**Uniwersytet Warszawski**
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Skrzypczak
Nr albumu: 234587

# O *kolorowaniach* drzewa Cantora

**Praca magisterska**
**na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem
**dra Henryka Michalewskiego**
**Instytut matematyki**

Wrzesień 2010

## Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

## Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

## Streszczenie

Praca zawiera charakteryzację niektórych dolnych klas hierarchii borelowskiej w zbiorze Cantora, z użyciem pojęcia *kolorowania*. Pojęcie to splata ze sobą kombinatorykę nieskończoną i deskryptywną teorię mnogości.

Prezentowane definicje i dowody są silnie motywowane teorią automatów skończonych i języków $\omega$-regularnych. Uzyskane w pracy wyniki topologiczne mają swoje konsekwencje w tej teorii. Związki te są podsumowane w osobnym rozdziale.

W oparciu o zaprezentowaną charakteryzację wykazana jest różność klas $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_2$ i $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$. Na użyte w dowodach przykłady można patrzeć jako na *złączenie* ze sobą odpowiednio dobranych języków $\omega$-regularnych.

## Słowa kluczowe

hierarchia borelowska, automat parzystości, kombinatoryka nieskończona

## Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

## Klasyfikacja tematyczna

03E15 Descriptive set theory,
68Q45 Formal languages and automata

## Tytuł pracy w języku angielskim

On colorings of the Cantor tree

# Spis treści

# Wprowadzenie

Zbiory leżące w klasach borelowskich $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ i $\mathbf{\Pi}^0_\eta$ mają naturalną reprezentację jako odpowiednio suma lub przecięcie zbiorów z niższych klas. Pozwala to dowodzić twierdzeń dotyczących zbiorów takich postaci, w sposób relatywnie prosty:

> Weźmy dowolny zbiór $S \in \mathbf{\Sigma}^0_n$. Przedstawmy go jako przeliczalną sumę zbiorów $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{n-1} \ldots$

Przykładem takiego rozumowania może być dowód twierdzenia 22.16 w książce [Kec95] – twierdzenie o redukcji dla klas $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$.

Sprawa komplikuje się w przypadku klas $\mathbf{\Delta}^0_\eta$, gdyż każdy taki zbiór ma zawsze dwa opisy. Jeden jako suma zbiorów prostszych, a drugi jako przecięcie. Dlatego wartościowe są bardziej *namacalne* reprezentacje zbiorów z tych klas. Jedną z takich reprezentacji są opisywane w tej pracy *kolorowania* nieskończonego drzewa binarnego, czyli funkcje z tego drzewa w zbiory *kolorów*. W zależności od warunków, jakie nakładamy na takie kolorowanie i przyjętej palety *kolorów*, otrzymujemy zbiory z kilku dolnych klas hierarchii borelowskiej.

Przykładem wykorzystania kolorowań są zaproponowane konkretne przykłady zbiorów leżących w klasach $\mathbf{\Delta}^0_2 \setminus BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ i $\mathbf{\Delta}^0_3 \setminus BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

Alternatywnie, zamiast patrzeć na *kolorowania* jako na kombinatoryczną charakteryzację klas deskryptywnych, można postrzegać je jako rozszerzenie pojęcia automatu z warunkiem parzystości. Pozwala to analizować opisywane w pracy wyniki w kontekście języków $\omega$-regularnych.

Związki kolorowań z ideami znanymi z literatury podsumowane są w rozdziale 9.

# Rozdział 1

# Definicje

Podstawową przestrzenią będzie zbiór Cantora, definiowany jako $A^\omega$, dla $A = \{a, b\}$. Niech $T$ oznacza zbiór wszystkich skończonych ciągów elementów $A$, czyli $A^{<\omega}$. Elementy $T$ nazywać będziemy słowami nad alfabetem $A$.

Powiemy, że słowo $s \in T$ jest prefiksem słowa $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in T$, jeśli $s = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$ dla pewnego $n \leqslant m$. Podobnie $r \in T$ jest sufiksem $w$ jeśli $t = (w_k, w_{k+1}, \ldots, w_{m-1})$ dla pewnego $k \leqslant m$. Wreszcie $t$ jest infiksem $w$ jeśli $t = (w_i, w_{i+1}, \ldots, w_{j-1})$ dla pewnych $i \leqslant j \leqslant m$.

Ponieważ zbiór $T$ jest zamknięty na prefiksy, więc jest drzewem. Wprowadźmy następujący porządek na $T$: $s \leqslant t$ gdy $s$ jest prefiksem $t$. Najmniejszym elementem tego porządku jest słowo puste oznaczone $\epsilon$. Elementy $\alpha \in A^\omega$ nazywać czasami będziemy nieskończonymi gałęziami $T$, gdyż z definicji $T$ mamy $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \alpha|_n \in T$. Dla $s \in T$, $\alpha \in A^\omega$ powiemy, że $s < \alpha$, gdy $s = \alpha|_n$ dla pewnego $n$.

Aby wygodniej operować na elementach drzewa $T$, korzystać będziemy z notacji związanej z wyrażeniami regularnymi. W notacji tej nie pisze się znaku konkatenacji słów. Przez $w^n$ rozumie się słowo $\underbrace{wwww\ldots w}_{n}$, natomiast $w^*$ to dowolne słowo postaci $w^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Przez $A^*$ oznaczane jest dowolne słowo w $T$, zaś $A^+$ oznacza dowolne niepuste słowo. Pewnym rozszerzeniem omawianej notacji będzie oznaczenie $s - t$, dla $t, s \in T$ i $t \leqslant s$, definiowane jako sufiks słowa $s$ zaczynający się tuż za końcem słowa $t$.

Przez $p(s)$ dla $s \in T \setminus \{\epsilon\}$ oznaczam słowo $s|_{|s|-1}$, czyli $s$ bez ostatniej litery.

Operować będziemy często parzystością liczb, wprowadźmy więc funkcję $P\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ równą 1 dla liczb nieparzystych i 0 w przeciwnym przypadku.

Dodatkowo przydatna będzie funkcja $S\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, zdefiniowana następująco: $S(n, m) = n - P(n) + m - P(m) + P(n) \cdot P(m)$. Jak łatwo sprawdzić, jest ona monotoniczna ze względu na obie współrzędne: $P(S(n, m)) = P(n) \cdot P(m)$ i $S(n, m) \leqslant n + m$.

Topologia na zbiorze $A^\omega$ wyznaczona jest przez bazowe zbiory otwarte postaci $[s] := \{\alpha \in A^\omega : s < \alpha\}$ dla słów $s \in T$. Zbiory $G_\delta$ to przeliczalne przecięcia zbiorów otwartych, natomiast $F_\sigma$ to przeliczalne sumy zbiorów domkniętych. Rodzina $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ to boolowskie kombinacje zbiorów otwartych, czyli najmniejsze ciało zawierające zbiory otwarte. Rodzina $\mathbf{\Delta}^0_2$ to przecięcie $G_\delta$ i $F_\sigma$. Analogicznie $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ to boolowskie kombinacje zbiorów $F_\sigma$, a $\mathbf{\Delta}^0_3$ to zbiory, które są jednocześnie $\mathbf{\Sigma}^0_3$ i $\mathbf{\Pi}^0_3$.

## 1.1. Automaty

Teoria automatów na słowach nieskończonych sięga lat sześćdziesiątych XX wieku. W oparciu o tę teorię Büchi wykazał rozstrzygalność logiki $MSO(\omega, <)$. Więcej informacji o automatach na słowach nieskończonych i związkach z logiką można znaleźć w pracy [Tho96].

