Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

LX Szkoła Matematyki Poglądowej

24 sierpnia 2019, Wola Ducka

Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

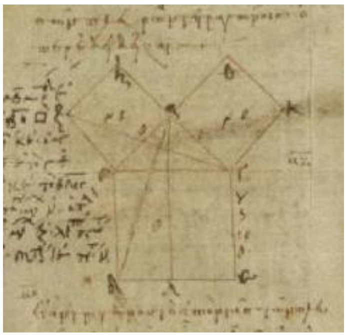
LX Szkoła Matematyki Poglądowej

24 sierpnia 2019, Wola Ducka

Model $\mathcal{M}$

Model $\mathcal{M}$

Własność W

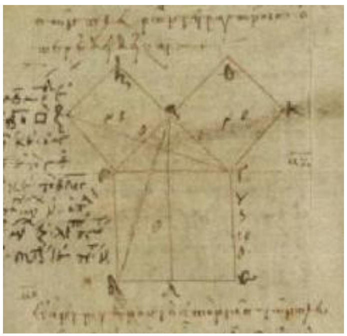


Model $\mathcal{M}$

???

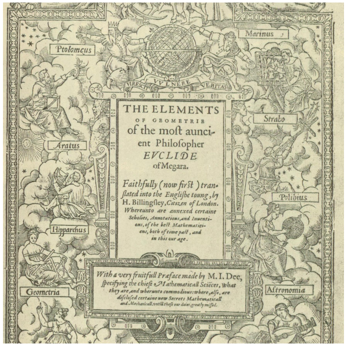
$\models$ (spełnia)

Własność W



Model $\mathcal{M}$

Teoria Γ



THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the moſt aunci-
ent Philoſopher
EVCLIDE
of Megara.

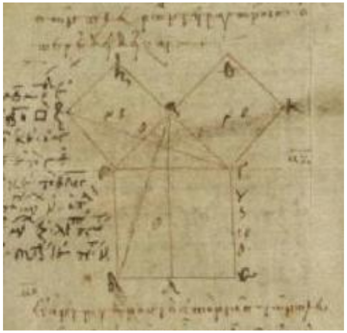
Faithfully (now firſt) tran-
ſlated into the Engliſhe toung, by
H. Billingſley, Citizen of London.
Whereunto are annexed certaine
Scholies, Annotations, and Inuenti-
ons, of the beſt Mathematici-
ens, both of time paſt, and
in this our age.

With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee,
ſpecifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what
they are, and wherunto commodious: where, alſo, are
diſcloſed certaine new Secrets Mathematicall
and Mechanicall, vntill theſe our daies, greatly miſſed.

???

$\models$ (spełnia)

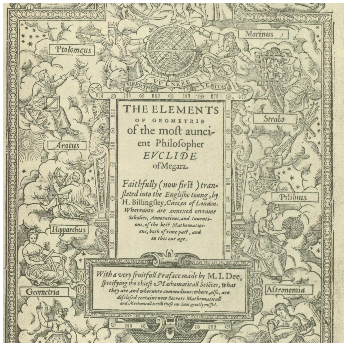
Własność W



Model $\mathcal{M}$

$\models$

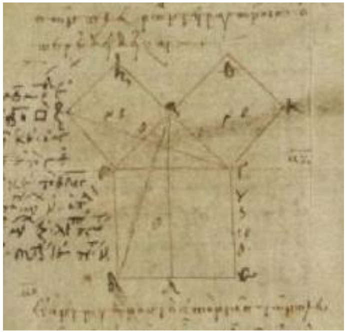
Teoria $\boldsymbol{\Gamma}$



???

⫪ (spełnia)

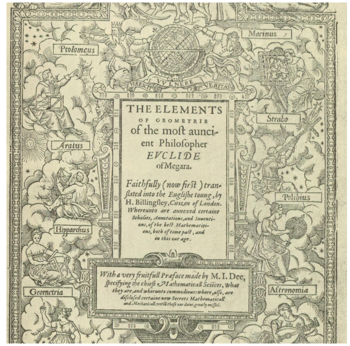
Własność W



Model $\mathcal{M}$

$\models$

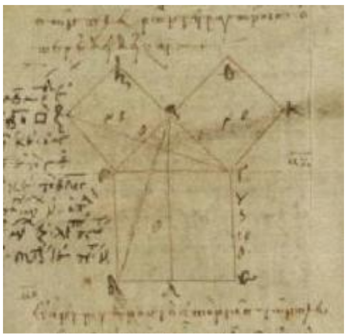
Teoria $\mathbf{\Gamma}$



???

$\models$ (spełnia)

Własność W



$\rightsquigarrow$

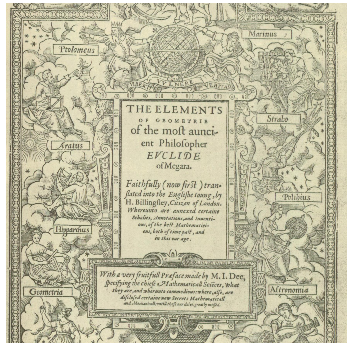
Formuła ϕ

$$\forall x.\ x>5 \wedge 2\nmid x \implies \exists p_1, p_2.\ x=p_1+p_2 \wedge \forall k, l.\ k\cdot l=p_1\cdot p_2 \Rightarrow k\in\{1, p_1, p_2, p_1\cdot p_2\}$$

Model $\mathcal{M}$

$\models$

Teoria $\boldsymbol{\Gamma}$



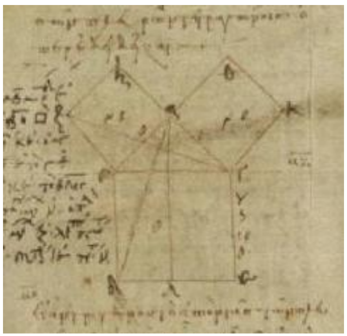
???

$\rotatebox{-90}{$\models$}$ (spełnia)

???

(dowodzi) $\top$

Własność W



$\rightsquigarrow$

Formuła ϕ

$$\forall x.\ x{>}5 \wedge 2{\nmid}x \implies \exists p_1, p_2.\ x{=}p_1{+}p_2 \wedge \forall k, l.\ k{\cdot}l{=}p_1{\cdot}p_2 \Rightarrow k{\in}\{1, p_1, p_2, p_1{\cdot}p_2\}$$

Model $\mathcal{M}$

(1) $\langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$

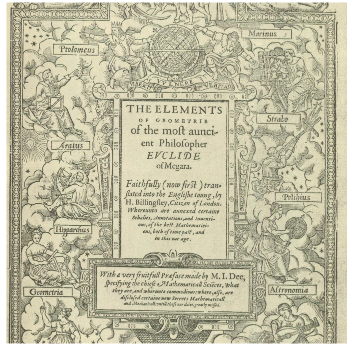
(2) $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

(3) $\langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

(4) $\langle \mathcal{V}, \text{"}\in\text{"}, \emptyset \rangle$

$\models$

Teoria Γ



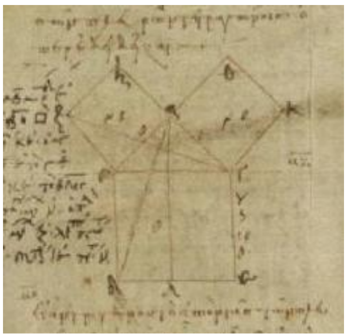
???

Π (spełnia)

???

