Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Skrzypczak
Nr albumu: 234587

O złożoności topologicznej języków definiowanych w logice $\mathrm{MSO} + \mathrm{U}$

Praca magisterska
na kierunku INFORMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Mikołaja Bojańczyka
Instytut Informatyki

Lipiec 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Niniejsza praca omawia część wyników z artykułu [HST10]. Zawiera ona dolne szacowania na złożoność topologiczną języków definiowalnych w logice MSO + U. Wnioskiem z zaprezentowanych szacowań, jest twierdzenie o nie istnieniu modelu automatu obejmującego całą logikę MSO + U wśród dość ogólnej klasy automatów — niedeterministycznych z przeliczalnie wieloma stanami i borelowskim warunkiem akceptacji.

Słowa kluczowe

złożoność topologiczna, logika MSO + U, max-automat, ω-BS automat

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.3 Informatyka

Klasyfikacja tematyczna

F. Theory of Computation
F.4 Mathematical Logic and Formal Languages
F.4.3 Formal Languages

Tytuł pracy w języku angielskim

On the topological complexity of languages definable in MSO + U logic

Spis treści

Wprowadzenie 5

1. Definicje 7
1.1. Kwantyfikator U 7

2. Topologia 9
2.1. Hierarchia borelowska 10
2.2. Hierarchia rzutowa 11
2.3. Zbiory zupełne 12
2.4. Topologia a automaty 13

3. Języki $\mathbf{\Pi}^0_{2i}$-zupełne 15

4. Język $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełny 19

5. Wnioski 21
5.0.1. Rozszerzenie wyników 22

Wprowadzenie

Klasyczne wyniki Büchiego i Rabina dowodzą rozstrzygalności teorii MSO dla struktur $S1S$ i SkS. W obu przypadkach dowód przebiega poprzez konstrukcję automatu równoważnego odpowiedniej logice. Jeden z wniosków mówi, że na słowach nieskończonych, logiki MSO i WMSO mają tę samą siłę wyrazu. Języki definiowane przez te logiki nazywane są językami ω-regularnymi.

Niedawno Mikołaj Bojańczyk w pracy [Boj09] zaproponował rozszerzenie pojęcia języka ω-regularnego. Języki takie są równoważnie definiowane przez odpowiednie automaty (tzw. *max*-automaty) i logikę WMSO + U, czyli logikę WMSO (słabą monadyczną drugiego rzędu) wzbogaconą o dodatkowy kwantyfikator U. Główny z wyników mówi, że logika ta jest rozstrzygalna. Rozszerzenie to pozwala wyrażać asymptotyczne własności rozważanych języków, na przykład: „ciągi liter a^n pomiędzy kolejnymi wystąpieniami litery b są wspólnie ograniczone co do długości".

Aktualnie pytaniem otwartym jest, czy MSO + U, czyli pełna logika monadyczna drugiego rzędu rozszerzona o U, jest rozstrzygalna. Jak dotąd nie udało się nawet znaleźć odpowiedniego modelu automatu. Wyniki z tej pracy pokazują dolne oszacowania na złożoność języków definiowalnych w MSO + U. W szczególności zaprezentowany jest nieborelowski język definiowany w tej logice.

Jednym z rozpatrywanych modeli automatu, potencjalnie zdolnym chwytać pełną siłę wyrazu MSO + U, są tak zwane alternujące ω-BS automaty. Aktualnie nie wiadomo czy pustość języka rozpoznawanego przez taki automat jest rozstrzygalna. Nie wiadomo też, jak ma się siła wyrazu takich automatów w stosunku do siły wyrazu MSO + U. Praca ta omawia przykłady języków L_i, definiowalnych zarówno w MSO + U, jak też przez alternujące ω-BS automaty. Kluczową ich własnością jest, że język L_i jest $\mathbf{\Pi}^0_{2i}$-zupełny. Pokazuje to między innymi, że siła wyrazu alternujących ω-BS automatów wykracza poza wszystkie skończone poziomy hierarchii borelowskiej. Spostrzeżenia łączącego języki L_i z alternującymi ω-BS automatami dokonał Szczepan Hummel.

Treść poniższej pracy to, uzupełniony o dodatkowe komentarze i odnośniki, wkład autora w artykuł [HST10].

Rozdział 1

Definicje

Alfabetem nazywać będziemy dowolny skończony lub przeliczalny zbiór, oznaczać go będziemy Σ. Przez Σ^ω oznaczać będziemy zbiór wszystkich słów nieskończonych nad Σ. Do opisu słów (zarówno skończonych jak i nieskończonych) używać będziemy notacji znanej z wyrażeń regularnych.

Na przestrzeni Σ^ω wprowadźmy topologię generowaną przez zbiory otwarte postaci

$$[s] := \{\alpha \in \Sigma^\omega : \exists_n \ n \text{ pierwszych liter } \alpha \text{ to } s\},$$

dla $s \in \Sigma^*$. Wszystkie zbiory otwarte w tej topologii są postaci $L\Sigma^\omega$ dla $L \subseteq \Sigma^*$. Zbiór Σ^ω z topologią opisaną powyżej, nazywany jest *zbiorem Cantora* dla $|\Sigma| < \infty$ zaś *przestrzenią Baire'a* dla $|\Sigma| = \infty$.

Wprowadźmy następujące pomocnicze oznaczenie: dla $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ przez $BC(\mathcal{F})$ nazywać będziemy najmniejszą rodzinę podzbiorów X, zawierającą $\mathcal{F}$ i zamkniętą ze względu na skończone sumy, przecięcia i dopełnienia.

1.1. Kwantyfikator U

Kwantyfikator U stanowi pomysł na rozszerzenie standardowej logiki MSO o dodatkową konstrukcję, pozwalającą chwytać asymptotyczne własności słów. Był on badany między innymi przez Mikołaja Bojańczyka i Thomasa Colcombeta [Boj04], [BC06].

Dla $\alpha \in \Sigma^\omega$ powiemy, że $\alpha \models \mathsf{U}X.\varphi(X)$ gdy

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{E \subseteq \mathbb{N}} \ n \leq |E| < \infty \wedge \alpha \models \varphi(E).$$

Sztandarowym przykładem użycia tego kwantyfikatora jest język

$$L_B = \{a^{n_0} b a^{n_1} b \ldots : \exists_{B \in \mathbb{N}} \forall_{i \in \mathbb{N}} \ n_i \leq B\}.$$

Dość łatwo pokazać, że język ten nie jest regularny. Jednocześnie opisywany jest on formułą

$$\neg \mathsf{U}X.\forall_{i,k \in X} \forall_{i \leq j \leq k} A(j).$$

Logiką MSO + U nazywać będziemy logikę MSO dla słów nieskończonych, wzbogaconą kwantyfikator U.

