...



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

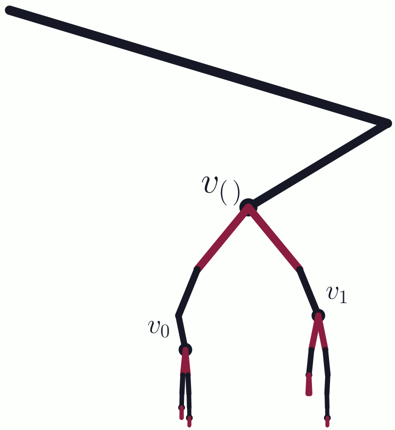
$(\,) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$

więc istnieją rozgałęzienia $v_0 \succ v_{(\,)}{\cdot}0$, $v_1 \succ v_{(\,)}{\cdot}1$

więc ...

$\rightsquigarrow$ zanurzenie $2^{<\mathbb{N}}$ w T'



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$(\,) \in T'$

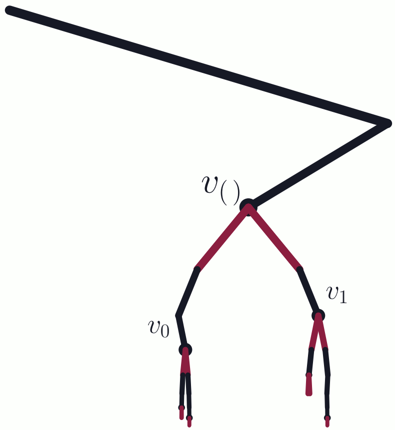
więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$

więc istnieją rozgałęzienia $v_0 \succ v_{(\,)}{\cdot}0$, $v_1 \succ v_{(\,)}{\cdot}1$

więc ...

$\rightsquigarrow$ zanurzenie $2^{<\mathbb{N}}$ w T'

$\rightsquigarrow$ $[T'] \cong 2^{\mathbb{N}}$



Lemat

Jeśli $u \in T'$ to istnieje rozgałęzienie $v \geq u$, takie że: $v{\cdot}0 \in T'$ i $v{\cdot}1 \in T'$.

Indukcja

$(\,) \in T'$

więc istnieje rozgałęzienie $v_{(\,)} \succ (\,)$

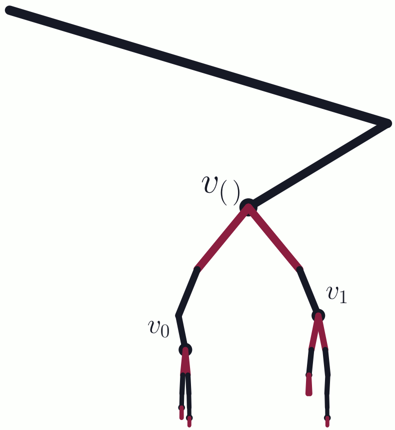
więc istnieją rozgałęzienia $v_0 \succ v_{(\,)}{\cdot}0$, $v_1 \succ v_{(\,)}{\cdot}1$

więc ...

$\rightsquigarrow$ zanurzenie $2^{<\mathbb{N}}$ w T'

$\rightsquigarrow$ $[T'] \cong 2^{\mathbb{N}}$

$\rightsquigarrow$ $[T] \cong 2^{\mathbb{N}}$



Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $A \leqslant \mathbb{N}$ lub $A \cong 2^{\mathbb{N}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

- $\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

- $\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

$\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Wnioski:

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

  $\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

  $\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Wnioski:

1. **ogólne** podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ mogą być **skomplikowane**

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

$\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Wnioski:

1. **ogólne** podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ mogą być **skomplikowane** a ich **własności** mogą zależeć od **modelu** w którym żyjemy

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

$\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Wnioski:

1. **ogólne** podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ mogą być **skomplikowane**
   a ich **własności** mogą zależeć od **modelu** w którym żyjemy
2. **definiowalne** (konstruktywne) podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ są **prostsze**

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

$\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Wnioski:

1. **ogólne** podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ mogą być **skomplikowane**

   a ich **własności** mogą zależeć od **modelu** w którym żyjemy

2. **definiowalne** (konstruktywne) podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ są **prostsze**

   a ich **własności** potrafimy badać kombinatorycznie

Twierdzenie (Cantor-Bendixson [1883])

Jeśli $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ jest domknięty, to: $\underbrace{A \leqslant \mathbb{N}}_{\textbf{gracz I}}$ lub $\underbrace{A \cong 2^{\mathbb{N}}}_{\textbf{gracz II}}$.

$\rightsquigarrow$ początki Deskryptywnej Teorii Mnogości

$\rightsquigarrow$ (Souslin): to samo dla zbiorów analitycznych (więc też borelowskich)

$\rightsquigarrow$ charakteryzacja growa

$\rightsquigarrow$ pytania o determinację (Martin)

Wnioski:

1. **ogólne** podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ mogą być **skomplikowane**

   a ich **własności** mogą zależeć od **modelu** w którym żyjemy

2. **definiowalne** (konstruktywne) podzbiory $2^{\mathbb{N}}$ są **prostsze**

   a ich **własności** potrafimy badać kombinatorycznie

   no i w tle często stoją **gry** nieskończone