Rozpatrywać będziemy tylko automaty deterministyczne z warunkiem parzystości. Automaty takie to krotki $\mathcal{A} = \langle q_0, Q, \delta, \Omega \rangle$, gdzie:

- $q_0$ to dowolny element $Q$, nazywany stanem początkowym,
- $Q$ to dowolny skończony zbiór, nazywany zbiorem stanów automatu,
- $\delta$ to funkcja $Q \times A \to Q$, definiująca jak ma się zmienić stan automatu pod wpływem wczytania kolejnej litery,
- $\Omega$ to funkcja $Q \to \mathbb{N}$, przypisująca stanom tak zwane *ranki*.

Ustalmy automat $\mathcal{A}$ oraz słowo nieskończone $\alpha \in A^\omega$. Funkcja $\delta$ wyznacza jednoznacznie *bieg* $\tau \in Q^\omega$ automatu $\mathcal{A}$ na $\alpha$, mianowicie $\tau(0) = q_0$ oraz $\tau(n + 1) = \delta(\tau(n), \alpha(n))$. Do tak wyznaczonego biegu możemy przyłożyć funkcję $\Omega$, uzyskując ciąg ranków

$$(R^\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\Omega(\tau(n)))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^\omega.$$

Ponieważ automat ma skończenie wiele stanów, to wartości $R^\alpha_n$ są ograniczone. Dobrze określona jest więc wartość $\liminf_{n\to\infty} R^\alpha_n$. Mówimy, że $\mathcal{A}$ *akceptuje* słowo $\alpha$, gdy $P\left(\liminf_{n\to\infty} R^\alpha_n\right) = 1$, czyli najmniejszy[1] rank występujący nieskończenie często jest nieparzysty. Zbiór słów akceptowanych przez $\mathcal{A}$ oznaczamy $L(\mathcal{A}) \subseteq A^\omega$. Czasami, zamiast mówić *zbiór słów nieskończonych*, mówić będziemy *język*. Wszystkie zbiory postaci $L(\mathcal{A})$ dla wszystkich automatów $\mathcal{A}$ nazywamy rodziną języków $\omega$-regularnych.

Z prac Büchiego wiemy, że języki $\omega$-regularne zamknięte są ze względu na operacje boolowskie i rzutowanie alfabetu.

Wyróżniona jest dość naturalna podklasa automatów, nazywana automatami *słabymi*. Automat jest *słaby*, jeśli dla każdego stanu $q \in Q$ oraz litery $z \in A$, zachodzi

$$\Omega(\delta(q, z)) \geqslant \Omega(q).$$

Czyli mówiąc potocznie — są to takie automaty, gdzie każde przejście nie zmniejsza ranku.

Okazuje się, że topologia zbioru $A^\omega$ odgrywa istotną rolę w teorii automatów. Jednym z przykładów jest dowód twierdzenia 5.1 z pracy [Boj09]. Autor pokazuje, że pewien język nie może być rozpoznawany przez określony model

[1] W teorii automatów zazwyczaj rozpatruje się wartość $\limsup$, zamiast podawanego tutaj $\liminf$. Gdy automat ma skończenie wiele stanów nie ma to znaczenia. My przyjmujemy ten drugi warunek w związku z wynikami z rozdziału 8.

automatu, korzystając z faktu, że język ten jest $\Sigma_3^0$-zupełny, więc nie leży w rodzinie $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$.

Powszechnie wiadomo, że wszystkie języki $\omega$-regularne leżą w ramach klasy $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$. Dodatkowo znane są charakteryzacje w terminach hierarchii Wadge'a i związki z kombinatoryczną hierarchą Wagnera (patrz [Wag79]). Ponieważ wszystkich języków $\omega$-regularnych jest przeliczalnie wiele, nie mogą wypełniać żadnej rozsądnej klasy złożoności topologicznej. Stąd wszelkie charakteryzacje topologiczne mówią jedynie w jakich klasach języki $\omega$-regularne **mogą** się znajdować.

# Rozdział 2

# Kolorowania

Kluczowym pojęciem pracy jest *kolorowanie* pełnego drzewa binarnego.

**Definicja 2.0.1.** *Kolorowaniem nazywać będziemy dowolną funkcję $K\colon T \to \mathbb{N}$, która na każdej nieskończonej gałęzi $T$ przyjmuje jakąś wartość nieskończenie wiele razy.*

Innymi słowy można to wyrazić tak, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodzi

$$\inf(K, \alpha) := \{n \in \mathbb{N} : \forall_{M\in\mathbb{N}} \exists_{m>M} K(\alpha|_m) = n\} \neq \emptyset.$$

Można też równoważnie powiedzieć, że wartości $K$ na żadnej gałęzi nie zbiegają (jako ciąg) do $\infty$. Wobec tego dla każdego $\alpha$, wartość $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$ jest skończona, równa $\min(\inf(K, \alpha))$. Zauważmy przy okazji, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodzi

$$\exists_{M\in\mathbb{N}} \forall_{m>M} K(\alpha|_m) \geqslant \liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n).$$

Każde kolorowanie wyznacza podzbiór zbioru Cantora.

**Definicja 2.0.2.** *Dla danego kolorowania $K$ definiujemy zbiór*

$$[K] = \left\{\alpha \in A^\omega : P\left(\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)\right) = 1\right\}.$$

Można powyższą definicję wyrazić równoważnie: $[K]$ to zbiór tych nieskończonych gałęzi na których najmniejsza z wartości przyjmowanych nieskończenie często jest nieparzysta.

Dodatkowo, wyróżniamy dwie dodatkowe własności jakie może mieć kolorowanie.

**Definicja 2.0.3.** *Powiemy, że kolorowanie $K$ jest skończone, jeśli zbiór jego wartości jest ograniczony.*

*Wahaniem kolorowania skończonego nazywamy największą przyjmowaną przez nie wartość.*

*Kolorowanie $K$ jest monotoniczne, jeśli przyjmowane przez nie wartości są niemalejące na gałęziach $T$.*

Powyższe definicje dają nam cztery rodzaje kolorowań:

- ogólne,
- skończone,
- monotoniczne,
- monotoniczne i skończone.

Łatwo pokazać, że istnieją kolorowania monotoniczne które nie są skończone, skończone które nie są monotoniczne oraz takie które nie są ani skończone ani monotoniczne. Wobec tego, wymienione powyżej rodzaje są parami różne.

Przydatna będzie następująca prosta obserwacja.

**Fakt 2.0.4.** *Jeśli $K$ jest kolorowaniem monotonicznym, to dla każdego $\alpha \in A^\omega$ określona jest granica*

$$\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n).$$

## 2.1. Ciągłe redukcje

Ciągłe redukcje jednego zbioru do drugiego stanowią ważne pojęcie w deskryptywnej teorii mnogości.

**Definicja 2.1.1.** *Powiemy, że zbiór $X \subseteq A^\omega$ redukuje się w sposób ciągły do zbioru $Y \subseteq A^\omega$, jeśli istnieje funkcja ciągła $f\colon A^\omega \to A^\omega$, spełniająca*

$$f^{-1}(Y) = X.$$

Ciągłe redukcje w zbiorze Cantora i przestrzeni Baire'a są dokładniej opisane w rozdziałach 2 i 21 w książce [Kec95]. Pokazany jest tam między innymi poniższy fakt.