Logika WMSO + U definiowana jest analogicznie do MSO + U z tym warunkiem, że kwantyfikatory $\exists, \forall$ wiążą jedynie skończone zbiory. Więc na przykład $\exists X.\varphi(X)$ oznacza, że istnieje *skończony* zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $\varphi(X)$. Jak łatwo sprawdzić, podana powyżej formuła definiująca język L_B jest w istocie WMSO + U-formułą, więc jest to przykład języka nieregularnego, definiowalnego w WMSO + U.

Główny wynik dotyczący kwantyfikatora U pochodzi z pracy [Boj09] i mówi, że logika WMSO + U jest rozstrzygalna. Idea dowodu oparta jest o konstrukcję adekwatnego modelu automatu, tzw. max-automatu.

Przez max-automat określamy następujący model automatu: deterministyczny automat skończony wyposażony w skończenie wiele liczników. Liczniki te nie są czytane w trakcie biegu. Możliwe są operacje zerowania licznika, zwiększania o jeden i ustawiania wartości danego licznika na maksimum wartości danych dwóch liczników. Operacje na licznikach są wykonywane w ramach przejść automatu. Każde przejście może wykonać dowolny skończony ciąg operacji. Warunek akceptacji max-automatu jest boolowską kombinacją stwierdzeń „licznik c_i jest ograniczony".

Kluczowym pytaniem otwartym jest, czy logika MSO + U jest rozstrzygalna. Jednym z pomysłów na szukanie odpowiedzi jest próba konstrukcji adekwatnego modelu automatu. Jak na razie żaden taki model nie został znaleziony.

Jedną z prób stanowią tak zwane ω-B i ω-S oraz ich naturalne uogólnienie — ω-BS automaty. Są one szczegółowo opisane w pracy [BC06].

Definicja 1.1.1. *ω-BS automat to niedeterministyczny odpowiednik* max *automatu. Umożliwia on te same operacje na licznikach: zerowanie, zwiększanie o jeden i wybór maksimum. Warunek akceptacji ω-BS automatu mówi, że* istnieje *bieg zgodny z przejściami automatu, dla którego spełniona jest dana boolowska kombinacja stwierdzeń postaci „licznik c_i jest ograniczony" i „licznik c_j zbiega do nieskończoności".*

Wiadomo, że ω-BS automaty nie rozpoznają wszystkich języków definiowalnych w MSO + U. Jednocześnie, jest to największa aktualnie znana podklasa języków definiowalnych w MSO + U o rozstrzygalnym problemie pustości.

Motywacją do podjęcia badań opisywanych w tej pracy, była nadzieja, że dzięki możliwie precyzyjnemu określeniu złożoności topologicznej języków definiowanych w MSO + U, jest szansa określić jakie modele automatu mogą, a jakie nie mogą chwytać wszystkich tych języków.

Rozdział 2

Topologia

W niniejszym rozdziale wprowadzamy podstawowe pojęcia topologiczne używane w dalszej części pracy.

Definicja 2.0.2. *Przestrzeń topologiczną X nazwiemy polską, jeśli spełnia ona następujące warunki:*

- *istnieje metryka d na przestrzeni X zgodna z topologią X i taka w której X jest zupełna (czyli X jest metryzowalna w sposób zupełny),*
- *istnieje przeliczalny gęsty podzbiór X (czyli X jest ośrodkowa).*

Zbiory Σ^ω dla skończonych lub przeliczalnych Σ są przestrzeniami polskimi. Własności topologiczne takich przestrzeni są dokładnie opisane w książce [Kec95]. Poniżej przytoczone są najważniejsze pojęcia i fakty dotyczące topologii Σ^ω.

Wygodnym narzędziem do badania złożoności topologicznej są ciągłe redukcje — topologiczny odpowiednik redukcji problemów obliczeniowych.

Definicja 2.0.3. *Dla ustalonych przestrzeni topologicznych X, Y powiemy że funkcja $f\colon X \to Y$ jest* ciągła *jeśli dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty w X.*

Definicja 2.0.4. *Powiemy, że zbiór $A \subseteq X$ redukuje się w sposób ciągły do zbioru $B \subseteq Y$, jeśli istnieje funkcja ciągła $f\colon X \to Y$, spełniająca*

$$f^{-1}(B) = A.$$

Ciągłe redukcje w zbiorze Cantora i przestrzeni Baire'a są dokładniej opisane w rozdziałach 2 i 21 w książce [Kec95]. Pokazany jest tam między innymi poniższy fakt.

Fakt 2.0.5 (Za [Kec95, Proposition 2.6])**.** *Każda funkcja ciągła $f\colon \Sigma^\omega \to \Gamma^\omega$ indukuje przekształcenie $\overline{f}\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ spełniające dla każdego $\alpha \in \Sigma^\omega$:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left|\overline{f}(\alpha|_n)\right| = \infty$,
2. *dla każdych $n \leq m$ słowo skończone $\overline{f}(\alpha|_n)$ jest prefiksem słowa $\overline{f}(\alpha|_m)$.*

3. *dla każdego n słowo skończone $\overline{f}(\alpha|_m)$ jest prefiksem słowa nieskończonego $f(\alpha)$.*

I odwrotnie, dla każdego przekształcenia monotonicznego $\overline{f}\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ spełniającego $\lim_{n\to\infty} \left|\overline{f}(\alpha|_n)\right| = \infty$, funkcja $f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}(\alpha|_n)$ jest dobrze określona i jest funkcją ciągłą $\Sigma^\omega \to \Gamma^\omega$.

2.1. Hierarchia borelowska

Definicja 2.1.1. *Ustalmy przestrzeń polską X z rodziną zbiorów otwartych $\mathcal{U}_X$. Zdefiniujmy indukcyjnie, dla $\eta < \omega_1$ rodziny:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^0_1(X) &= \mathcal{U}_X, \\
\mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) &= \left\{ \bigcup_n S_n : (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{1\le\tau<\eta} \mathbf{\Pi}^0_\tau(X) \right\}, \\
\mathbf{\Pi}^0_\eta(X) &= \left\{ X \setminus S : S \in \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \right\}, \\
\mathbf{\Delta}^0_\eta(X) &= \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\eta(X), \\
\mathcal{B}(X) &= \bigcup_{\eta<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X).
\end{aligned}$$

Gdy jest jasne o jaką przestrzeń X chodzi, często pisać będziemy w skrócie na przykład $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ zamiast $\mathbf{\Sigma}^0_\eta(X)$.