(dowodzi) $\top$

Własność W



$\rightsquigarrow$

Formuła ϕ

$$\forall x.\ x>5 \wedge 2\nmid x \implies$$
$$\exists p_1, p_2.\ x=p_1+p_2 \ \wedge$$
$$\forall k, l.\ k\cdot l=p_1\cdot p_2 \Rightarrow$$
$$k\in\{1, p_1, p_2, p_1\cdot p_2\}$$

Model $\mathcal{M}$

(1) $\langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$

(2) $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

(3) $\langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

(4) $\langle \mathcal{V}, \text{"}\in\text{"}, \emptyset \rangle$

$\models$

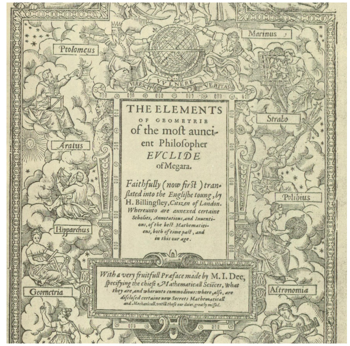
Teoria $\boldsymbol{\Gamma}$

$\boldsymbol{\Gamma}_{\text{Euclid}}$ (1)

$\textbf{PA} = \boldsymbol{\Gamma}_{\text{Peano}}$ (2)

$\boldsymbol{\Gamma}_{\text{RCF}}$ (3)

ZFC (4)



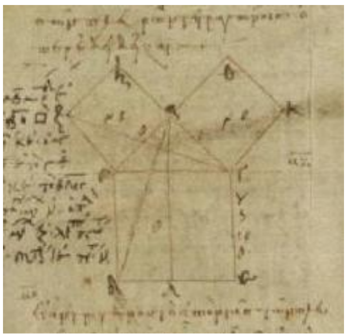
???

$\models$ (spełnia)

???

(dowodzi) $\vdash$

Własność W



$\rightsquigarrow$

Formuła ϕ

$\forall x.\ x{>}5 \wedge 2{\nmid}x \implies$

$\exists p_1, p_2.\ x{=}p_1{+}p_2 \wedge$

$\forall k, l.\ k{\cdot}l{=}p_1{\cdot}p_2 \Rightarrow$

$k{\in}\{1, p_1, p_2, p_1{\cdot}p_2\}$

Model $\mathcal{M}$

(1) $\langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$

(2) $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

(3) $\langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

(4) $\langle \mathcal{V}, \text{"}\in\text{"}, \emptyset \rangle$

$\models$

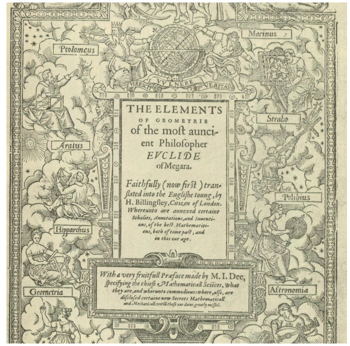
Teoria Γ

Γ_{Euclid} (1)

PA $= \Gamma_{\text{Peano}}$ (2)

Γ_{RCF} (3)

ZFC (4)



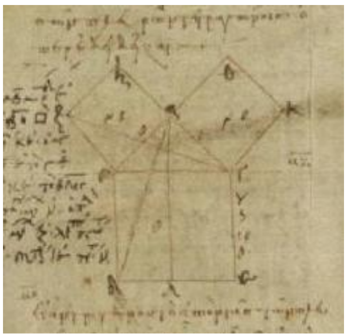
???

Π (spełnia)

???

(dowodzi) $\top$

Własność W



Formuła ϕ

$\rightsquigarrow$

ϕ_{Pasch} (1)

W. Tw. Fermata (2)

$\exists x.\ \forall y.\ y \cdot y \neq x$ (3)

Lemat Kuratowskiego–Zorna (4)

$$\forall x.\ x>5 \wedge 2 \nmid x \implies \exists p_1, p_2.\ x=p_1+p_2 \wedge \forall k, l.\ k \cdot l = p_1 \cdot p_2 \Rightarrow k \in \{1, p_1, p_2, p_1 \cdot p_2\}$$

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

Np.: $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k{\cdot}l{=}p\big) \Longrightarrow \big(k{=}1 \vee l{=}1\big)$

$$\mathcal{M} \stackrel{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

Np.: $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \stackrel{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k \cdot l = p\big) \Longrightarrow \big(k = 1 \lor l = 1\big)$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

Np.: $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k{\cdot}l{=}p\big) \Longrightarrow \big(k{=}1 \lor l{=}1\big)$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

- $\mathcal{M} \models R(x_0, y_0)$ gdy $\langle x_0, y_0 \rangle \in R_{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

$$\text{Np.: } \big\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \big\rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k \cdot l = p\big) \implies \big(k = 1 \lor l = 1\big)$$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

- $\mathcal{M} \models R(x_0, y_0)$ gdy $\langle x_0, y_0 \rangle \in R_{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \psi_1 \lor \psi_2$ gdy $\mathcal{M} \models \psi_1$ **lub** $\mathcal{M} \models \psi_2$

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

Np.: $\big\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \big\rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k{\cdot}l{=}p\big) \Longrightarrow \big(k{=}1 \vee l{=}1\big)$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

- $\mathcal{M} \models R(x_0, y_0)$ gdy $\langle x_0, y_0 \rangle \in R_{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \psi_1 \vee \psi_2$ gdy $\mathcal{M} \models \psi_1$ **lub** $\mathcal{M} \models \psi_2$
- $\cdots$
- $\mathcal{M} \models \exists x.\ \psi(x)$ gdy **istnieje** $x_0 \in \mathcal{M}$, **takie** że $\mathcal{M} \models \psi(x_0)$

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

$$\text{Np.: } \big\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \big\rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k{\cdot}l{=}p\big) \Longrightarrow \big(k{=}1 \vee l{=}1\big)$$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

- $\mathcal{M} \models R(x_0, y_0)$ gdy $\langle x_0, y_0\rangle \in R_{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \psi_1 \vee \psi_2$ gdy $\mathcal{M} \models \psi_1$ **lub** $\mathcal{M} \models \psi_2$
- $\cdots$
- $\mathcal{M} \models \exists x.\ \psi(x)$ gdy **istnieje** $x_0 \in \mathcal{M}$, **takie że** $\mathcal{M} \models \psi(x_0)$
- $\cdots$

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

Np.: $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \left(k\cdot l = p\right) \Longrightarrow \left(k=1 \vee l=1\right)$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

- $\mathcal{M} \models R(x_0, y_0)$ gdy $\langle x_0, y_0 \rangle \in R_{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \psi_1 \vee \psi_2$ gdy $\mathcal{M} \models \psi_1$ **lub** $\mathcal{M} \models \psi_2$
- $\cdots$
- $\mathcal{M} \models \exists x.\ \psi(x)$ gdy **istnieje** $x_0 \in \mathcal{M}$, **takie** że $\mathcal{M} \models \psi(x_0)$
- $\cdots$

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$!

$$\mathcal{M} \overset{?}{\models} \phi$$

„model $\mathcal{M}$ spełnia formułę ϕ"

$$\text{Np.: } \big\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \big\rangle \overset{?}{\models} \exists p.\ \forall k, l.\ \big(k{\cdot}l{=}p\big) \Longrightarrow \big(k{=}1 \lor l{=}1\big)$$

Inducyjna definicja prawdy wg. Tarskiego [1935]:

- $\mathcal{M} \models R(x_0, y_0)$ gdy $\langle x_0, y_0 \rangle \in R_{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \psi_1 \lor \psi_2$ gdy $\mathcal{M} \models \psi_1$ **lub** $\mathcal{M} \models \psi_2$
- $\cdots$
- $\mathcal{M} \models \exists x.\ \psi(x)$ gdy **istnieje** $x_0 \in \mathcal{M}$, **takie** że $\mathcal{M} \models \psi(x_0)$
- $\cdots$

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$!