**Fakt 2.1.2** (Za [Kec95, Proposition 2.6])**.** *Każda funkcja ciągła $f\colon A^\omega \to A^\omega$ indukuje przekształcenie $\overline{f}\colon T \to T$ spełniające dla każdego $\alpha \in A^\omega$:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left|\overline{f}(\alpha|_n)\right| = \infty$,
2. $\forall_{n\leqslant m} \overline{f}(\alpha|_n) \leqslant \overline{f}(\alpha|_m) < f(\alpha)$.

W oparciu o to spostrzeżenie, możemy pokazać, że kolorowania są w pewnym sensie zachowywane przy ciągłych redukcjach.

**Twierdzenie 2.1.3.** *Dla każdego kolorowania $K$ i zbioru $X \subseteq A^\omega$, takich że istnieje ciągła redukcja $X$ do $[K]$, istnieje kolorowanie $K'$ spełniające $[K'] = X$.*

*Jeśli $K$ ma wahanie $n$, to $K'$ ma wahanie ograniczone przez $n$.*

*Jeśli $K$ jest monotoniczne, to $K'$ też.*

*Dowód.* Weźmy funkcję $\overline{f}\colon T \to T$, indukowaną przez $f$.

Niech $K'(\epsilon) = 0$. Weźmy dowolne słowo $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech $u = \overline{f}(p(s))$ i $v = \overline{f}(s)$. Wiemy, że $u \leqslant v$. Rozważmy ciąg słów $u = w_0 < w_1 < w_2 < \ldots <$

$w_i = v$, spełniający $p(w_{j+1}) = w_j$, czyli kolejne wierzchołki $T$ na ścieżce od $u$ do $v$. Zdefiniujmy

$$K'(s) \overset{(A)}{:=} \min \{K(w_0), K(w_1), \ldots, K(w_i)\}.$$

Twierdzę, że dla każdej $\alpha \in A^\omega$ zachodzi

$$\liminf_{n\to\infty} K'(\alpha|_n) = \liminf_{n\to\infty} K(f(\alpha)|_n).$$

Jeśli to wykażę, to $K'$ jest kolorowaniem i dodatkowo $[K'] = f^{-1}([K]) = X$, co zakończy dowód twierdzenia.

Weźmy dowolną $\alpha \in A^\omega$. Oznaczmy $m = \liminf_{n\to\infty} K(f(\alpha)|_n)$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > N$ mamy $K(f(\alpha)|_n) \geqslant m$. Korzystając z założeń dotyczących $\overline{f}$, istnieje takie $M$, że dla $s < \alpha$ i $|s| > M$ zachodzi $\left|\overline{f}(s)\right| > N$.

Więc dla dostatecznie długich słów $s < \alpha$ rozpatrywane w definicji $K'$ słowo $u$ jest dłuższe niż $N$. Dla tak dobranego słowa $s$ wszystkie rozpatrywane w równości $(A)$ liczby $K(w_0), K(w_1), \ldots, K(w_i)$ są niemniejsze niż $m$. Zatem $K'(s) \geqslant m$.

Jednocześnie, dla nieskończenie wielu $n$, zachodzi $K(f(\alpha)|_n) = m$. Więc dla nieskończenie wielu słów $s < \alpha$, wśród rozpatrywanych w równości $(A)$ wartości $\{K(w_j) : 0 \leqslant j \leqslant i\}$, występuje $m$. Więc dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $K'(\alpha|_n) \leqslant m$. Czyli $\liminf_{n\to\infty} K'(\alpha|_n) = m$.

Oczywiście, jeśli $K$ ma wartości ograniczone przez $n$, to $K'$ też, a jeśli $K$ jest monotoniczne, to $K'$ też. ■

## 2.2. Operacje boolowskie

Okazuje się, że zbiory definiowane przez kolorowania odpowiednich rodzajów stanowią ciała. Bezpośredni dowód w przypadku kolorowań ogólnych jest dość techniczny. Jednakże, można pokazać ten fakt w oparciu o pozostałe wyniki pracy (patrz wniosek 6.2.2).

**Fakt 2.2.1.** *Jeśli $K$ jest kolorowaniem, to istnieje kolorowanie $K'$, spełniające*

$$[K] = A^\omega \setminus [K'].$$

*Jeśli $K$ jest skończone (monotoniczne), to $K'$ też jest skończone (monotoniczne).*

*Dowód.* Wystarczy rozważyć $K'(s) = K(s) + 1$. ■

Wobec tego, by pokazać że kolorowania danego rodzaju stanowią ciało, wystarczy pokazać, że są zamknięte na przecięcie.

Najpierw pokażemy odpowiedni fakt dla kolorowań monotonicznych.

**Fakt 2.2.2.** *Jeśli kolorowania $K_1, K_2$ są monotoniczne, to istnieje kolorowanie monotoniczne $K$", spełniające*

$$[K_1] \cap [K_2] = [K"].$$

*Jeśli $K_1, K_2$ są skończone, to $K$" też.*

*Dowód.* Wystarczy rozważyć $K"(s) = S(K_1(s), K_2(s))$. Wtedy $K"$ jest funkcją monotoniczną na gałęziach i dodatkowo dla $\alpha \in A^\omega$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} K"(\alpha|_n) = S(\lim_{n\to\infty} K_1(\alpha|_n), \lim_{n\to\infty} K_2(\alpha|_n)).$$

Więc $[K"] = [K_1] \cap [K_2]$. Oczywiście, jeśli $K_1, K_2$ są skończone, to $K"$ też. ■

Teraz pora na kolorowania skończone, ale niekoniecznie monotoniczne. Poniższy fakt można wyprowadzić z charakteryzacji $BC(\mathbf{\Sigma}^0_n)$ w terminach hierarchii różnicowej i pozostałych wyników pracy. Jest on jednak tutaj umieszczony, gdyż daje dodatkowe szacowanie wahania uzyskanych kolorowań oraz dlatego, że dowód jest dość bezpośredni.

**Fakt 2.2.3.** *Jeśli kolorowania $K_1, K_2$ są skończone, to istnieje kolorowanie skończone $K"$, spełniające*

$$[K_1] \cap [K_2] = [K"].$$

*Dowód.* Załóżmy, że dane kolorowania $K_1, K_2$ mają wahania $n_1, n_2$. Jak łatwo sprawdzić, uzależnienie dla każdego $s$, wartości $K"(s)$ wyłącznie od wartości $K_1(s), K_2(s)$ jest błędne.

Przez indukcję po długości słowa $s \in T$ zdefiniujmy funkcje

$$M_s\colon \{0, 1, \ldots, n_1\} \to \{0, 1, \ldots, n_2\}$$

i wartości $K"(s) \leqslant S(n_1, n_2)$. Intuicyjnie $M_s(n)$ to najmniejsza wartość przyjęta przez $K_2$, od czasu ostatniego wystąpienia $n$ w $K_1$.

Niech $M_\epsilon$ będzie wszędzie równa 0, a $K"(\epsilon) = 0$.

Weźmy $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech $r = p(s)$. Załóżmy, że zdefiniowana jest funkcja $M_r$ i wartość $K"(r)$. Połóżmy:

- $K"(s) \overset{(A)}{:=} S\left(K_1(s), M_r(K_1(s))\right)$,
- $M_s(K_1(s)) \overset{(B)}{:=} K_2(s)$,
- $M_s(n) \overset{(C)}{:=} \min(M_r(n), K_2(s))$, dla $n \neq K_1(s)$ i $0 \leqslant n \leqslant n_1$.

Pozostaje sprawdzić, że $K"$ jest kolorowaniem i $[K"] = [K_1] \cap [K_2]$. Weźmy dowolną gałąź $\alpha \in A^\omega$. Załóżmy że $\liminf$ wartości $K_1, K_2$ na $\alpha$ to odpowiednio $m_1, m_2$. Wobec faktu, że $P(S(m_1, m_2)) = P(m_1) \cdot P(m_2)$, wystarczy wykazać poniższy lemat.