Zdefiniowane powyżej rodziny $\mathbf{\Sigma}^0_\eta, \mathbf{\Pi}^0_\eta, \mathbf{\Delta}^0_\eta$ nazywamy poziomami hierarchii borelowskiej, zaś rodzinę $\mathcal{B}$ nazywamy rodziną zbiorów borelowskich.

Fakt 2.1.2. *Dla dowolnych $1 \le \tau < \eta < \omega_1$ zachodzi:*

1. $\mathbf{\Sigma}^0_\tau \cup \mathbf{\Pi}^0_\tau \subseteq \mathbf{\Delta}^0_\eta$,
2. *gdy przestrzeń jest nieprzeliczalna, to $\mathbf{\Sigma}^0_\eta \neq \mathbf{\Pi}^0_\eta$,*
3. *$\mathbf{\Delta}^0_\eta$ stanowi ciało zbiorów,*
4. *zarówno $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ jak i $\mathbf{\Pi}^0_\eta$ są zamknięte ze względu na skończone sumy i przecięcia,*
5. *$\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ jest zamknięta ze względu na przeliczalne sumy,*
6. *$\mathbf{\Pi}^0_\eta$ jest zamknięta ze względu na przeliczalne przecięcia,*
7. *każda z powyższych rodzin zawiera kontinuum zbiorów,*
8. *$\mathcal{B}$ jest σ-ciałem.*

Własności te (w przypadku nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej) są zobrazowane na poniższym schemacie, gdzie każda strzałka to ścisła inkluzja odpowiednich rodzin. Długość tej hierarchii to ω_1.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & & & \\
\diagup & & \diagdown \quad \diagup & & \diagdown \quad \diagup & & & & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & & \dots & \\
\diagdown & & \diagup \quad \diagdown & & \diagup \quad \diagdown & & & & \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & & &
\end{array}
$$

2.2. Hierarchia rzutowa

Hierarchię borelowską można przedłużyć, definiując klasy złożone z bardziej skomplikowanych zbiorów. Dla odróżnienia, klasy te oznaczać będziemy numerem 1 w górnym indeksie.

Definicja 2.2.1. *Ustalmy przestrzeń polską X. Niech $\mathbf{\Sigma}^1_0(X) = \mathbf{\Pi}^1_0(X) = \mathcal{B}(X)$. Zdefiniujmy przez indukcję dla $n < \omega$ rodziny*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) &= \left\{\pi_X(B) : Y \text{— przestrzeń polska} \wedge B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times Y)\right\}, \\
\mathbf{\Pi}^1_{n+1}(X) &= \left\{X \setminus A : A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)\right\}, \\
\mathbf{\Delta}^1_\eta(X) &= \mathbf{\Sigma}^1_\eta(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_\eta(X). \\
\mathcal{P}(X) &= \bigcup_{n<\omega} \mathbf{\Sigma}^1_n(X).
\end{aligned}
$$

Zdefiniowane powyżej rodziny $\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n, \mathbf{\Delta}^1_n$ nazywamy poziomami hierarchii rzutowej, zaś rodzinę $\mathcal{P}$ nazywamy rodziną zbiorów rzutowych.

Dodatkowo, rodzinę $\mathbf{\Sigma}^1_1$ nazywamy rodziną zbiorów analitycznych, zaś $\mathbf{\Pi}^1_1$ rodziną zbiorów koanalitycznych.

Fakt 2.2.2. *Dla dowolnych $0 \leq m < n < \omega$ zachodzi;*

1. $\mathbf{\Sigma}^1_m \cup \mathbf{\Pi}^1_m \subseteq \mathbf{\Delta}^1_n$,
2. *gdy przestrzeń jest nieprzeliczalna, to* $\mathbf{\Sigma}^1_n \neq \mathbf{\Pi}^1_n$,
3. $\mathbf{\Delta}^1_n$ *jest σ-ciałem,*
4. *zarówno $\mathbf{\Sigma}^1_n$ jak i $\mathbf{\Pi}^1_n$ są zamknięte ze względu na przeliczalne sumy i przecięcia,*
5. *każda z powyższych rodzin zawiera kontinuum zbiorów,*

Dodatkowo prawdą jest następujące, nietrywialne twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.3 (Suslin)**.** *W dowolnej przestrzeni polskiej X ma miejsce równość*

$$\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathcal{B}.$$

Własności hierarchii rzutowej (w przypadku nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej) zobrazowane są na poniższym schemacie, gdzie każda strzałka to ścisła inkluzja. Długość tej hierarchii to ω.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & & \mathbf{\Sigma}^1_3 \\ \mathcal{B} = \mathbf{\Delta}^1_1 & \diagup \atop \diagdown & & \diagdown \atop \diagup & \mathbf{\Delta}^1_2 & \diagup \atop \diagdown \quad \diagdown \atop \diagup & \mathbf{\Delta}^1_3 & \diagup \atop \diagdown & & \cdots \\ & & \mathbf{\Pi}^1_1 & & & \mathbf{\Pi}^1_2 & & & \mathbf{\Pi}^1_3 \end{array}$$

2.3. Zbiory zupełne

Rodziny postaci $\mathbf{\Sigma}^0_\eta, \mathbf{\Pi}^0_\eta, \mathbf{\Delta}^0_\eta, BC(\mathbf{\Sigma}^0_\eta), \mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n, \mathbf{\Delta}^1_\eta$ nazywać będziemy klasami złożoności topologicznej (ozn. $\mathcal{C}$).

Ciągłe redukcje *zachowują* klasy złożoności topologicznej, formalnie wyraża to poniższy fakt.

Fakt 2.3.1. *Dla dowolnej klasy złożoności topologicznej $\mathcal{C}$, jeśli f jest ciągłą redukcją A do B (czyli $f^{-1}(B) = A$) oraz B leży w klasie $\mathcal{C}$, to $A \in \mathcal{C}$.*

Analogicznie jak w teorii obliczeń, zdefiniowane są zbiory trudne i zupełne w odpowiednich klasach.