Dla $\Gamma = \big\{\phi_0, \phi_1, \ldots\big\}$ piszemy

$\mathcal{M} \models \Gamma$ gdy $\mathcal{M} \models \phi_0$ **i** $\mathcal{M} \models \phi_1$ **i** $\ldots$

$$\Gamma \vdash \phi$$

$$\Gamma \vdash \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\boldsymbol{\Gamma} \vdash \phi$$

„teoria $\boldsymbol{\Gamma}$ dowodzi formuły ϕ"

Np.: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{Euclid}} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathrm{Pasch}}$

$$\Gamma \vdash \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \text{gdy} \quad \textbf{istnieje} \text{ dowód } \mathtt{P} \text{ formuły } \phi \text{ z założeń } \Gamma$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ” $\left[\text{ w formalnym systemie dowodzenia }\right]$

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \text{gdy} \quad \textbf{istnieje dowód } \mathtt{P} \text{ formuły } \phi \text{ z założeń } \Gamma$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \text{gdy} \quad \textbf{istnieje } \text{dowód } \mathtt{P} \text{ formuły } \phi \text{ z założeń } \Gamma$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

[w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\frac{}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \text{gdy} \quad \textbf{istnieje } \text{dowód } \mathtt{P} \text{ formuły } \phi \text{ z założeń } \Gamma$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\frac{\ddots \qquad \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}}}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \psi_1} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \psi_2}}{\Gamma \vdash \psi_1 \land \psi_2} \quad \cdots}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód P formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \vdash \psi_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \vdash \psi_2\end{matrix}}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \quad \vdots \\ \Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2\end{matrix}}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}}{\Gamma \vdash \phi}$$

$\Gamma \vdash \phi$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ” [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi(t)}{\Gamma \vdash \exists x.\ \psi(x)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi_1 \quad \Gamma \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2} \qquad \dfrac{\Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}$$

$$\dfrac{\qquad}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\frac{\Gamma \vdash \psi(t)}{\Gamma \vdash \exists x.\ \psi(x)}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\psi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi_1 \qquad \Gamma \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \land \psi_2}$$

$$\frac{\Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}$$

$$\frac{\qquad\qquad}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ” [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi(t)}{\Gamma \vdash \exists x.\ \psi(x)}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi_1 \qquad \Gamma \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\Gamma, \neg\psi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\dfrac{\Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \qquad \Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\frac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi(t)}{\Gamma \vdash \exists x.\ \psi(x)}$$

$$\frac{}{\Gamma, \psi' \vdash \psi'}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Gamma, \neg\psi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi_1 \qquad \Gamma \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2}$$

$$\frac{\ddots \qquad \quad \qquad \cdot^{\cdot^{\cdot}}}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\Gamma \vdash \phi$$ gdy **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

[w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

$$\frac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi} \qquad \frac{}{\Gamma, \psi' \vdash \psi'} \qquad \frac{}{\Gamma, \psi'' \vdash \psi''}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi(t)}{\Gamma \vdash \exists x.\ \psi(x)} \qquad\qquad \frac{\Gamma, \neg\psi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

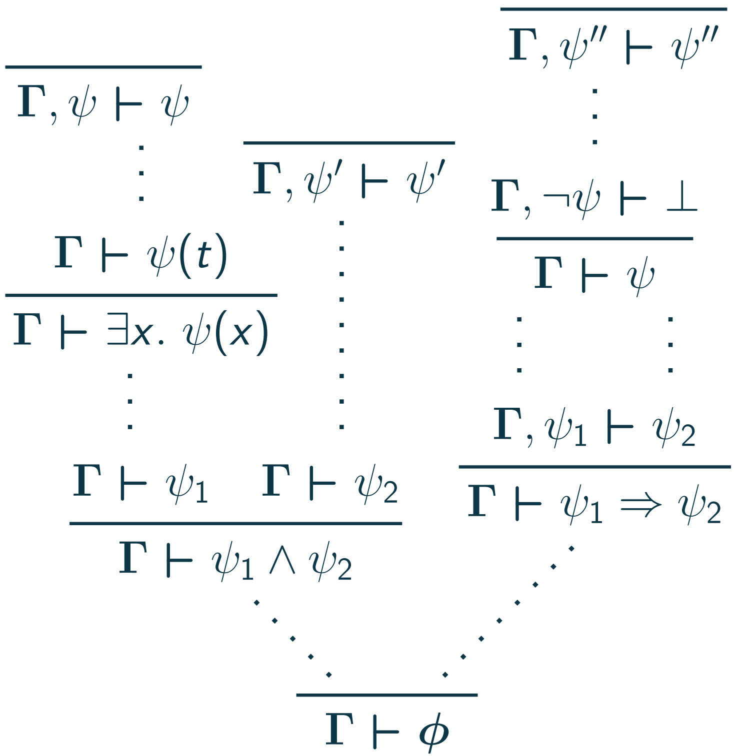
$$\frac{\Gamma \vdash \psi_1 \quad \Gamma \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2} \qquad \frac{\Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2}$$

$$\frac{\ddots \qquad \iddots}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$\mathbf{\Gamma} \vdash \phi \quad \text{gdy} \quad \textbf{istnieje dowód } \mathtt{P} \text{ formuły } \phi \text{ z założeń } \mathbf{\Gamma}$$

„teoria $\mathbf{\Gamma}$ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja

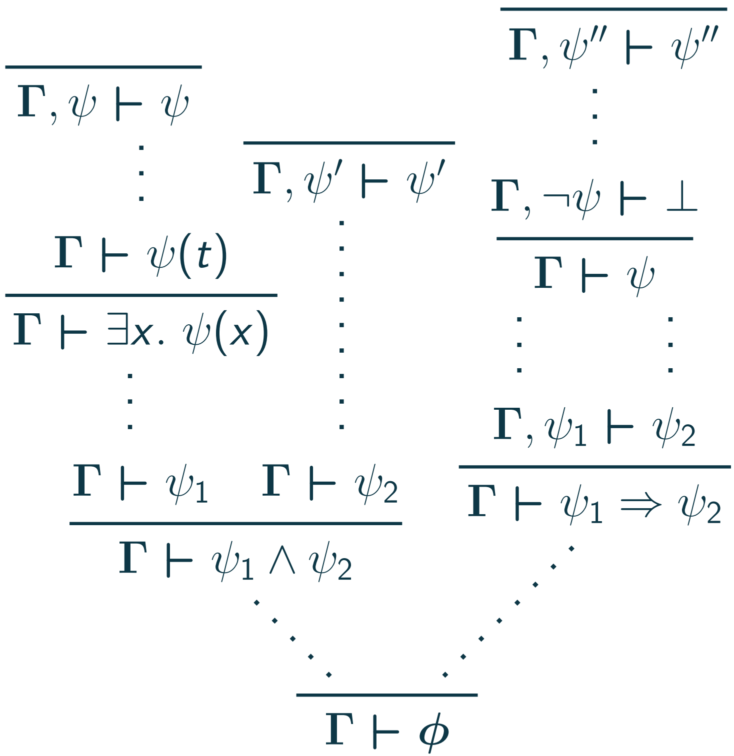


Dowody komputerowe (Coq, Mizar, ...)

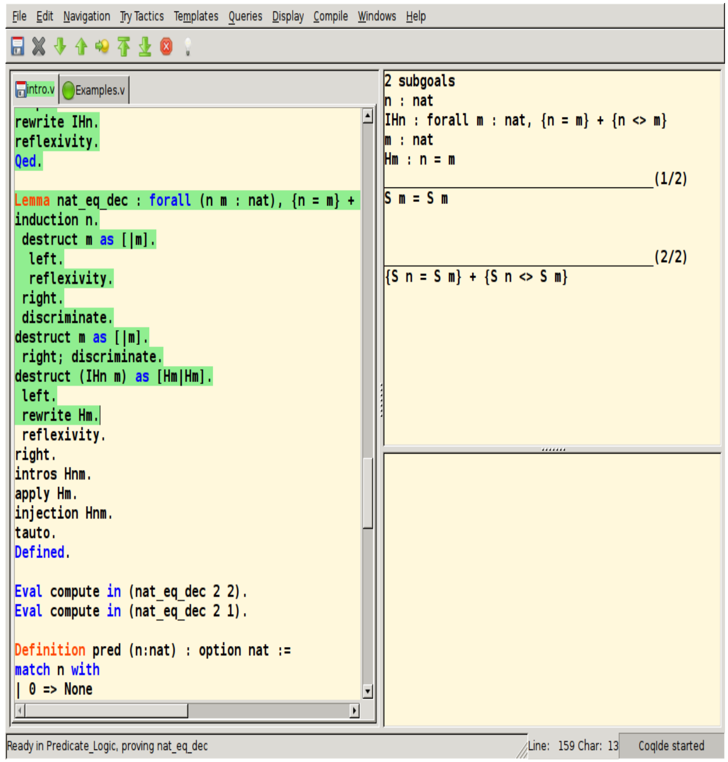
$$\Gamma \vdash \phi \qquad \text{gdy} \quad \textbf{istnieje dowód } \mathtt{P} \text{ formuły } \phi \text{ z założeń } \Gamma$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" [w formalnym systemie dowodzenia]

Naturalna dedukcja



Dowody komputerowe (Coq, Mizar, ...)