**Lemat 2.2.4.** *Przy powyższych definicjach ma miejsce następująca równość*

$$\liminf_{n\to\infty} K"(\alpha|_n) = S(m_1, m_2).$$

*Dowód.* Niech $H_1 = \{n \in \mathbb{N} : K_1(\alpha|_n) = m_1\}$ i $H_2 = \{n \in \mathbb{N} : K_2(\alpha|_n) = m_2\}$. Z definicji $m_1, m_2$ wiemy, że zbiory $H_1, H_2$ są nieskończone. Niech $D = \{n \in \mathbb{N} : M_{\alpha|_n}(m_1) \leqslant m_2\}$. Pokażemy, że $H_2 \subseteq D$, czyli w szczególności $D$ jest nieskończony. Weźmy dowolne $h \in H_2$ i rozpatrzmy wartość $M_{\alpha|_h}(m_1)$. Niezależnie, czy została ona zdefiniowana równością $(B)$ czy $(C)$, zachodzi $M_{\alpha|_h}(m_1) \leqslant K_2(\alpha|_h) = m_2$. Więc $h \in D$.

Teraz pokażemy, że dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $K"(\alpha|_n) \leqslant S(m_1, m_2)$. Weźmy dowolne $d \in D$. Niech $h \in H_1$ będzie najmniejszą liczbą w $H_1$ spełniającą $h > d$. Z definicji $h$, dla każdego $j \in \{d+1, d+2, \ldots, h-1\}$ ma miejsce $K_1(\alpha|_j) \neq m_1$, a zatem

$$M_{\alpha|_j}(m_1) \overset{(C)}{=} \min(M_{\alpha|_{j-1}}(m_1), K_2(\alpha|_j)) \leqslant M_{\alpha|_{j-1}}(m_1).$$

Powyższa równość pozwala przez indukcję dla $j = d, d+1, \ldots, h-1$ pokazać, że $M_{\alpha|_j}(m_1) \leqslant M_{\alpha|_d}(m_1)$. Dla $j = h-1 \geqslant d$ oznacza to, że

$$K"(\alpha|_h) \overset{(A)}{=} S(m_1, M_{\alpha|_{h-1}}(m_1)) \leqslant S(m_1, M_{\alpha|_d}(m_1)) \leqslant S(m_1, m_2).$$

Pozostaje więc pokazać, że dla dostatecznie długich słów $s < \alpha$ ma miejsce $K"(s) \geqslant S(m_1, m_2)$. Wiemy, że dla pewnego $M \in \mathbb{N}$ i wszystkich $m \geqslant M$ zachodzi $K_1(\alpha|_m) \geqslant m_1$ i $K_2(\alpha|_m) \geqslant m_2$. Niech $q = \alpha|_M$. Jest co najwyżej $n_1 + 1$ liczb $n$ dla których $M_q(n) < m_2$, bo dziedzina $M_q$ ma moc $n_1 + 1$. Jednocześnie wartości nowo przypisywane równością $(B)$ są, dla $s$ spełniających $q < s < \alpha$, nie mniejsze niż $m_2$.

Niech $B = \{s < \alpha : s > q \wedge K"(s) < S(m_1, m_2)\}$. Pokażę, że zbiór $B$ jest skończony. Zauważmy, że dla każdego $s \in B$ zachodzi $M_{p(s)}(K_1(s)) < m_2$. Zatem na mocy równości $(B)$ i $(C)$ zachodzi $M_s(K_1(s)) = K_2(s) \geqslant m_2$ oraz dla $r \geqslant s$ i $r < \alpha$ również $M_r(K_1(s)) \geqslant m_2$. Czyli dla $s, s' \in B$ i $s \neq s'$ zachodzi $K_1(s) \neq K_1(s')$. Więc moc zbioru $B$ wynosi co najwyżej $n_1 + 1$. Czyli dla dostatecznie długich $s < \alpha$ będzie zachodzić $K"(s) \geqslant S(m_1, m_2)$. ■

Skoro $\liminf_{n\to\infty} K"(\alpha|_n) = S(m_1, m_2)$, to wartość ta jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1, m_2$ są nieparzyste. Czyli $\alpha \in [K"]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in [K_1] \cap [K_2]$. ■

W oparciu o powyższe konstrukcje, można sformułować następujący wniosek.

**Wniosek 2.2.5.** *Jeśli kolorowania (monotoniczne) skończone $K_1, K_2$ mają wahania $n_1, n_2$ odpowiednio, to istnieje kolorowanie (monotoniczne) $K"$ o wahaniu ograniczonym przez $n_1 + n_2$, spełniające*

$$[K"] = [K_1] \cap [K_2].$$

# Rozdział 3

# Rodzina $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$

W poniższym rozdziale pokażemy, że kolorowania monotoniczne skończone definiują dokładnie wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$.

**Fakt 3.0.6.** *Dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq A^\omega$, istnieje kolorowanie monotoniczne $K$ o wahaniu ograniczonym przez 1, spełniające $[K] = U$.*

*Dowód.* Rozważmy $K\colon T \to \mathbb{N}$ zdefiniowane: $K(s) = 1$, gdy $[s] \subseteq U$, $K(s) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Weźmy dowolne $\alpha \in A^\omega$. Jeśli $\alpha \in U$, to pewne minimalne $s < \alpha$ ma tę własność, że $[s] \subseteq U$. Więc dla wszystkich $r < s$ zachodzi $K(r) = 0$, a dla wszystkich $r$, spełniających $s \leqslant r < \alpha$, zachodzi $K(r) = 1$. Jeśli natomiast $\alpha \notin U$, to żaden jego prefiks $s$ nie ma własności $[s] \subseteq U$, więc funkcja $K$ jest stała równa 0 na wszystkich prefiksach $\alpha$.

Tak czy inaczej, $K$ jest monotoniczne o wahaniu co najwyżej 1 i zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in U.$$

Więc $[K] = U$. ■

**Wniosek 3.0.7.** *Dla każdego zbioru $B \in BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$ istnieje kolorowanie $K$ spełniające $[K] = B$.*

*Dowód.* Skoro rodzina zbiorów definiowanych przez kolorowania monotoniczne skończone jest ciałem i zawiera wszystkie zbiory otwarte, to zawiera też wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$. ■

Teraz pora na twierdzenie odwrotne.

**Twierdzenie 3.0.8.** *Jeśli $K$ jest kolorowaniem monotonicznym skończonym, to $[K] \in BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$.*

*Dowód.* Weźmy dowolne kolorowanie monotoniczne $K$ o wahaniu $N$. Zdefiniujmy ciąg zbiorów

$$U_n = \{\alpha \in A^\omega : \exists_{i\in\mathbb{N}} K(\alpha|_i) \geqslant n\}.$$

Ponieważ kolorowanie $K$ ma wahanie $N$, więc zbiory $U_n$ są puste dla $n > N$. Oczywiście $U_0 = A^\omega$.