Definicja 2.3.2. *Zbiór $A \subseteq \Sigma^\omega$ nazywamy* trudnym *w klasie $\mathcal{C}$ (równoważnie $\mathcal{C}$-trudnym) jeśli dla każdego $B \in \mathcal{C}$ istnieje ciągła redukcja B do A.*

Jeśli dodatkowo $A \in \mathcal{C}$, to A nazywamy zupełnym *w $\mathcal{C}$, lub $\mathcal{C}$-zupełnym.*

Fakt 2.3.3. *Załóżmy, że dany zbiór $A \subseteq X$ jest $\mathcal{C}$-trudny, dla pewnej klasy złożoności topologicznej $\mathcal{C}$.*

Jeśli istnieje ciągła redukcja A do B, to B jest $\mathcal{C}$-trudny.

Jeśli $\mathcal{C}'$ to rodzina dopełnień zbiorów z $\mathcal{C}$, to $X \setminus A$ jest $\mathcal{C}'$-trudny.

Fakt 2.3.4. *Jeśli $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ są klasami złożoności topologicznej i $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{D}$ oraz $A \subseteq X$ jest $\mathcal{D}$-trudny, to $A \notin \mathcal{C}$.*

Okazuje się, że w klasach $\mathbf{\Sigma}^0_\eta, \mathbf{\Pi}^0_\eta, \mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n$ istnieją zbiory zupełne. Poniżej przedstawione są standardowe konstrukcje dla wybranych klas.

Fakt 2.3.5. *Zbiór $\{\alpha \in 2^\omega : \exists_{i\in\mathbb{N}}\ \alpha_i = 1\}$ jest $\mathbf{\Sigma}^0_1$-zupełny.*

Ogólniej zbiór

$$\left\{\alpha \in 2^{\mathbb{N}^i} : \exists_{m_i} \forall_{m_{i-1}} \exists_{m_{i-2}} \dots \forall_{m_1}\ \alpha(m_i, m_{i-1}, \dots, m_1) = 1\right\}$$

jest $\mathbf{\Sigma}^0_i$-zupełny.

Definicja 2.3.6. *Drzewem nad $\mathbb{N}$ nazywamy dowolny podzbiór $T \subseteq \mathbb{N}^*$ zamknięty na prefiksy (czyli $\forall_{s\in T} \forall_{r\leq s}\ r \in T$). Powiemy, że drzewo T posiada nieskończoną gałąź jeśli istnieje $\alpha \in \mathbb{N}^\omega$ spełniające*

$$\forall_{i\in\mathbb{N}}\ \alpha|_i \in T.$$

Zbiór wszystkich drzew nad $\mathbb{N}$ oznaczany $\mathcal{T} \subseteq 2^{\mathbb{N}^*}$ jest zbiorem domkniętym w $2^{\mathbb{N}^*}$. Przez $B \subseteq \mathcal{T}$ oznaczmy zbiór tych drzew T które posiadają przynajmniej jedną nieskończoną gałąź.

Fakt 2.3.7. *Zbiór $B \subseteq \mathcal{T}$ jest zbiorem $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełnym. W szczególności nie jest to zbiór borelowski.*

2.4. Topologia a automaty

Okazuje się, że złożoność topologiczna ma ścisły związek z teorią obliczeń nieskończonych. W szczególności, w oparciu o topologiczną złożoność pewnych języków, można pokazać, że nie są one rozpoznawane przez określony model automatu. Przykładem takiego rozumowania może być dowód twierdzenia 5.1 w pracy [Boj09].

Poniższe fakty prezentują dwa podstawowe sposoby szacowania złożoności topologicznej języków. W obu tych spostrzeżeniach dopuszczamy automaty o przeliczalnie wielu stanach, uwzględniając w ten sposób różnego rodzaju automaty licznikowe lub stosowe. Poniższa definicja formalizuje pojęcie nieskończonego automatu w sposób podobny do tzw. automatów Borelowskich rozważanych w książce [PEP04].

Definicja 2.4.1. *Uogólniony automat nad alfabetem* Σ *to czwórka* $\mathcal{A} = \langle Q, q_0, \delta, F\rangle$ *gdzie:*

- Q *to skończony lub przeliczalny zbiór nazywany zbiorem stanów automatu,*
- $q_0 \in Q$ *to wyróżniony stan początkowy,*
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ *jest relacją przejścia,*
- $F \subseteq Q^\omega$ *to zbiór* biegów akceptujących.

Powiemy, że automat $\mathcal{A}$ *akceptuje słowo* $\alpha \in \Sigma^\omega$ *jeśli istnieje bieg* $\rho \in Q^\omega$ *zgodny z* δ *i należący do zbioru* F.

Powiemy, że automat $\mathcal{A}$ *jest borelowski jeśli* $F \in \mathcal{B}(Q^\omega)$. *Powiemy, że automat* $\mathcal{A}$ *jest deterministyczny jeśli* δ *jest funkcją z* $Q \times \Sigma$ *w* Q.

Fakt 2.4.2. *Rozważmy dowolny uogólniony automat deterministyczny* $\mathcal{A}$ *z warunkiem akceptacji* $F \subseteq Q^\omega$. *Złożoność topologiczna języka* $L(\mathcal{A})$ *jest co najwyżej taka, jak złożoność warunku akceptacji* F.

Dowód. Automat deterministyczny definiuje monotoniczną funkcję $\mathrm{mov}\colon \Sigma^* \to Q^*$, przypisującą wczytanemu słowu ciąg osiągniętych stanów. Wobec tego funkcja $\mathrm{run}\colon \Sigma^\omega \to Q^\omega$ przypisująca słowom wejściowym biegi automatu, jest ciągła na mocy faktu 2.0.5. Wobec tego język $L(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^\omega : \mathrm{run}(\alpha) \in F\}$ jest przeciwobrazem F przy funkcji ciągłej run. ■

Fakt 2.4.3. *Rozważmy dowolny uogólniony automat niedeterministyczny* $\mathcal{A}$ *o borelowskim warunku akceptacji* $F \in \mathcal{B}(Q^\omega)$. *Wtedy* $L(\mathcal{A}) \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\Sigma^\omega)$.

Dowód. Zbiór poprawnych biegów automatu $\mathcal{R} \subseteq \Sigma^\omega \times Q^\omega$ jest zbiorem domkniętym w $\Sigma^\omega \times Q^\omega$. Wobec tego

$$L(\mathcal{A}) = \pi_{\Sigma^\omega}\left(\mathcal{R} \cap F\right)$$

jest rzutem zbioru borelowskiego, więc z definicji należy do $\mathbf{\Sigma}^1_1$. ■

W poniższych faktach podsumowane są znane wyniki dotyczące złożoności topologicznej wybranych modeli obliczeń. Podane szacowania są dokładne — dana rodzina języków leży w danej klasie złożoności i wykracza poza każdą niższą klasę.