Wiele światów. . .

Wiele światów. . .

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=\!=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$$

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=} \phi_{\mathrm{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

Wiele światów. . .

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=} \langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$$

$$\Gamma \overset{e.g.}{=} \Gamma_{\mathrm{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=} \phi_{\mathrm{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=} \langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$$

$$\left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]$$

$$\Gamma \overset{e.g.}{=} \Gamma_{\mathrm{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=} \phi_{\mathrm{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$$

$$\Big\downarrow \left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]$$

$$\Gamma \overset{e.g.}{=} \Gamma_{\text{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=} \phi_{\text{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ”

$$\Big\downarrow$$

$$\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ”

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$$

$$\Big\downarrow \left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]$$

$$\Gamma \overset{e.g.}{=} \Gamma_{\mathrm{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=} \phi_{\mathrm{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

$$\Big\downarrow$$

$$\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}_0' \overset{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2^*, B^*, D^* \right\rangle \models \Gamma$$

Wiele światów. . .

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_0 \stackrel{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle \arrow[d, squiggly, "{\left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]}"] \\ \Gamma \stackrel{e.g.}{=} \Gamma_{\text{Euclid}} \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_0 \stackrel{?}{\models} \phi \stackrel{e.g.}{=} \phi_{\text{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

$$\Gamma \stackrel{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}'_0 \stackrel{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}^*_2, B^*, D^* \right\rangle \models \Gamma$$

Co jeśli $\mathcal{M}_0 \models \phi$ ale $\mathcal{M}'_0 \models \neg\phi$?

Wiele światów. . .

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=\!=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$$

$$\left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]$$

$$\Gamma \overset{e.g.}{=\!=} \Gamma_{\mathrm{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=\!=} \phi_{\mathrm{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

$$\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}_0' \overset{e.g.}{=\!=} \left\langle \mathbb{R}_2^*, B^*, D^* \right\rangle \models \Gamma$$

Co jeśli $\mathcal{M}_0 \models \phi$ ale $\mathcal{M}_0' \models \neg\phi$?

Def. (Konsekwencja semantyczna)

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \overset{\text{e.g.}}{=} \langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$$

$$\Big\downarrow \; \left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]$$

$$\Gamma \overset{\text{e.g.}}{=} \Gamma_{\text{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{\text{e.g.}}{=} \phi_{\text{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

$$\Big\downarrow$$

$$\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}'_0 \overset{\text{e.g.}}{=} \langle \mathbb{R}^*_2, B^*, D^* \rangle \models \Gamma$$

Co jeśli $\mathcal{M}_0 \models \phi$ ale $\mathcal{M}'_0 \models \neg\phi$?

Def. (Konsekwencja semantyczna)

$$\Gamma \models \phi$$

„teoria Γ pociąga formułę ϕ"

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \overset{e.g.}{=} \langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$$

$$\Big[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\Big]$$

$$\Gamma \overset{e.g.}{=} \Gamma_{\mathrm{Euclid}}$$

$$\mathcal{M}_0 \overset{?}{\models} \phi \overset{e.g.}{=} \phi_{\mathrm{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ"

$$\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}_0' \overset{e.g.}{=} \langle \mathbb{R}_2^*, B^*, D^* \rangle \models \Gamma$$

Co jeśli $\mathcal{M}_0 \models \phi$ ale $\mathcal{M}_0' \models \neg\phi$?

Def. (Konsekwencja semantyczna)

$$\Gamma \models \phi \qquad \text{gdy } \textbf{dla każdego} \text{ modelu } \mathcal{M} \models \Gamma \text{ zachodzi } \mathcal{M} \models \phi$$

„teoria Γ pociąga formułę ϕ"

Wiele światów...

$$\mathcal{M}_0 \stackrel{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$$

$$\mathcal{M}_0 \stackrel{?}{\models} \phi \stackrel{e.g.}{=} \phi_{\text{Pasch}}$$

„model $\mathcal{M}_0$ spełnia formułę ϕ”

$$\mathcal{M}_0 \xrightarrow{\left[\mathcal{M}_0 \models \Gamma\right]} \Gamma$$

$$\Gamma \stackrel{e.g.}{=} \Gamma_{\text{Euclid}}$$

$$\Gamma \stackrel{?}{\vdash} \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ”

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}_0' \stackrel{e.g.}{=} \left\langle \mathbb{R}_2^*, B^*, D^* \right\rangle \models \Gamma$

Co jeśli $\mathcal{M}_0 \models \phi$ ale $\mathcal{M}_0' \models \neg\phi$?

$\boxed{\rightsquigarrow \text{ Wtedy } \Gamma \not\models \phi \textbf{ i } \Gamma \not\models \neg\phi \text{ !}}$

Def. (Konsekwencja semantyczna)

$\Gamma \models \phi$ gdy **dla każdego** modelu $\mathcal{M} \models \Gamma$ zachodzi $\mathcal{M} \models \phi$

„teoria Γ pociąga formułę ϕ”

$$\Gamma \vdash \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ”

$\left[\right.$ **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ $\left.\right]$

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$\Big[$ **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ $\Big]$

„teoria Γ pociąga formułę ϕ"

$\Big[$ **każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$ $\Big]$

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$\Big[$ **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ $\Big]$

„teoria Γ pociąga formułę ϕ"

$\Big[$ **każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$ $\Big]$

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

$\left[\right.$ **istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ $\left.\right]$

„teoria Γ pociąga formułę ϕ"

$\left[\right.$ **każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$ $\left.\right]$

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ■

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" — „teoria Γ pociąga formułę ϕ"

[**istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ] — [**każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$]

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ∎

Twierdzenie (o pełności) (*Gödel's completeness theorem* [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ **to** $\Gamma \vdash \phi$.

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" — „teoria Γ pociąga formułę ϕ"

[**istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ] — [**każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$]

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ■

Twierdzenie (o pełności) (*Gödel's completeness theorem* [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ **to** $\Gamma \vdash \phi$.

Dowód (szkic)

Załóżmy, że $\Gamma \nvdash \phi$. Stworzymy model $\mathcal{M}_0$ taki, że $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ ale $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$.

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ” — „teoria Γ pociąga formułę ϕ”

[**istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ] — [**każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$]

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ∎

Twierdzenie (o pełności) (*Gödel's completeness theorem* [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ **to** $\Gamma \vdash \phi$.

Dowód (szkic)

Załóżmy, że $\Gamma \not\vdash \phi$. Stworzymy model $\mathcal{M}_0$ taki, że $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ ale $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$.

1) Konstruujemy teorię $\Gamma' \supseteq \Gamma$ tak by $\Gamma' \not\vdash \phi$.

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ"

[**istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ]

„teoria Γ pociąga formułę ϕ"

[**każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$]

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ■

Twierdzenie (o pełności) (*Gödel's completeness theorem* [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ **to** $\Gamma \vdash \phi$.

Dowód (szkic)

Załóżmy, że $\Gamma \nvdash \phi$. Stworzymy model $\mathcal{M}_0$ taki, że $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ ale $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$.

1) Konstruujemy teorię $\Gamma' \supseteq \Gamma$ tak by $\Gamma' \nvdash \phi$.

2) Tworzymy $\mathcal{M}_0$ by dla **każdej** formuły ψ: $\mathcal{M}_0 \models \psi$ **wtw** $\Gamma' \vdash \psi$.

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{vs.} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" — „teoria Γ pociąga formułę ϕ"

[**istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ] — [**każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$]

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ■

Twierdzenie (o pełności) (*Gödel's completeness theorem* [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ **to** $\Gamma \vdash \phi$.