**Lemat 3.0.9.** *Dla każdego $n$, zbiór $U_n$ jest otwarty.*

Dodatkowo zauważmy, że ciąg zbiorów $U_n$ jest nierosnący ze względu na $n$. Twierdzę, że

$$[K] = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant N/2} (U_{2i+1} \setminus U_{2i+2}) . \tag{3.0.1}$$

Wykazanie tej równości kończy dowód twierdzenia, gdyż podany zbiór należy do rodziny $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Weźmy $\alpha \in A^\omega$. Ponieważ kolorowanie $K$ jest monotoniczne, to określona jest granica $\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = b$ dla pewnego $b \in \mathbb{N}$ i zachodzi $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, K(\alpha|_n) \leqslant b$. Wobec tego $\alpha \in U_b$ i $\alpha \notin U_{b+1}$. Są dwa przypadki:

- $b$ jest nieparzyste, czyli $\alpha \in [K]$. Wtedy $\alpha \in U_{2i+1} \setminus U_{2i+2}$ dla $2i + 1 = b$, więc $\alpha$ należy do zdefiniowanej sumy.
- $b$ jest parzyste, czyli $\alpha \notin [K]$. Wtedy $\alpha \notin U_{2i+1}$ dla $2i + 1 \geqslant b$, oraz $\alpha \in U_{2i+2}$ dla $2i+1 < b$, więc $\alpha$ nie należy do żadnego składnika zdefiniowanej sumy.

■

Zauważmy przy okazji, że złożoność uzyskanej formuły boolowskiej jest równa wahaniu $K$.

Prostym wnioskiem z twierdzeń tego rozdziału jest następujące spostrzeżenie.

**Twierdzenie 3.0.10.** *Kolorowania o wahaniu* 1 *odpowiadają dokładnie zbiorom otwartym.*

# Rozdział 4

# Rodzina $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$

Kolorowania skończone odpowiadają dokładnie zbiorom $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. Dowody są w dużej mierze analogicznie do tych z poprzedniego rozdziału.

**Twierdzenie 4.0.11.** *Dla każdego zbioru $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$, istnieje kolorowanie $K$, takie że $D = [K]$.*

*Dowód.* Podobnie jak w przypadku kolorowań monotonicznych, wykażemy najpierw, że każdy zbiór $F \in F_\sigma = \mathbf{\Sigma}^0_2$ jest opisywany przez pewne kolorowanie o wahaniu 1.

Przypomnijmy, że zbiór $X \subseteq A^\omega$ nazywamy *zupełnym* w klasie $\Gamma$, jeśli $X \in \Gamma(A^\omega)$ oraz dla każdego $Y \in \Gamma(A^\omega)$ istnieje ciągła redukcja $Y$ do $X$.

Ze względu na twierdzenie 2.1.3, wystarczy sprawdzić, że jakiś zbiór $F_\sigma$-zupełny jest opisywany przez pewne kolorowanie. Rozważmy homeomorficzną kopię liczb wymiernych w zbiorze Cantora

$$F = \{\alpha \in A^\omega : \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n>N} \alpha(n) = b\}.$$

Fakt, że zbiór $F$ jest istotnie $F_\sigma$-zupełny jest pozostawiony jako ćwiczenie 23.1 w książce [Kec95].

Weźmy kolorowanie $K\colon T \to \{0,1\}$ zdefiniowane $K(A^*a) = 0$ i $K(A^*b) = 1$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha(n) = b \quad \Leftrightarrow \quad K(\alpha|_n) = 1.$$

Z definicji zbiór $[K]$ to zbiór tych gałęzi, na których od pewnego momentu $K$ jest równe 1. Więc jest to zbiór tych $\alpha$, które od pewnego momentu są równe $b$. Więc $[K] = F$.

Teraz, skoro kolorowania o skończonym wahaniu stanowią ciało, więc każdy zbiór $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ jest opisywany przez pewne kolorowanie. ■

Analogicznie jak w poprzednim rozdziale złożoność formuły definiującej zbiór przekłada się bezpośrednio na wahanie odpowiedniego kolorowania oraz ma miejsce następujący fakt.

**Fakt 4.0.12.** *Kolorowania o wahaniu* 1 *odpowiadają dokładnie wszystkim zbiorom $F_\sigma$. Patrząc na dopełnienia odpowiednich zbiorów, kolorowania o wartościach* $\{1,2\}$ *odpowiadają dokładnie wszystkim zbiorom $G_\delta$.*

Znowu w dość prosty sposób dostajemy twierdzenie odwrotne. Metoda dowodzenia jest analogiczna jak w przypadku kolorowań monotonicznych.

**Twierdzenie 4.0.13.** *Każde kolorowanie o skończonym wahaniu $K$ indukuje zbiór $[K] \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.*

*Dowód.* Weźmy dowolne kolorowanie $K$ o wahaniu $N$. Zdefiniujmy ciąg zbiorów

$$F_n = \{\alpha \in A^\omega : \exists_{I \in \mathbb{N}} \forall_{i > I} K(\alpha|_i) \geqslant n\}.$$

Ponieważ kolorowanie $K$ ma wahanie ograniczone przez $N$, więc zbiory $F_n$ są puste dla $n > N$. Oczywiście $F_0 = A^\omega$.

**Lemat 4.0.14.** *Dla każdego $n$, zbiór $F_n$ jest typu $F_\sigma$.*

*Dowód.* Wynika to wprost z postaci zbioru $F_n$. ■

Dodatkowo zauważmy, że ciąg zbiorów $F_n$ jest nierosnący ze względu na $n$. Twierdzę, że

$$[K] = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant N/2} (F_{2i+1} \setminus F_{2i+2}). \tag{4.0.1}$$

Wykazanie tej równości kończy dowód twierdzenia, gdyż podany zbiór należy do rodziny $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

Weźmy $\alpha \in A^\omega$. Wtedy $\liminf_{n \to \infty} K(\alpha|_n) = b$ dla pewnego $b \in \mathbb{N}$ i dodatkowo $b \leqslant N$. Wobec tego $\alpha \in F_b$ i $\alpha \notin F_{b+1}$. Są dwa przypadki:

- $b$ jest nieparzyste, czyli $\alpha \in [K]$, wtedy $\alpha \in G_{2i+1} \setminus G_{2i+2}$ dla $2i + 1 = b$, więc $\alpha$ należy do zdefiniowanej sumy.
- $b$ jest parzyste, czyli $\alpha \notin [K]$, wtedy $\alpha \notin G_{2i+1}$ dla $2i + 1 \geqslant b$, oraz $\alpha \in G_{2i+2}$ dla $2i+1 < b$, więc $\alpha$ nie należy do żadnego składnika zdefiniowanej sumy.

■

Powyższe wyniki, w nieco innym kontekście, znalazły zastosowanie w pracy [BNR+10]. Związek ten jest bardziej szczegółowo opisany w rozdziale 9.1.

# Rozdział 5

# Rodzina $\mathbf{\Delta}^0_2$

Okazuje się, że zbiory definiowane przez kolorowania monotoniczne to dokładnie zbiory należące do $\mathbf{\Delta}^0_2$.

## 5.1. $\mathbf{\Delta}^0_2$ jako kolorowania monotoniczne

**Twierdzenie 5.1.1.** *Jeśli $D \subseteq A^\omega$ jest jednocześnie zbiorem typu $G_\delta$ i $F_\sigma$ (czyli należy do $\mathbf{\Delta}^0_2$), to istnieje kolorowanie monotoniczne $K$ dla którego $[K] = D$.*

*Dowód.* Wiemy, że w takiej sytuacji można znaleźć ciąg zbiorów domkniętych $(F_n)$ taki, że $\bigcup_n F_n = D$. Można też znaleźć ciąg zbiorów domkniętych $(E_n)$ taki, że $\bigcup_n E_n = A^\omega \setminus D$.

Zdefiniujmy ciąg $H_i$, powstały przez *złączenie* ciągów $F_i, E_i$: niech $H_{2i} = E_i$ i $H_{2i+1} = F_i$. Zauważmy, że $\bigcup_n H_n = A^\omega$.