Fakt 2.4.4. *Języki ω-regularne leżą w klasie $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.*
Języki regularne drzew nieskończonych leżą w klasie $\mathbf{\Delta}^1_2$.

Kolejny wynik pochodzi z niedawno opublikowanej pracy [CDFM09]. Warto zauważyć, że jakkolwiek max-automaty definiują języki o tej samej złożoności, to jednak definiują ich istotnie więcej.

Fakt 2.4.5. *Języki definiowane przez* max-*automaty leżą w klasie $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.*

Następujący wynik Szymona Toruńczyka i Szczepana Hummela pochodzi z pracy [HST10].

Fakt 2.4.6. *Języki rozpoznawane przez ω-BS automaty leżą w klasie $\mathbf{\Sigma}^0_4$.*

Następujący fakt to standardowe rozumowanie polegające na zamianie kwantyfikatorów na operacje teoriomnogościowe. W przeciwieństwie do powyższych stwierdzeń, podane tutaj szacowanie jest jedynie górnym ograniczeniem. Jak na razie nie wiadomo jak wysoko w hierarchii rzutowej sięgają zbiory definiowalne w MSO + U.

Fakt 2.4.7. *Dla każdej formuły* MSO + U φ *o zagłębieniu kwantyfikatorów n, zachodzi*

$$L(\varphi) \in \mathbf{\Delta}^1_{n+1}.$$

Rozdział 3

Języki $\mathbf{\Pi}^0_{2i}$-zupełne

W tym rozdziale skonstruujemy języki L_i, definiowalne w MSO + U i zupełne w klasach $\mathbf{\Pi}^0_{2i}$. Przykłady te dają niższe dolne szacowanie niż przykład z rozdziału 4, jednak mają swoje konsekwencje związane z alternującymi ω-BS automatami. Wnioski te są podsumowane pod koniec tego rozdziału.

Dla wygody notacji, pracować będziemy w przestrzeniach ciągów wektorów liczb naturalnych.

Definicja 3.0.8. *Ustalmy $\Sigma = \{a, b, \sharp, *\}$.*

Dla każdego $i \geq 0$ niech

$$\mathcal{N}_i = \left(\mathbb{N}^i\right)^{\leq\omega} = \left(\mathbb{N}^i\right)^* \cup \left(\mathbb{N}^i\right)^\omega .$$

W szczególności $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.

Niech $W_i : \mathcal{N}_i \to \Sigma^\omega$ mapuje po kolei wektory danego słowa według wzoru $(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1) \mapsto a^{v_i} b a^{v_{i-1}} b \ldots b a^{v_1} \sharp$. Jeśli dane słowo $\eta \in \mathcal{N}_i$ jest skończone, to $W_i(\eta)$ jest od pewnego momentu stałe, równe $*$.

Zauważmy, że możemy bezpośrednio w logice MSO wyrazić, że dane słowo $\alpha \in \Sigma^\omega$ spełnia $\alpha \in W_i(\mathcal{N}_i)$, formułę wyrażającą ten fakt oznaczmy γ_i.

Wprowadźmy dodatkowo dwie pomocnicze operacje.

Definicja 3.0.9. *Niech* $\mathrm{dom} : \mathcal{N}_i \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ *przypisuje danemu ciągowi jego dziedzinę lub równoważnie długość.*

Niech $\pi_i : \mathcal{N}_i \to \mathcal{N}_{i-1}$ obcina z danego ciągu pierwszą współrzędną, czyli

$$\pi_i \left((v^n_i, v^n_{i-1}, \ldots, v^n_1)_n\right) = (v^n_{i-1}, v^n_{i-2}, \ldots, v^n_1)_n.$$

Dla $\eta \in \mathcal{N}_i$ oraz $D \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$ przez $\eta|_D \in \mathcal{N}_i$ oznaczamy słowo powstałe przez wybranie z η wektorów leżących na pozycjach w zbiorze D.

Dla $i > 0$, $m \in \mathbb{N}$ oraz $\eta \in \mathcal{N}_i$ niech

$$\sigma(\eta, m) \subseteq \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : v^n_i = m\},$$

oraz $\eta \restriction_m \in \mathcal{N}_i$ będzie ciągiem powstałym z η przez wybranie wektorów z pozycji $\sigma(\eta, m)$.

Możemy teraz przystąpić do definicji szukanych języków.

Definicja 3.0.10. *Dla $i \geq 0$ niech L_i będzie zbiorem tych $\eta \in \mathcal{N}_i$, że*

$$\exists^{\infty}_{m_i} \exists^{\infty}_{m_{i-1}} \ldots \exists^{\infty}_{m_1} \exists^{\infty}_{k} \; \eta_k = (m_i, m_{i-1}, \ldots, m_1),$$

gdzie $\exists^{\infty}$ oznacza „istnieje nieskończenie wiele”.

Zauważmy, że ze względu na ostatni kwantyfikator $\exists^{\infty}_{k}$ zachodzi w istocie $L_i \subseteq (\mathbb{N}^i)^{\omega} \subseteq \mathcal{N}_i$.

Poniższy lemat przedstawia języki L_i w postaci indukcyjnej.

Lemat 3.0.11. *$L_0 = \{\omega\}$, zaś dla $i > 0$ zachodzi: $\eta \in L_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieskończenie wiele $m \in \mathbb{N}$ spełniających*

$$\pi_i\left(\eta \restriction_m\right) \in L_{i-1}.$$

Złożoność topologiczna zbiorów $W_i(L_i)$ jest analizowana w pracy [TL93, strony 595–596], w szczególności jest tam pokazany poniższy fakt.

Fakt 3.0.12. *Zbiór $W_i(L_i)$ jest $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}$-zupełny.*

Przejdziemy teraz do formuł MSO + U definiujących języki $W_i(L_i)$. Formuły będą opisywane w oparciu o ciągi wektorów — czyli elementy $\eta \in \mathcal{N}_i$. Kosztem pewnej komplikacji można je przepisać na formuły operujące na kodach $W_i(\eta)$.

Zdefiniujmy własność

$$\left(v_i^n, v_{i-1}^n, \ldots, v_1^n\right)_n \models B_i(X) \iff \exists_{B \in \mathbb{N}} \forall_{n \in X} \; v_i^n \leq B.$$

Innymi słowy $\eta \models B_i(X)$ gdy pierwsze współrzędne η na pozycjach ze zbioru X są wspólnie ograniczone.