Dowód (szkic)

Załóżmy, że $\Gamma \not\vdash \phi$. Stworzymy model $\mathcal{M}_0$ taki, że $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ ale $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$.

1) Konstruujemy teorię $\Gamma' \supseteq \Gamma$ tak by $\Gamma' \not\vdash \phi$.

2) Tworzymy $\mathcal{M}_0$ by dla **każdej** formuły ψ: $\mathcal{M}_0 \models \psi$ **wtw** $\Gamma' \vdash \psi$. ■

$$\Gamma \vdash \phi \qquad \textbf{wtw} \qquad \Gamma \models \phi$$

„teoria Γ dowodzi formuły ϕ" — „teoria Γ pociąga formułę ϕ"

[**istnieje** dowód $\mathtt{P}$ formuły ϕ z założeń Γ] — [**każdy** model $\mathcal{M} \models \Gamma$ spełnia $\mathcal{M} \models \phi$]

Twierdzenie (o poprawności)

Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ **to** $\Gamma \models \phi$.

Dowód

Indukcja po strukturze dowodu $\mathtt{P}$, wykazującego $\Gamma \vdash \phi$:

Teza: **dla każdego** modelu $\mathcal{M}$ **jeśli** $\mathcal{M} \models \Gamma$ **to** $\mathcal{M} \models \phi$. ■

Twierdzenie (o pełności) (*Gödel's completeness theorem* [1929])

Jeśli $\Gamma \models \phi$ **to** $\Gamma \vdash \phi$.

Dowód (szkic)

Załóżmy, że $\Gamma \nvdash \phi$. Stworzymy model $\mathcal{M}_0$ taki, że $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ ale $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$.

1) Konstruujemy teorię $\Gamma' \supseteq \Gamma$ tak by $\Gamma' \nvdash \phi$.

2) Tworzymy $\mathcal{M}_0$ by dla **każdej** formuły ψ: $\mathcal{M}_0 \models \psi$ **wtw** $\Gamma' \vdash \psi$. ■

Niesprzeczność = spełnialność

Niesprzeczność = spełnialność

$\Gamma \nvdash \bot$ — teoria Γ nie dowodzi fałszu, czyli jest niesprzeczna

Niesprzeczność = spełnialność

$\Gamma \nvdash \bot$ — teoria Γ nie dowodzi fałszu, czyli jest niesprzeczna

wtw

$\Gamma \not\models \bot$ — teoria Γ nie pociąga za sobą fałszu

Niesprzeczność = spełnialność

$\Gamma \nvdash \bot$ — teoria Γ nie dowodzi fałszu, czyli jest niesprzeczna

wtw

$\Gamma \nvDash \bot$ — teoria Γ nie pociąga za sobą fałszu

wtw

nieprawdą jest, że $\left[\textbf{dla każdego} \text{ modelu } \mathcal{M} \vDash \Gamma \text{ zachodzi } \mathcal{M} \vDash \bot\right]$

Niesprzeczność = spełnialność

$\Gamma \nvdash \perp$ — teoria Γ nie dowodzi fałszu, czyli jest niesprzeczna

wtw

$\Gamma \not\models \perp$ — teoria Γ nie pociąga za sobą fałszu

wtw

nieprawdą jest, że $\left[\textbf{dla każdego} \text{ modelu } \mathcal{M} \models \Gamma \text{ zachodzi } \mathcal{M} \models \perp\right]$

wtw

istnieje model $\mathcal{M} \models \Gamma$, **taki** że $\mathcal{M} \not\models \perp$

Niesprzeczność = spełnialność

$\Gamma \nvdash \bot$ — teoria Γ nie dowodzi fałszu, czyli jest niesprzeczna

wtw

$\Gamma \nvDash \bot$ — teoria Γ nie pociąga za sobą fałszu

wtw

nieprawdą jest, że $\left[\textbf{dla każdego} \text{ modelu } \mathcal{M} \models \Gamma \text{ zachodzi } \mathcal{M} \models \bot\right]$

wtw

istnieje model $\mathcal{M} \models \Gamma$, **taki** że $\mathcal{M} \nvDash \bot$

wtw

istnieje model $\mathcal{M} \models \Gamma$ — teoria Γ jest spełnialna

Niesprzeczność = spełnialność

$\Gamma \nvdash \bot$ — teoria Γ nie dowodzi fałszu, czyli jest niesprzeczna

wtw

$\Gamma \not\models \bot$ — teoria Γ nie pociąga za sobą fałszu

wtw

nieprawdą jest, że $\left[\textbf{dla każdego} \text{ modelu } \mathcal{M} \models \Gamma \text{ zachodzi } \mathcal{M} \models \bot\right]$

wtw

istnieje model $\mathcal{M} \models \Gamma$, **taki** że $\mathcal{M} \not\models \bot$

wtw

istnieje model $\mathcal{M} \models \Gamma$ — teoria Γ jest spełnialna

[będziemy czasem *cicho* zakładać, że Γ jest niesprzeczna]

Duże liczby naturalne

Duże liczby naturalne

$\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models$ **PA**

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \Big(\psi(0) \ \wedge \ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \ \Big| \ \psi \right\}$$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \mathbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka $+$ indukcja

$$\left\{ \left(\psi(0) \ \wedge \ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\right) \Longrightarrow \left(\forall n.\ \psi(n)\right) \ \middle| \ \psi \right\}$$

$$\Gamma := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \middle| \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \mathbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \left(\psi(0) \ \wedge \ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\right) \Longrightarrow \left(\forall n.\ \psi(n)\right) \ \middle| \ \psi \right\}$$

$\boldsymbol{\Gamma} := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \middle| \ n \in \mathbb{N} \right\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma}$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \Big(\psi(0) \ \wedge \ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \ \Big| \ \psi \right\}$$

$\mathbf{\Gamma} := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \middle| \ n \in \mathbb{N} \right\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$ jest sprzeczna?

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \mathbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \left(\psi(0) \;\wedge\; \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\right) \Longrightarrow \left(\forall n.\ \psi(n)\right) \;\middle|\; \psi \right\}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \qquad \rightsquigarrow \quad \left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma}$$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma}$ jest sprzeczna?

nie

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \mathbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \Big(\psi(0)\ \wedge\ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big)\ \Big|\ \psi \right\}$$

$\Gamma := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n}\ \middle|\ n \in \mathbb{N} \right\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \Gamma$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \Gamma$ jest sprzeczna?

$\rightsquigarrow$ nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \mathbf{PA} \cup \Gamma$!

Duże liczby naturalne

$\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models \mathbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\Big\{ \Big(\psi(0) \ \wedge\ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \ \Big|\ \psi \Big\}$$

$\mathbf{\Gamma} := \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \Big|\ n \in \mathbb{N} \Big\}$ $\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$ jest sprzeczna?

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$!

N.b. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\Big\{ \Big(\psi(0) \ \wedge\ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \ \Big|\ \psi \Big\}$$

$\mathbf{\Gamma} := \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \Big|\ n \in \mathbb{N} \Big\}$ $\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \rangle \not\models$ **PA** $\cup\ \mathbf{\Gamma}$

Czy teoria **PA** $\cup\ \mathbf{\Gamma}$ jest sprzeczna?

tak

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models$ **PA** $\cup\ \mathbf{\Gamma}$!

N.b. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \textbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \Big(\psi(0) \;\wedge\; \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \;\Big|\; \psi \right\}$$

$\boldsymbol{\Gamma} := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \textbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma}$

Czy teoria $\textbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma}$ jest sprzeczna?

tak

nie

Istnieje dowód `P`, że $\textbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma} \vdash \perp$

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \textbf{PA} \cup \boldsymbol{\Gamma}$!

N.b. $\mathcal{M} = \left\langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \right\rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \textbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\Big\{ \big(\psi(0) \ \wedge\ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\big) \Longrightarrow \big(\forall n.\ \psi(n)\big) \ \mid\ \psi \Big\}$$

$\Gamma := \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \mid n \in \mathbb{N} \Big\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \textbf{PA} \cup \Gamma$

Czy teoria $\textbf{PA} \cup \Gamma$ jest sprzeczna?

tak

Istnieje dowód $\mathtt{P}$, że $\textbf{PA} \cup \Gamma \vdash \bot$

$\rightsquigarrow$ $\mathtt{P}$ świadczy, że $\textbf{PA} \cup \Gamma' \vdash \bot$

dla skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \textbf{PA} \cup \Gamma$!