Zdefiniujemy funkcję $K \colon T \to \mathbb{N}$. Weźmy dowolne $s \in T$. Niech $i_s$ będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $H_{i_s} \cap [s] \neq \emptyset$. Liczba taka istnieje, bo $[s]$ jest niepusty, a suma rodziny $H_i$ to cała przestrzeń. Połóżmy $K(s) = i_s$.

Teraz sprawdzę, że tak zdefiniowane $K$ jest istotnie kolorowaniem monotonicznym. Weźmy dowolną gałąź nieskończoną $\alpha \in A^\omega$. Po pierwsze zbiory $[\alpha|_n]$ są nierosnące ze względu na $i$, więc $K$ jest funkcją niemalejącą na $\alpha$. Jednocześnie, istnieje takie $i$, że $\alpha \in H_i$. Wiemy więc, że wartości $K$ na $\alpha$ są ograniczone przez $i$. Więc $K$ jest kolorowaniem monotonicznym.

Pozostaje sprawdzić, że $[K] = D$. Weźmy dowolne $\alpha \in A^\omega$. Niech $i_\alpha$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $\alpha \in H_{i_\alpha}$. Twierdzę, że wartość $K$ na prefiksach $\alpha$ jest od pewnego momentu stała, równa $i_\alpha$. Oczywiście jest ona ograniczona z góry przez $i_\alpha$. Istnieje skończenie wiele liczb mniejszych od $i_\alpha$. Wystarczy więc, że wykażę, że dla każdego $j < i_\alpha$, wartości $K$ na prefiksach $\alpha$ są od pewnego momentu różne od $j$.

Weźmy dowolne $j < i_\alpha$. Wiemy, że $\alpha \notin H_j$. $H_j$ jest zbiorem domkniętym, a zatem istnieje pewne otoczenie $U_\alpha$ rozłączne z $H_j$. Więc istnieje $N$ takie, że dla $n > N$ mamy $[\alpha|_n] \subseteq U_\alpha$. Wobec tego dla $n > N$ mamy $[\alpha|_n] \cap H_j = \emptyset$. Toteż dla $n > N$ wartość $K(\alpha|_n)$ jest różna od $j$.

Jeśli $\alpha \in D$, to dla pewnego $i$ zachodzi $\alpha \in F_i$ i jednocześnie dla wszystkich $i$ zachodzi $\alpha \notin E_i$. Więc zdefiniowane powyżej $i_\alpha$ jest nieparzyste, gdyż zbiory $F_i$ stoją na nieparzystych pozycjach w ciągu $H_i$. Zatem, dla dostatecznie dużych $n$, wartość $K(\alpha|_n)$ jest nieparzysta. Toteż $\alpha \in [K]$. Gdy $\alpha \notin D$ jest analogicznie, wtedy $\alpha \notin [K]$. Podsumowując, otrzymujemy równość $[K] = D$. ■

## 5.2. Kolorowania monotoniczne jako $\mathbf{\Delta}_2^0$

Prawdą jest również twierdzenie odwrotne do zaprezentowanego powyżej.

**Twierdzenie 5.2.1.** *Dla każdego kolorowania monotonicznego $K$, zbiór $[K]$ jest zbiorem typu $\mathbf{\Delta}_2^0$ w $A^\omega$.*

*Dowód.* Przedstawię definicję zbioru $[K]$ jako przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych. Wtedy będziemy wiedzieć, że dla każdego kolorowania $K$ zbiór $[K]$ jest typu $G_\delta$. Ale wobec faktu 2.2.1, jego dopełnienie też jest definiowane przez pewne kolorowanie monotoniczne, więc też jest typu $G_\delta$. Więc $[K]$ jest jednocześnie $G_\delta$ i $F_\sigma$, a zatem leży w $\mathbf{\Delta}_2^0$.

Zauważmy, że

$$\alpha \in [K] \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{w \in T} |w| > n \wedge P(K(w)) = 1 \wedge \alpha \in [w].$$

Wynika to wprost z monotoniczności $K$ na $\alpha$. Niech

$$W_n = \{v \in T : |v| > n \wedge P(K(v)) = 1\}.$$

Wtedy

$$[K] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{w \in W_n} [w].$$

Wobec tego $[K]$ można zapisać jako przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych. Więc $[K]$ jest typu $G_\delta$. ■

# Rozdział 6

# Rodzina $\mathbf{\Delta}^0_3$

Okazuje się, że kolorowania ogólne odpowiadają dokładnie zbiorom $\mathbf{\Delta}^0_3$.

## 6.1. $\mathbf{\Delta}^0_3$ jako kolorowania

Można przypuszczać, że nic by się nie zmieniło, gdyby w definicji zbioru $[K]$ zamiast $\liminf$ wziąć $\limsup$. Okazuje się, że ma to duże znaczenie. Mianowicie, gdyby przyjąć definicję z $\limsup$, poniższe twierdzenie przestało by być prawdziwe. Zagadnienie to jest opisane w rozdziale 8.

**Twierdzenie 6.1.1.** *Jeśli $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$, to istnieje kolorowanie $K$ takie, że $[K] = D$.*

Idea dowodu jest analogiczna jak w przypadku klasy $\mathbf{\Delta}^0_2$, chociaż użyte techniki są nieco bardziej skomplikowane.

*Dowód.* Przedstawmy $D$ jako sumę rodziny zbiorów $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G_\delta$. Analogicznie zapiszmy $A^\omega \setminus D$ jako sumę rodziny $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G_\delta$. Korzystając z faktu 4.0.12, znajdujemy ciągi kolorowań $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}, (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wartościach $\{1, 2\}$, spełniające

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad [K_n] = G_n \quad \wedge \quad [L_n] = J_n.$$

Wreszcie zdefiniujmy kolorowania $H_{2n+1} = K_n$ i $H_{2n+2} = L_n$.

Zdefiniujemy wartość $K(s)$ indukcyjnie ze względu na długość słowa $s$. Połóżmy najpierw $K(\epsilon) = 0$. Weźmy $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech $i_s$ to najmniejsza taka liczba dodatnia, że $H_{i_s}(s) = 1$, lub $K(p(s))$, gdy takiej liczby nie ma. Połóżmy $K(s) = i_s$.

Weźmy dowolną $\alpha \in A^\omega$. Istnieje takie najmniejsze $i$, że $\alpha \in [H_i]$. W takim razie, dla nieskończenie wielu $n$ zachodzi $H_i(\alpha|_n) = 1$, więc dla nieskończenie wielu $n$ mamy $K(\alpha|_n) \leqslant i$. Wobec tego $K$ jest kolorowaniem. Dodatkowo, na każdej gałęzi od pewnego momentu, $K$ nie przyjmuje wartości 0. Twierdzę, że

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = i.$$

Wystarczy wykazać, że dla dowolnego $0 < j < i$, od pewnego momentu $K$ nie przyjmuje wartości $j$. Ale wiem, że $\alpha \notin [H_j]$, więc od pewnego momentu $H_j(\alpha|_n) = 2$, więc dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi $K(\alpha|_n) \neq j$.

Czyli $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = i$. Jednocześnie $i$ jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[K_n] = D$. ■

## 6.2. Kolorowania jako $\mathbf{\Delta}^0_3$

**Twierdzenie 6.2.1.** *Dla każdego kolorowania $K$, zachodzi $[K] \in \mathbf{\Delta}^0_3$.*

*Dowód.* Weźmy dowolne kolorowanie $K$. Ponieważ zbiory definiowane przez kolorowania są zamknięte ze względu na dopełnienie, wystarczy wykazać, że $[K] \in \Sigma^0_3$.