Zauważmy, że powyższą własność można bezpośrednio przepisać do logiki MSO + U używając kwantyfikatora U, mianowicie: istnieją formuły ψ_i logiki MSO + U, o tej własności, że dla każdego $\eta \in \mathcal{N}_i$ oraz $X \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi

$$\eta \models B_i(X) \iff W_i(\eta) \models \psi_i(\widetilde{X}),$$

gdzie $\widetilde{X}$ to pozycje w słowie $W_i(\eta)$ odpowiadające wektorom na pozycjach z X. Można dodatkowo zapewnić, by formuły $\psi_i(X)$ wymagały, by zbiór X faktycznie kodował pewien wybór wektorów, czyli dla każdego kodu wektora, albo wszystkie jego pozycje były zawarte w X, albo żadna.

Skonstruujmy teraz formuły definiujące $W_i(L_i)$. Niech φ_0 mówi, że słowo $\alpha \in \Sigma^{\omega}$ spełnia $\alpha = W_0(\omega) = \sharp^{\omega}$. Dla $i > 0$ niech

$$\varphi_i(Z) = \gamma_i \wedge \forall_{X \subseteq Z} \left(\psi_i(X) \Rightarrow \exists_{Y \subseteq Z} X \cap Y = \emptyset \wedge \psi_i(Y) \wedge \widetilde{\varphi_{i-1}}(Y)\right),$$

gdzie $\widetilde{\varphi_{i-1}}$ to formuła φ_{i-1} w której kwantyfikatory zostały tak ograniczone, by pomijać pierwszą współrzędną każdego wektora.

Pozostaje pokazać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.0.13. *Dla każdego $i \geq 0$ oraz $\eta \in \mathcal{N}_i$, zachodzi*

$$\eta \in L_i \Leftrightarrow W_i(\eta) \models \varphi_i(\omega).$$

Lemat 3.0.14. *Jeśli $\eta \in \mathcal{N}_i$, $D \subseteq Y \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$ i zachodzi $\eta|_D \in L_i$, to $\eta|_Y \in L_i$.*

Dowód. Oczywisty, z monotoniczności kwantyfikatora $\exists^\infty$. ■

Lemat 3.0.15. *Jeśli $\eta \in \mathcal{N}_i$, $X, Y \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$, $X \cap Y = \emptyset$ oraz zachodzi $\eta|_{X \cup Y} \in L_i$, to $\eta|_X \in L_i$, lub $\eta|_Y \in L_i$.*

Dowód. Dowód przez indukcję, w oparciu o lemat 3.0.11. ■

Dowód twierdzenia. Dowód będzie przebiegał przez indukcję po i. Dla $i = 0$ teza oczywiście zachodzi. Weźmy $i > 0$.

($\Rightarrow$) Ustalmy $\eta \in L_i$. Weźmy dowolny $X \subseteq \omega$ spełniający $\eta \models B_i(X)$. Załóżmy, że pierwsze współrzędne η na pozycjach z X są ograniczone przez M. Korzystając z lematu 3.0.11 wiemy, że istnieje pewne $m > M$, dla którego $\pi_i(\eta \restriction_m) \in L_{i-1}$. Weźmy za $Y = \sigma(\eta, m)$. Wtedy wiemy, że $\pi_i(\eta|_Y) \in L_{i-1}$ i $Y \cap X = \emptyset$. Więc pokazaliśmy, że $W_i(\eta) \models \varphi_i(\omega)$.

($\Leftarrow$) Weźmy $\eta \in \mathcal{N}_i$ spełniające $W_i(\eta) \models \varphi_i(\omega)$. Załóżmy przez sprzeczność, że istnieje tylko skończenie wiele m z lematu 3.0.11. Załóżmy, że największy z nich to M.

Weźmy $X = \bigcup_{m \le M} \sigma(\eta, m)$. Oczywiście $\eta \models B_i(X)$. Wiemy więc, że istnieje $Y \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $\eta \models B_i(Y)$, Y rozłączny z X i $\pi_i(\eta|_Y) \in L_{i-1}$. Dodatkowo, załóżmy, że najwyższe współrzędne η w Y są ograniczone przez N.

W takim razie
$$Y \subseteq \bigcup_{M < m \le N} \sigma_i(\eta, m).$$

Więc korzystając wielokrotnie z lematu 3.0.15, dla $Y \cap \sigma_i(\eta, m)$, po $M < m \le N$, dostajemy, że dla pewnego $M < m_0 \le N$, zachodzi $\pi_i(\eta|_{Y \cap \sigma_i(m_0, \eta)}) \in L_{i-1}$.

W oparciu o lemat 3.0.14, dostajemy, że w takim razie
$$\pi_i(\eta \restriction_{m_0}) \in L_{i-1}.$$

Ale $m_0 > M$, co daje sprzeczność z definicją M.

■

Wobec powyższego twierdzenia język $W_i(L_i)$ jest MSO + U-definiowalny formułą $\varphi_i(\omega)$.

Poniżej przytoczone są wyniki Szczepana Hummela, uzupełniające powyższe spostrzeżenia.

Definicja 3.0.16. *Alternującym ω-BS automatem nazywać będziemy automat powstały z ω-BS automatu przez zastąpienie niedeterminizmu alternacją. Z punktu widzenia konstrukcji automatu, jedyna różnica jest taka, że zbiór stanów automatu podzielony jest na dwie części, nazywane stanami Adama i Ewy.*

Dla ustalonego słowa $\alpha \in \Sigma^\omega$ automat taki definiuje grę w której biorą udział Adam i Ewa. Pozycje w tej grze to pary $\langle n, S \rangle$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ to pozycja w *słowie, a S to stan automatu (włączając w to liczniki). W zależności od tego czy stan w którym znajduje się automat należy do Adama, czy do Ewy, odpowiedni gracz podejmuje decyzję, wybierając jedno z dostępnych w automacie przejść. Na skutek powstałej tak nieskończonej rozgrywki, definiowany jest ciąg stanów automatu. Jeśli ciąg ten jest akceptujący, wygrywa Ewa, w przeciwnym wypadku wygrywa Adam.*

Zbiór $L(\mathcal{A})$, to zbiór tych słów na których Ewa ma strategię wygrywającą.