N.b. $\mathcal{M} = \left\langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \right\rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \mathbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\Big\{ \Big(\psi(0) \;\wedge\; \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \;\Big|\; \psi \Big\}$$

$\mathbf{\Gamma} := \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} \Big\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$ jest sprzeczna?

tak

Istnieje dowód P, że $\mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma} \vdash \bot$

$\rightsquigarrow$ P świadczy, że $\mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}' \vdash \bot$

dla skończonego $\mathbf{\Gamma}' \subseteq \mathbf{\Gamma}$

$$\mathbf{\Gamma}' \subseteq \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\Big|\; n < n_0 \Big\}$$

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \mathbf{PA} \cup \mathbf{\Gamma}$!

N.b. $\mathcal{M} = \left\langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \right\rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\Big\{ \Big(\psi(0) \;\wedge\; \forall n.\; \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\; \psi(n)\Big) \;\Big|\; \psi \Big\}$$

$\Gamma := \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} \Big\}$ $\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \Gamma$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \Gamma$ jest sprzeczna?

tak

Istnieje dowód P, że $\mathbf{PA} \cup \Gamma \vdash \bot$

$\rightsquigarrow$ P świadczy, że $\mathbf{PA} \cup \Gamma' \vdash \bot$

dla skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$

$$\Gamma' \subseteq \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\Big|\; n < n_0 \Big\}$$

$\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega := n_0 \rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \Gamma'$

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \mathbf{PA} \cup \Gamma$!

N.b. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\Big\{ \big(\psi(0) \ \wedge\ \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\big) \Longrightarrow \big(\forall n.\ \psi(n)\big) \ \big|\ \psi \Big\}$$

$\Gamma := \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \big|\ n \in \mathbb{N} \Big\}$ $\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \rangle \not\models$ **PA** $\cup\, \Gamma$

Czy teoria **PA** $\cup\, \Gamma$ jest sprzeczna?

tak

Istnieje dowód P, że **PA** $\cup\, \Gamma \vdash \perp$

$\rightsquigarrow$ P świadczy, że **PA** $\cup\, \Gamma' \vdash \perp$

dla skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$

$$\Gamma' \subseteq \Big\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}\ldots{+}1}_{n} \ \big|\ n < n_0 \Big\}$$

$\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega := n_0 \rangle \not\models$ **PA** $\cup\, \Gamma'$

$\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \not\models$ **PA**

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models$ **PA** $\cup\, \Gamma$!

N.b. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models$ **PA** — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \left(\psi(0) \;\wedge\; \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\right) \Longrightarrow \left(\forall n.\ \psi(n)\right) \;\middle|\; \psi \right\}$$

$\Gamma := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \Gamma$

Czy teoria $\mathbf{PA} \cup \Gamma$ jest sprzeczna?

~~tak~~

Istnieje dowód P, że $\mathbf{PA} \cup \Gamma \vdash \bot$

$\rightsquigarrow$ P świadczy, że $\mathbf{PA} \cup \Gamma' \vdash \bot$

dla skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$

$$\Gamma' \subseteq \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\middle|\; n < n_0 \right\}$$

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega := n_0 \right\rangle \not\models \mathbf{PA} \cup \Gamma'$

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \not\models \mathbf{PA}$ $\lightning$

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \mathbf{PA} \cup \Gamma$!

N.b. $\mathcal{M} = \left\langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \right\rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

Duże liczby naturalne

$\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \models \textbf{PA}$ — aksjomaty Peano: arytmetyka + indukcja

$$\left\{ \Big(\psi(0) \;\wedge\; \forall n.\ \psi(n) \Rightarrow \psi(n{+}1)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n.\ \psi(n)\Big) \;\Big|\; \psi \right\}$$

$\Gamma := \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ $\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega \right\rangle \not\models \textbf{PA} \cup \Gamma$

Czy teoria $\textbf{PA} \cup \Gamma$ jest sprzeczna?

~~tak~~

Istnieje dowód $\mathtt{P}$, że $\textbf{PA} \cup \Gamma \vdash \perp$

$\rightsquigarrow$ $\mathtt{P}$ świadczy, że $\textbf{PA} \cup \Gamma' \vdash \perp$

dla skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$

$$\Gamma' \subseteq \left\{ \Omega \geq \underbrace{1{+}\ldots{+}1}_{n} \;\middle|\; n < n_0 \right\}$$

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1, \Omega := n_0 \right\rangle \not\models \textbf{PA} \cup \Gamma'$

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle \not\models \textbf{PA}$ $\lightning$

nie

Istnieje model $\mathcal{M}$

taki że $\mathcal{M} \models \textbf{PA} \cup \Gamma$!

N.b. $\mathcal{M} = \left\langle \mathbb{N} \cup N', \leq', +', \cdot', 0, 1, \Omega \right\rangle$

gdzie $\Omega \in N'$

[Löwenheim-Skolem]

Zmora Cantora

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\left\langle V, \in, \emptyset \right\rangle$

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\left\langle V, \in, \emptyset \right\rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\left\langle V, \in, \emptyset \right\rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow \mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\langle V, \in, \emptyset \rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg\exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\left\langle V, \in, \emptyset \right\rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg \exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

$$\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathbf{HC}} \ \text{ czy może } \ \mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \neg\phi_{\mathbf{HC}}$$

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\langle V, \in, \emptyset \rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg\exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

$$\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathbf{HC}} \quad \text{czy może} \quad \mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \neg\phi_{\mathbf{HC}}$$

Twierdzenie (Gödel [1940])

Istnieje model $\mathcal{M}_1 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathbf{HC}}$.

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\langle V, \in, \emptyset \rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] + Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg \exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

$$\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathbf{HC}} \quad \text{czy może} \quad \xcancel{\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \neg\phi_{\mathbf{HC}}}$$

Twierdzenie (Gödel [1940])

Istnieje model $\mathcal{M}_1 \models \mathbf{ZFC}$, **taki** że $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathbf{HC}}$.

$$\rightsquigarrow \mathbf{ZFC} \not\vdash \neg\phi_{\mathbf{HC}}\ !$$

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\langle V, \in, \emptyset \rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg \exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

$$\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathbf{HC}} \quad \text{czy może} \quad \cancel{\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \neg\phi_{\mathbf{HC}}}$$

Twierdzenie (Gödel [1940])

Istnieje model $\mathcal{M}_1 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathbf{HC}}$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{ZFC} \not\vdash \neg\phi_{\mathbf{HC}}$!

Twierdzenie (Cohen [1963]) (forsing)

Istnieje model $\mathcal{M}_2 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_2 \models \neg\phi_{\mathbf{HC}}$.

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\left\langle V, \in, \emptyset \right\rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg\exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

$$\cancel{\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathbf{HC}}} \quad \text{czy może} \quad \cancel{\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \neg\phi_{\mathbf{HC}}}$$

Twierdzenie (Gödel [1940])

Istnieje model $\mathcal{M}_1 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathbf{HC}}$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{ZFC} \nvdash \neg\phi_{\mathbf{HC}}$!

Twierdzenie (Cohen [1963]) (forsing)

Istnieje model $\mathcal{M}_2 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_2 \models \neg\phi_{\mathbf{HC}}$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{ZFC} \nvdash \phi_{\mathbf{HC}}$!

Zmora Cantora

Teoria mnogości: teoria modeli $\langle V, \in, \emptyset \rangle$

ZFC $=$ aksjomatyka Zermello [1908] – Fraenkela [1922] $+$ Aksjomat Wyboru (**C**)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$, arytmetyka, $\mathbb{R}$, pochodne, ...