Dzięki definicji $K$ wiemy, że $[K]$ powstaje jako suma po $n \in \mathbb{N}$ i $P(n) = 1$ zbiorów tych gałęzi, na których $n$ jest najmniejszą wartością przyjmowaną nieskończenie często. Czyli $[K]$ to

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}\wedge P(n)=1} \left\{\alpha \in A^\omega : \exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{m>M} K(\alpha|_m) \geqslant n \wedge \forall_{L\in\mathbb{N}}\exists_{l>L} K(\alpha|_l) = n\right\}.$$

Zdefiniujmy

$$G_{n,M} = \left\{\alpha \in A^\omega : \forall_{m>M} K(\alpha|_m) \geqslant n \wedge \forall_{L\in\mathbb{N}}\exists_{l>L} K(\alpha|_l) = n\right\}.$$

Wobec wcześniejszych uwag zachodzi równość

$$[K] = \bigcup_{(n,M)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\wedge P(n)=1} G_{n,M}.$$

Każdy ze zbiorów $G_{n,M}$ jest typu $G_\delta$, toteż $[K]$ jest typu $\Sigma^0_3$. ■

Wiedząc, że $\mathbf{\Delta}^0_3$ jest zamknięta na operacje boolowskie, w oparciu o dwa powyższe twierdzenia, możemy wyciągnąć następujący wniosek.

**Wniosek 6.2.2.** *Rodzina zbiorów definiowanych przez kolorowania jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie.*

# Rozdział 7

# Ścisłe inkluzje

Kolorowania pozwalają skonstruować konkretne przykłady zbiorów odróżniających klasy $BC(\mathbf{\Sigma}^0_i) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{i+1}$ dla $i = 1, 2$.

Standardowe metody pokazywania powyższych ścisłych inkluzji oparte są o hierarchię różnicową. Poniżej ten sposób rozumowania jest przedstawiony w skrócie na przykładzie $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ i $\mathbf{\Delta}^0_3$. Wykorzystana jest terminologia z rozdziału 9.3, odnośniki dotyczą rozdziału 22.E w książce [Kec95]. Rozumowanie przebiegają następująco:

- tworzymy zbiór $X \subseteq (A \times A)^\omega$ który jest $D_\omega$-uniwersalny — ćwiczenie 22.26,
- w oparciu o $X$ definiujemy metodą przekątniową zbiór $Y \subseteq A^\omega$,
- pokazujemy, że $Y \in D_{\omega+1}$ i jednocześnie $Y \notin D_\omega$,
- pokazujemy, że $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2) = \bigcup_n D_n \subseteq D_\omega$ — ćwiczenie 22.29,
- pokazujemy, że $D_{\omega+1} \subseteq \mathbf{\Delta}^0_3$ — twierdzenie 22.27,
- wnioskujemy, że $Y \in \mathbf{\Delta}^0_3 \setminus BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

## 7.1. $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_2$

W poniższym rozdziale wykażę korzystając z kolorowań, a nie hierarchii różnicowej, że $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_2$.

**Twierdzenie 7.1.1.** *Istnieje zbiór $D \subseteq A^\omega$ należący do $\mathbf{\Delta}^0_2$, a nie należący do $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.*

Idea dowodu jest taka, by wskazać kolorowanie monotoniczne $K_\omega$, takie by nie istniało kolorowanie monotoniczne skończone $K'$, spełniające $[K'] = [K_\omega]$. Wtedy $[K_\omega] \in \mathbf{\Delta}^0_2$ i jednocześnie $[K_\omega] \notin BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Aby zdefiniować $K_\omega$, najpierw zdefiniujemy ciąg kolorowań $K_n$ wymagających coraz większych wahań.

Niech $K_0$ będzie kolorowaniem stałym równym 1. Niech $K_n$ będzie określone następująco: $K_n(a^*) = 1$ oraz dla $w \in A^*$ niech $K_n(a^*bw) = K_{n-1}(w) + 1$.

**Lemat 7.1.2.** *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz kolorowania monotonicznego $K'$ o własności $[K_n] = [K']$, istnieje takie $s \in T$, że $K'(s) \geqslant n$.*

*Dowód lematu.* Ponieważ $a^\omega \in [K_n] = [K']$, więc istnieje takie $i_n$, że $P(K'(a^{i_n})) = 1$. Zauważmy, że $a^{i_n}ba^\omega \notin [K_n] = [K']$, bo $a^\omega \in [K_{n-1}]$. Więc istnieje takie $i_{n-1}$, że $P(K'(a^{i_n}ba^{i_{n-1}})) = 0$. Dalej analogicznie definiujemy liczby $i_{n-2}, \ldots, i_1$ takie, by $P \circ K'$ na słowach $a^{i_n}ba^{i_{n-1}} \ldots ba^{i_j}$ miało na przemian wartości 1 i 0, w zależności od $j$. Więc $K'$ na słowie $s = a^{i_n}ba^{i_{n-1}} \ldots ba^{i_1}b$ zmienia parzystość przynajmniej $n$ razy. Ponieważ $K'$ jest monotoniczne, to

$$K'(s) \geqslant n.$$

■

Rozpatrzmy kolorowanie $K_\omega$ zdefiniowane następująco: $K_\omega(a^*) = 1$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$ i $w \in A^*$ niech $K_\omega(a^n bw) = K_n(w)$. Weźmy $K'$, o własności $[K_\omega] = [K']$, oraz dowolne $n$. Twierdzę, że istnieje słowo $r \in T$ takie, że $K'(r) \geqslant n$.

Niech $L$ będzie kolorowaniem określonym następująco: $L(s) = K'(a^n bs)$. Z definicji $[L] = [K_n]$, więc istnieje $s \in T$, że $L(s) \geqslant n$. Więc $K'(a^n bs) \geqslant n$.

Podsumowaniem tego rozumowania jest poniższy fakt.

**Fakt 7.1.3.** *Nie istnieje kolorowanie monotoniczne skończone $K$, spełniające $[K_\omega] = [K]$.*

Dzięki temu możemy zakończyć dowód twierdzenia.

*Dowód twierdzenia.* Szukanym zbiorem $D \subseteq A^\omega$ jest zbiór $[K_\omega]$. Ponieważ jest to zbiór definiowany przez kolorowanie monotoniczne, więc $D \in \mathbf{\Delta}^0_2$. Jednocześnie, gdyby $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, to istniałoby kolorowanie monotoniczne skończone $K$, dla którego $[K] = D$. Ale wtedy $[K] = D = [K_\omega]$, co daje sprzeczność z powyższym faktem. ■

## 7.2. $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$

W tym rozdziale wskażemy przykład odróżniający $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$.

**Twierdzenie 7.2.1.** *Istnieje kolorowanie $K_\omega$, takie że jeśli $[K'] = [K_\omega]$, to $K'$ nie jest skończone.*

W rozdziale 8 podany jest przykład kolorowania $K_\omega$ o podanej powyżej własności. Poniższa konstrukcja jest nieco prostsza, ponadto ma zastosowanie w twierdzeniu 9.1.3.

Metoda postępowania będzie analogiczna jak w przypadku inkluzji $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_2$. Najpierw zdefiniuję ciąg kolorowań $K_n$ z których każde wymagać będzie wahania przynajmniej $n$, a następnie złączę je wszystkie w kolorowanie $K_\omega$.

Niech $K_n \colon T \to \mathbb{N}$ będzie określone następująco:

- $K_n(A^* ba^i b) = i$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$,
- w pozostałych przypadkach $K_n(s) = n$.