Twierdzenie 3.0.17 (Hummel 2010)**.** *Języki $W_i(L_i)$ są rozpoznawane przez alternujące ω-BS automaty. Konstrukcja odpowiedniego automatu stanowi bezpośrednie przełożenie formuł φ_i.*

Szkic dowodu. Automat $\mathcal{A}_i$ powstaje bezpośrednio z formuły φ_i, poprzez zastąpienie kwantyfikacji po zbiorach X, Y decyzjami antagonistycznych graczy, czy dany element $n \in \mathbb{N}$ ma należeć do odpowiedniego zbioru.

Dodatkowe rozumowanie indukcyjne pokazuje, że w tym przypadku kwantyfikacja po zbiorach i konstrukcja ich *w locie*, są równoważne. ■

Wnioski z tego spostrzeżenia są podsumowane w rozdziale 5.

Rozdział 4

Język Σ_1^1-zupełny

W tym rozdziale przedstawiony jest przykład zbioru $\mathbf{\Sigma}_1^1$-zupełnego definiowalnego w logice MSO + U.

Dla uproszczenia notacji, niech $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$ oznacza zbiór wszystkich drzew nieskończonych. Oczywiście zbiór drzew z nieskończoną gałęzią B spełnia $B \subseteq \mathcal{T}_\infty$. Dodatkowo, ponieważ $\mathcal{T}_\infty \in \mathbf{\Pi}_2^0(\mathcal{T})$, więc ograniczenie rozważań do $\mathcal{T}_\infty$ jako podprzestrzeni $\mathcal{T}$ nie zmienia złożoności topologicznej zbioru B.

Definicja 4.0.18. *Ustalmy alfabet $\Sigma = \{a, b, \sharp\}$. Niech $\leq$ będzie pewnym ustalonym porządkiem typu ω na $\mathbb{N}^*$. Rozważmy kodowanie $W \colon \mathcal{T}_\infty \to \Sigma^\omega$ wypisujące wierzchołki drzewa zgodnie z porządkiem $\leq$, w formacie $(v_0, v_1, \ldots, v_n) \mapsto a^{v_0}ba^{v_1}b\ldots ba^{v_n}\sharp$.*

Jak łatwo sprawdzić, kodowanie W jest funkcją ciągłą i różnowartościową.

Definicja 4.0.19. *Poniższą własność drzewa $T \in \mathcal{T}_\infty$ nazywać będę własnością $\mathcal{G}$:*

Istnieje nieskończony podzbiór wierzchołków $T' \subseteq T$, taki, że dla każdego $R \in \mathbb{N}$, zbiór

$$\{v_k : v \in T', 0 \leq k < \min(R, |v|)\} \subseteq \mathbb{N},$$

jest ograniczony.

Fakt 4.0.20. *Własność $\mathcal{G}$ jest równoważna posiadaniu nieskończonej gałęzi przez T.*

Dowód. Jeśli drzewo ma nieskończoną gałąź $\epsilon < v_1 < v_2 < \ldots$, to można ją wziąć jako T'. Wtedy T' jest nieskończone. Dodatkowo, dla każdego R, wszystkie wierzchołki w T' (oprócz pierwszych $R-1$) mają te same pierwsze R współrzędnych — dokładnie wyrazy v_R jako słowa. Więc są one wszystkie wspólnie ograniczone przez

$$\max\{v_0, v_1, \ldots, v_{R-1}\}.$$

Teraz w drugą stronę: Załóżmy, że podzbiór $T' \subseteq T$ ma własność $\mathcal{G}$. Rozważmy $F \subseteq T$ zdefiniowane jako zbiór prefiksów wszystkich słów z T'. Wtedy F jest drzewem o skończonym rozgałęzieniu. A zatem, z lematu Königa posiada nieskończoną gałąź. ■

Definicja 4.0.21. *Powiemy, że zbiór pozycji S w słowie $\alpha \in \Sigma^\omega$ jest dobry, jeśli:*

- *z każdego kodu postaci $\sharp a^{n_1} b a^{n_2} b \ldots a^{n_m} \sharp$, zbiór S zawiera pewien jego spójny odcinek, zaczynający się tuż za $\sharp$ i kończący się tuż przed którąś literą b lub tuż przed końcowym $\sharp$,*

- *S ma wspólnie ograniczoną liczbę wystąpień litery b w poszczególnych kodach.*

Definicja 4.0.22. *Formuła φ mówi, że istnieje nieskończony podzbiór $G \subseteq \omega$, zawierający tylko całe kody pomiędzy kolejnymi literami $\sharp$, taki że dla każdego $S \subseteq G$ które jest dobre, bloki liter a^n występujące w S są wspólnie ograniczone co do rozmiaru.*

Opisana powyżej formuła jest formułą MSO + U, korzystającą dwukrotnie z kwantyfikatora U— raz by wyrazić że wystąpienia liter b w blokach są ograniczone i raz by wyrazić, że długości bloków a^n są ograniczone.

Fakt 4.0.23. *Drzewo $T \in \mathcal{T}_\infty$ ma własność $\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy słowo $\alpha = W(T) \in \Sigma^\omega$ spełnia*

$$\alpha \models \varphi.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\alpha \models \varphi$. Weźmy za $T' \subseteq T$ podzbiór wyznaczany przez $G \subseteq \omega$. Weźmy dowolne R i określmy za zbiór S kody wierzchołków w G obcięte do pierwszych R współrzędnych. Wtedy wystąpienia liter b w kodach w S są wspólnie ograniczone przez R, więc bloki a^n są wspólnie ograniczone. Co daje ograniczoność odpowiedniego zbioru z definicji własności $\mathcal{G}$.

Załóżmy teraz, że T ma własność $\mathcal{G}$. Weźmy podzbiór $T' \subseteq T$ z własności $\mathcal{G}$ i jako G wybierzmy kody tych wierzchołków, które leżą w T'.

Weźmy dowolny dobry zbiór $S \subseteq G$. Wiemy, że wystąpienia liter b są wspólnie ograniczone, ograniczenie to nazwijmy R. W takim razie (z własności $\mathcal{G}$ dla tego R) zbiór wszystkich współrzędnych $v_0, v_1, \ldots, v_R$ jest ograniczony, a jest to nadzbiór zbioru bloków a^n występujących w S. Więc bloki te są ograniczone w S. ■

Czyli $W\colon \mathcal{T}_\infty \to \Sigma^\omega$ zadaje ciągłą redukcję zbioru $B \subseteq \mathcal{T}_\infty$ do zbioru $M = \{\alpha : \alpha \models \varphi\} \subseteq \Sigma^\omega$. Łatwo sprawdzić, że zbiór M jest analityczny, wynika to z postaci warunku $\mathcal{G}$. Zatem zbiór M jest $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełny.