Hipoteza continuum (Cantor [1878]):

$$\phi_{\mathbf{HC}} := \neg \exists X \subseteq \mathbb{R}.\ |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

$$\cancel{\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \phi_{\mathbf{HC}}} \quad \text{czy może} \quad \cancel{\mathbf{ZFC} \overset{?}{\vdash} \neg\phi_{\mathbf{HC}}}$$

Twierdzenie (Gödel [1940])

Istnieje model $\mathcal{M}_1 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathbf{HC}}$.

$\rightsquigarrow$ **ZFC** $\nvdash \neg\phi_{\mathbf{HC}}$!

Twierdzenie (Cohen [1963]) (forsing)

Istnieje model $\mathcal{M}_2 \models$ **ZFC**, **taki** że $\mathcal{M}_2 \models \neg\phi_{\mathbf{HC}}$.

$\rightsquigarrow$ **ZFC** $\nvdash \phi_{\mathbf{HC}}$!

$\rightsquigarrow$ zdanie $\phi_{\mathbf{HC}}$ jest niezależne od **ZFC** !

Zupełność

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{lub} \;\; \Gamma \vdash \neg\phi.$$

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{lub} \;\; \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\left[\text{ nie ma zdania niezależnego od } \Gamma \right]$$

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \ \textbf{ lub } \ \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\Big[\text{ nie ma zdania niezależnego od } \Gamma \Big]$$

Lemat

Załóżmy, że Γ jest zupełna, a $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ to jej model.

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \ \textbf{lub} \ \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\Big[\text{ nie ma zdania niezależnego od } \Gamma \Big]$$

Lemat

Załóżmy, że Γ jest zupełna, a $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ to jej model.

Wtedy **dla każdej** formuły ϕ mamy

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{lub} \;\; \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\left[\text{ nie ma zdania niezależnego od } \Gamma \right]$$

Lemat

Załóżmy, że Γ jest zupełna, a $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ to jej model.

Wtedy **dla każdej** formuły ϕ mamy

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{wtw} \;\; \mathcal{M}_0 \models \phi.$$

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \ \ \textbf{lub} \ \ \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\left[\ \text{nie ma zdania niezależnego od } \Gamma\ \right]$$

Lemat

Załóżmy, że Γ jest zupełna, a $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ to jej model.

Wtedy **dla każdej** formuły ϕ mamy

$$\Gamma \vdash \phi \ \ \textbf{wtw} \ \ \mathcal{M}_0 \models \phi.$$

Dowód

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{lub} \;\; \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\Big[\text{ nie ma zdania niezależnego od } \Gamma \;\Big]$$

Lemat

Załóżmy, że Γ jest zupełna, a $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ to jej model.

Wtedy **dla każdej** formuły ϕ mamy

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{wtw} \;\; \mathcal{M}_0 \models \phi.$$

Dowód

($\Rightarrow$) Wynika z poprawności.

Zupełność

Definicja

Teoria Γ jest zupełna jeśli **dla każdej** formuły ϕ zachodzi

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{lub} \;\; \Gamma \vdash \neg\phi.$$

$$\left[\text{ nie ma zdania niezależnego od } \Gamma \right]$$

Lemat

Załóżmy, że Γ jest zupełna, a $\mathcal{M}_0 \models \Gamma$ to jej model.

Wtedy **dla każdej** formuły ϕ mamy

$$\Gamma \vdash \phi \;\; \textbf{wtw} \;\; \mathcal{M}_0 \models \phi.$$

Dowód

($\Rightarrow$) Wynika z poprawności.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\Gamma \nvdash \phi$. Wtedy $\Gamma \vdash \neg\phi$. Więc $\mathcal{M} \models \neg\phi$. $\lightning$ $\blacksquare$

Niezupełność

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\Big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\Big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\Big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\Big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\left\langle \mathbb{N}, +, \cdot \right\rangle$,

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\Big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\Big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\Big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\Big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ, **takie** że

$$\Gamma \nvdash \phi \quad \textbf{oraz} \quad \Gamma \nvdash \neg\phi.$$

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\Big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\Big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ, **takie** że

$$\Gamma \not\models \phi \quad \textbf{oraz} \quad \Gamma \not\models \neg\phi.$$

$\rightsquigarrow$ każda *sensowna* teoria posiada formułę niezależną $\rightsquigarrow$ jest niezupełna

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle\mathbb{N}, +, \cdot\rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ, **takie** że

$$\Gamma \not\vdash \phi \;\; \textbf{oraz} \;\; \Gamma \not\vdash \neg\phi.$$

$\leadsto$ każda *sensowna* teoria posiada formułę niezależną $\leadsto$ jest niezupełna

Twierdzenie (Gödel [1931])

Jeśli Γ jest jak wyżej **to**

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ, **takie** że

$$\Gamma \nvdash \phi \ \ \textbf{oraz} \ \ \Gamma \nvdash \neg\phi.$$

$\rightsquigarrow$ każda *sensowna* teoria posiada formułę niezależną $\rightsquigarrow$ jest niezupełna

Twierdzenie (Gödel [1931])

Jeśli Γ jest jak wyżej **to** $\quad \Gamma \nvdash \big[\text{"}\Gamma \nvdash \bot\text{"}\big].$

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ, **takie** że

$$\Gamma \nvdash \phi \quad \textbf{oraz} \quad \Gamma \nvdash \neg\phi.$$

$\rightsquigarrow$ każda *sensowna* teoria posiada formułę niezależną $\rightsquigarrow$ jest niezupełna

Twierdzenie (Gödel [1931])

Jeśli Γ jest jak wyżej **to** $\quad \Gamma \nvdash \big[\text{"}\Gamma \nvdash \bot\text{"}\big].$

Ale też $$\Gamma \nvdash \Big(\neg\big[\text{"}\Gamma \nvdash \bot\text{"}\big]\Big) \equiv \big[\text{"}\Gamma \vdash \bot\text{"}\big].$$

Niezupełność

Twierdzenie (o niezupełności) $\big($*Gödel's incompleteness theorem* [1931]$\big)$

Jeśli Γ jest teorią taką że:

- Γ definiuje *prawdziwą* arytmetykę $\big\langle \mathbb{N}, +, \cdot \big\rangle$,
- aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć,
- Γ jest niesprzeczna,

to istnieje zdanie ϕ, **takie** że

$$\Gamma \nvdash \phi \;\; \textbf{oraz} \;\; \Gamma \nvdash \neg\phi.$$

$\rightsquigarrow$ każda *sensowna* teoria posiada formułę niezależną $\rightsquigarrow$ jest niezupełna

Twierdzenie (Gödel [1931])

Jeśli Γ jest jak wyżej **to** $\quad \Gamma \nvdash \big[\text{"}\Gamma \nvdash \perp\text{"}\big]$.

Ale też $$\Gamma \nvdash \Big(\neg\big[\text{"}\Gamma \nvdash \perp\text{"}\big]\Big) \equiv \big[\text{"}\Gamma \vdash \perp\text{"}\big].$$

$\rightsquigarrow$ Zdanie $\big[\text{"}\Gamma \nvdash \perp\text{"}\big]$ jest niezależne od Γ !

Teorie zupełne

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$$

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$$

$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$$

$\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbb{Q}} := \Big\{ &\forall x.\ x{\leq}x,\\ &\forall x, y, z.\ \big(x{\leq}y \wedge y{\leq}z\big) \Rightarrow x{\leq}z,\\ &\forall x, y.\ x{\leq}y \wedge y{\leq}x \Rightarrow x{=}y,\\ &\forall x, z.\ x{<}z \Rightarrow \exists y.\ x{<}y \wedge y{<}z,\\ &\neg\exists x.\ \forall y.\ x{\leq}y,\\ &\neg\exists x.\ \forall y.\ y{\leq}x \Big\}\end{aligned}$$

Teorie zupełne

$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$

$\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$$

$\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \left\langle \mathbb{Q}, \leq \right\rangle$$

$\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Dowody

- Eliminacja kwantyfikatorów

Teorie zupełne

$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ $\qquad$ $\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Dowody

- Eliminacja kwantyfikatorów
- Granica Fraïssé

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \left\langle \mathbb{Q}, \leq \right\rangle$$

$\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Dowody

- Eliminacja kwantyfikatorów
- Granica Fraïssé
- Tw. Rabina o drzewach

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \left\langle \mathbb{Q}, \leq \right\rangle$$

$\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Dowody

- Eliminacja kwantyfikatorów
- Granica Fraïssé
- Tw. Rabina o drzewach
- $\aleph_0$-kategoryczność:

  $\mathcal{M}_0$ jest jedynym przeliczalnym modelem $\Gamma_{\mathbb{Q}}$!