Należy przy tym pamiętać, że $W(B) \subsetneq M$, gdyż nie jest możliwe wyrażenie w logice MSO + U faktu, że dany ciąg $\alpha \in \Sigma^\omega$ jest kodem drzewa.

Rozdział 5

Wnioski

Zaprezentowane powyżej przykłady i wyniki topologiczne pozwalają wyciągnąć następujące wnioski.

Uwaga 5.0.24 (Z rozdziału 4)**.** *Nie istnieje model niedeterministycznego automatu z borelowskim warunkiem akceptacji, chwytający pełną siłę wyrazu logiki* MSO + U*.*

Dowód. Załóżmy, że taki model istnieje. Weźmy język M zdefiniowany w rozdziale 4, o którym pokazaliśmy że jest $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełny. Niech $\mathcal{A}$ to niedeterministyczny automat o (potencjalnie przeliczalnym) zbiorze stanów Q i borelowskim warunku akceptacji $\mathcal{S} \subseteq Q^\omega$, rozpoznający język $\Sigma^\omega \setminus M$. Wobec faktu 2.4.3, zachodzi $\Sigma^\omega \setminus M \in \mathbf{\Sigma}^1_1$. Ale również $M \in \mathbf{\Sigma}^1_1$, więc z twierdzenia Souslina $M \in \mathcal{B}$. Daje to sprzeczność, bo wiemy że M jest $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełny, a $\mathcal{B} \subsetneq \mathbf{\Sigma}^1_1$. ∎

W zasadzie wszystkie znane warunki akceptacji automatu są borelowskie. By wyjść poza zbiory borelowskie, należałoby w warunku akceptacji w istotny sposób używać obiektów wyższego rzędu (np. podzbiorów $\mathbb{N}$). W związku z tym, powyższy wniosek można wyrazić następująco:

> Niezależnie od stopnia komplikacji konstrukcji automatu niedeterministycznego, żaden *naturalny* warunek akceptacji nie wystarczy by uchwycić pełną siłę wyrazu MSO + U. W szczególności dodawanie skomplikowanych operacji na licznikach, stosach czy kolejkach danych nie wystarczy.

Dodatkowo warto zauważyć, że zbiór M definiowany w rozdziale 4 stanowi dość rzadki przykład języka nieborelowskiego, definiowanego relatywnie prostą logiką na słowach nieskończonych.

Uwaga 5.0.25 (Z rozdziału 3)**.** *Alternujące ω-BS automaty rozpoznają istotnie więcej języków aniżeli niedeterministyczne ω-BS automaty.*

Dowód. Przytoczone wcześniej spostrzeżenie Szczepana Hummela pokazuje, że języki $W_i(L_i)$ są rozpoznawane przez alternujące ω-BS automaty. Jednocześnie niedeterministyczne ω-BS automaty definiują jedynie języki leżące w klasie $\mathbf{\Sigma}^0_4$. ∎

W momencie spisywania tej pracy wciąż nie była znana żadna z potencjalnych inkluzji pomiędzy rodziną języków definiowanych przez alternujące ω-BS automaty, a logikę MSO + U. Poniższy fakt sugerował możliwą metodę pokazania, że MSO + U nie może być uchwycone przez alternujące ω-BS automaty. Metodę tę udało się zastosować, ostateczne wyniki są podsumowane w rozdziale 5.0.1.

Fakt 5.0.26. *Języki rozpoznawane przez alternujące ω-BS automaty leżą w klasie $\mathbf{\Delta}^1_2$.*

Dowód. Funkcja przypisująca słowu nieskończonemu grę opisaną w definicji alternujących ω-BS automatów jest ciągła. Jednocześnie, warunek akceptacji dla gry mówi, że istnieje strategia Ewy, taka że dla każdej strategii Adama, rozgrywkę zgodną z tymi strategiami wygrywa Ewa. A zatem jest to warunek $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Oczywiście automaty alternujące są zamknięte ze względu na dopełnienie, więc warunek ten leży również w $\mathbf{\Pi}^1_2$. ■

5.0.1. Rozszerzenie wyników

Wyniki zaprezentowane w tej pracy zostały (już po jej przygotowaniu) rozszerzone. Udało się mianowicie, bazując na przykładzie języka M, wskazać ciąg języków $M_1, M_2, \ldots$ definiowalnych w MSO + U i trudnych dla coraz wyższych klas hierarchii rzutowej. Konstrukcja ta pokazuje że logika MSO + U nie jest chwytana przez żadne alternujące automaty z borelowskim warunkiem akceptacji, w szczególności przez ω-BS automaty (patrz Fakt 5.0.26). Jednocześnie języki M_i zamykają problem złożoności topologicznej logiki MSO + U— sięga ona dowolnie wysoko w ramach hierarchii rzutowej. Podsumowanie tych badań zostało opublikowane w artykule czasopismowym [HS12] autorstwa Szczepana Hummela i niżej podpisanego.

Bibliografia

[BC06] Mikołaj Bojańczyk and Thomas Colcombet. Bounds in ω-regularity. In *LICS*, pages 285–296, 2006.

[Boj04] Mikołaj Bojańczyk. A bounding quantifier. In *CSL*, pages 41–55, 2004.

[Boj09] Mikołaj Bojańczyk. Weak MSO with the unbounding quantifier. In *STACS*, pages 159–170, 2009.

[CDFM09] Jérémie Cabessa, Jacques Duparc, Alessandro Facchini, and Filip Murlak. The wadge hierarchy of max-regular languages. In *FST-TCS*, pages 121–132, 2009.

[HS12] Szczepan Hummel and Michał Skrzypczak. The topological complexity of MSO+U and related automata models. *Fundamenta Informaticae*, 119(1):87–111, 2012.

[HST10] Szczepan Hummel, Michał Skrzypczak, and Szymon Toruńczyk. On the topological complexity of MSO+U and related automata models. In *MFCS*, pages 429–440, 2010.

[Kec95] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[PEP04] Dominique Perrin and Jean Éric Pin. *Infinite Words: Automata, Semigroups, Logic and Games.* Elsevier, 2004.

[TL93] Wolfgang Thomas and Helmut Lescow. Logical specifications of infinite computations. In *REX School/Symposium*, pages 583–621, 1993.