Teorie zupełne

$\mathcal{M}_0 := \left\langle \mathbb{Q}, \leq \right\rangle$ $\qquad$ $\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Dowody

- Eliminacja kwantyfikatorów
- Granica Fraïssé
- Tw. Rabina o drzewach
- $\aleph_0$-kategoryczność:

  $\mathcal{M}_0$ jest jedynym przeliczalnym modelem $\Gamma_{\mathbb{Q}}$!

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \mathbb{Q}, \leq \right\rangle$ oraz $\left\langle \mathbb{R}, \leq \right\rangle$ spełniają te same formuły ϕ

Teorie zupełne

$$\mathcal{M}_0 := \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$$

$\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ gęsty porządek liniowy bez el. min. i maks.

Twierdzenie

Teoria $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ jest zupełna:

dla każdej formuły ϕ mamy

$\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \phi$ **lub** $\Gamma_{\mathbb{Q}} \vdash \neg\phi$

Dowody

- Eliminacja kwantyfikatorów
- Granica Fraïssé
- Tw. Rabina o drzewach
- $\aleph_0$-kategoryczność:

  $\mathcal{M}_0$ jest jedynym przeliczalnym modelem $\Gamma_{\mathbb{Q}}$!

Teorie zupełne:

- $\langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$ (Tarski [1959]) (też Hilbert)
- $\langle \mathbb{N}, +, 0, 1 \rangle$ (Presburger [1929])
- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ (Tarski [1951])
- ...

$\rightsquigarrow$ $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ spełniają te same formuły ϕ

Rozstrzygalność

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Teza

Istnieje algorytm sprawdzający dla danej formuły ϕ czy $\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$.

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Teza

Istnieje algorytm sprawdzający dla danej formuły ϕ czy $\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$.

Dowód

```
function isTrue(ϕ) {
 for i = 0,1,... {
  P := stringList(i); // i-ty napis w jakiejś enumeracji
```

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Teza

Istnieje algorytm sprawdzający dla danej formuły ϕ czy $\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$.

Dowód

```
function isTrue(ϕ) {
 for i = 0,1,... {
  P := stringList(i); // i-ty napis w jakiejś enumeracji
  if (P is not a valid proof) {continue; };
```

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Teza

Istnieje algorytm sprawdzający dla danej formuły ϕ czy $\Gamma \stackrel{?}{\vdash} \phi$.

Dowód

```
function isTrue(φ) {
 for i = 0,1,... {
  P := stringList(i); // i-ty napis w jakiejś enumeracji
  if (P is not a valid proof) {continue; };
  if (P witnesses that Γ ⊢ φ) {return true; };
```

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Teza

Istnieje algorytm sprawdzający dla danej formuły ϕ czy $\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$.

Dowód

```
function isTrue(ϕ) {
 for i = 0,1,... {
  P := stringList(i); // i-ty napis w jakiejś enumeracji
  if (P is not a valid proof) {continue; };
  if (P witnesses that Γ ⊢ ϕ) {return true; };
  if (P witnesses that Γ ⊢ ¬ϕ) {return false; };
```

Rozstrzygalność

Założenie

aksjomaty Γ dają się konstruktywnie wyliczyć,

teoria Γ jest zupełna — nie posiada formuły niezależnej.

Teza

Istnieje algorytm sprawdzający dla danej formuły ϕ czy $\Gamma \overset{?}{\vdash} \phi$.

Dowód

```
function isTrue(ϕ) {
 for i = 0,1,... {
  P := stringList(i); // i-ty napis w jakiejś enumeracji
  if (P is not a valid proof) {continue; };
  if (P witnesses that Γ ⊢ ϕ) {return true; };
  if (P witnesses that Γ ⊢ ¬ϕ) {return false; };
 }
}
```

Wnioski

Wnioski

Zawsze $\qquad \mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Wnioski

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ [Gödel's completeness]

Wnioski

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ [Gödel's completeness]

Ale bywa, że $\Gamma \not\vdash \phi$ **oraz** $\Gamma \not\vdash \neg\phi$ [Γ jest niezupełna]

Wnioski

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ [Gödel's completeness]

Ale bywa, że $\Gamma \not\models \phi$ **oraz** $\Gamma \not\models \neg\phi$ [Γ jest niezupełna]

Gdyż istnieją $\mathcal{M}_1 \models \Gamma, \phi$ **oraz** $\mathcal{M}_2 \models \Gamma, \neg\phi$

Wnioski

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ [Gödel's completeness]

Ale bywa, że $\Gamma \not\vdash \phi$ **oraz** $\Gamma \not\vdash \neg\phi$ [Γ jest niezupełna]

Gdyż istnieją $\mathcal{M}_1 \models \Gamma, \phi$ **oraz** $\mathcal{M}_2 \models \Gamma, \neg\phi$

Tw. o niezupełności [Gödel's incompleteness]

Każda sensowna **i** dostatecznie silna Γ jest niezupełna.

Wnioski

Zawsze $\qquad \mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\qquad \Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ $\qquad$ [Gödel's completeness]

Ale bywa, że $\qquad \Gamma \not\vdash \phi$ **oraz** $\Gamma \not\vdash \neg\phi$ $\qquad$ [Γ jest niezupełna]

Gdyż istnieją $\qquad \mathcal{M}_1 \models \Gamma, \phi$ **oraz** $\mathcal{M}_2 \models \Gamma, \neg\phi$

Tw. o niezupełności $\qquad$ [Gödel's incompleteness]

Każda sensowna **i** dostatecznie silna Γ jest niezupełna.

Chociaż istnieją teorie zupełne:

$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$, $\langle \mathbb{N}, +, 0, 1 \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, ...

Wnioski

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ [Gödel's completeness]

Ale bywa, że $\Gamma \not\vdash \phi$ **oraz** $\Gamma \not\vdash \neg\phi$ [Γ jest niezupełna]

Gdyż istnieją $\mathcal{M}_1 \models \Gamma, \phi$ **oraz** $\mathcal{M}_2 \models \Gamma, \neg\phi$

Tw. o niezupełności [Gödel's incompleteness]

Każda sensowna **i** dostatecznie silna Γ jest niezupełna.

Chociaż istnieją teorie zupełne:

$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{R}_2, B, D \rangle$, $\langle \mathbb{N}, +, 0, 1 \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, ...

Ogólnie Γ jest zupełna $\leftrightsquigarrow$ Γ jest rozstrzygalna

Wnioski

Zawsze $\mathcal{M} \models \phi$ **albo** $\mathcal{M} \models \neg\phi$

Tw. o pełności $\Gamma \vdash \phi$ **wtw** $\Gamma \models \phi$ [Gödel's completeness]

Ale bywa, że $\Gamma \nvdash \phi$ **oraz** $\Gamma \nvdash \neg\phi$ [Γ jest niezupełna]

Gdyż istnieją $\mathcal{M}_1 \models \Gamma, \phi$ **oraz** $\mathcal{M}_2 \models \Gamma, \neg\phi$

Tw. o niezupełności [Gödel's incompleteness]

Każda sensowna **i** dostatecznie silna Γ jest niezupełna.

Chociaż istnieją teorie zupełne:

$\left\langle \mathbb{Q}, \leq \right\rangle$, $\left\langle \mathbb{R}_2, B, D \right\rangle$, $\left\langle \mathbb{N}, +, 0, 1 \right\rangle$, $\left\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle$, ...

Ogólnie Γ jest zupełna $\leftrightsquigarrow$ Γ jest rozstrzygalna

$\rightsquigarrow$ teoria obliczalności