Oczywiście kolorowanie $K_n$ ma wahanie równe $n$. Pozostaje wykazać poniższy lemat.

**Lemat 7.2.2.** *Dla każdego $n$, jeśli kolorowanie $K'$ spełnia $[K'] = [K_n]$, to wahanie $K'$ wynosi przynajmniej $n$.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego $n$ istnieje $K'$ o wahaniu co najwyżej $n-1$ spełniające $[K'] = [K_n]$. Zdefiniuję przez indukcję ciąg $\alpha \in A^\omega$, który rozróżnia $[K']$ i $[K_n]$ (ściśle: należy do ich różnicy symetrycznej).

Niech $\alpha_0 = \epsilon$, $\alpha_1 = b$. Załóżmy teraz, że jest określone $\alpha_j$ dla pewnego $j \geqslant 1$. Zdefiniuję $\alpha_{j+1} > \alpha_j$. Indukcyjnie wiem, że $\alpha_j > \alpha_{j-1}$. Określmy $r = \alpha_j - \alpha_{j-1}$. Niech teraz $M$ będzie najmniejszą wartością ze zbioru

$$\left\{K'(\alpha_{j-1}r_0), K'(\alpha_{j-1}r_0r_1), \ldots, K'(\alpha_{j-1}r_0r_1\ldots r_{|r|-1})\right\}.$$

Czyli $M$ to najmniejsza wartość jaką przyjęło kolorowanie $K'$ na ścieżce od pierwszej litery za $\alpha_{j-1}$ aż do $\alpha_j$. Niech teraz

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j a^{M+1} b.$$

W ten sposób w granicy dla $j \to \infty$ otrzymujemy dobrze określone $\alpha \in A^\omega$. Rozważmy teraz wartości $S = \liminf_{m\to\infty} K'(\alpha|_m)$ i $S' = \liminf_{m\to\infty} K_n(\alpha|_m)$. Wykażę, że $S' = S+1$.

Zauważmy, że w ciągu $\alpha$ występuje nieskończenie wiele $b$. Dodatkowo, ponieważ $K'$ ma wahanie ograniczone przez $n-1$, więc ciągi $a^i$ pomiędzy kolejnymi $b$ mają długości ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Dla dostatecznie długich $s < \alpha$, wartości $K'(s)$ są ograniczone z dołu przez $S$, więc od pewnego momentu ciągi $a^i$ w $\alpha$ są nie krótsze niż $S+1$. Więc $S' \geqslant S+1$. Jednocześnie, dla nieskończenie wielu $m$, zachodzi $K'(\alpha|_m) = S$. Więc dla nieskończenie wielu $m$, wartość $M$ rozpatrywana w definicji $\alpha_m$ jest równa $S$. Zatem nieskończenie wiele razy w $\alpha$ występuje podsłowo $ba^{S+1}b$. Czyli $S' \leqslant S+1$. W sumie $S' = S+1$.

Liczby $S, S+1$ mają różną parzystość, więc albo $\alpha \in [K'] \setminus [K_n]$, albo $\alpha \in [K_n] \setminus [K']$. Tak czy inaczej, $[K'] \neq [K_n]$. Sprzeczność. ∎

Możemy teraz zakończyć dowód twierdzenia.

*Dowód.* Pozostaje teraz zdefiniować kolorowanie $K_\omega$ w następujący sposób: $K_\omega(a^*) = 0$ i $K_\omega(a^n bw) = K_n(w)$, dla $n \in N$ i $w \in A^*$. Analogicznie jak w przypadku kolorowań monotonicznych, gdyby istniało $K'$ o wahaniu skończonym, spełniające $[K'] = [K_\omega]$, to biorąc $n$ większe od wahania $K'$ i rozważając poddrzewo o korzeniu $a^n b$ otrzymujemy sprzeczność. ∎

# Rozdział 8

# Dlaczego $\liminf$?

W poniższym rozdziale przedstawiona jest analiza alternatywnej definicji kolorowania. Można mianowicie, zamiast warunku, by na każdej gałęzi nieskończonej $\alpha$ określona była wartość $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$, rozważać warunek

$$\forall_{\alpha\in A^\omega} \limsup_{n\to\infty} K(\alpha|_n) < \infty.$$

Funkcje $M\colon T \to \mathbb{N}$ spełniające taki warunek nazwijmy kolorowaniami typu max. Oznaczać je będziemy literą $M$. Zbiór definiowany przez kolorowanie typu max, to

$$[M]_{\max} = \left\{\alpha \in A^\omega : P\left(\limsup_{n\to\infty} M(\alpha|_n)\right) = 1\right\}.$$

Jak łatwo sprawdzić, każde kolorowanie $M$ typu max, definiuje zbiór $[M]_{\max} \in \mathbf{\Delta}^0_3$. Dowód jest analogiczny jak w przypadku zwykłych kolorowań. Podobnie jak dla zwykłych kolorowań, można rozpatrywać dwie ich podklasy:

- Kolorowania skończone typu max, czyli takie, gdzie wartości funkcji $M$ są wspólnie ograniczone przez jakąś liczbę $N$. Kolorowania takie są w odpowiedniości ze zwykłymi kolorowaniami skończonymi, poprzez formuły $K(s) = 2N - M(s)$ i $M(s) = 2N - K(s)$.

- Kolorowania monotoniczne typu max, czyli takie, gdzie wartości $M$ są niemalejące na gałęziach. Takie kolorowania to dokładnie te same funkcje, co zwykłe kolorowania monotoniczne. Indukowane zbiory też są równe, gdyż w tym przypadku zawsze określona jest wartość $\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$.

Czyli cała prezentowana powyżej teoria w łatwy sposób przenosi się na kolorowania typu max, z dokładnością do jednego szczegółu. Mianowicie a'priori nie wiadomo, czy każdy zbiór $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$ jest definiowany przez jakieś kolorowanie typu max. Okazuje się, że odpowiedź jest negatywna, dalsza część tego rozdziału prowadzi do dowodu tego faktu.

## 8.1. Własność upraszczania $\mathcal{P}$

Najpierw zdefiniujmy pewną własność, którą mogą posiadać podzbiory przestrzeni $A^\omega$.

**Definicja 8.1.1.** *Powiemy, że zbiór $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$ ma własność upraszczania, jeśli istnieje zbiór bazowy otwarty $U_s = [s]$ dla pewnego $s \in T$, spełniający*

$$D \cap U_s \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2(U_s)).$$

*Rodzinę wszystkich zbiorów z własnością upraszczania oznaczam $\mathcal{P}$.*

Okazuje się, że wszystkie zbiory definiowane przez kolorowania typu max mają powyższą własność.

**Twierdzenie 8.1.2.** *Dla każdego kolorowania $M$ typu* max*, zbiór $[M]_{\max}$ ma własność upraszczania.*

*Dowód.* Wiemy, że $[M]_{\max} \in \mathbf{\Delta}^0_3$. Zdefiniujmy przez indukcję ciąg $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq T$. Niech $s_0 = \epsilon$. Załóżmy, że jest określone $s_0 < s_1 < \ldots < s_i$. Rozważmy dwa przypadki:

- Wśród wartości $\{M(s_i w) : w \in T\}$ istnieje większa niż $M(s_i)$. Określmy wtedy $s_{i+1} > s_i$, spełniające $M(s_{i+1}) > M(s_i)$.
- Wszystkie wartości w poddrzewie o korzeniu w $s_i$ są ograniczone przez $M(s_i)$. W takim przypadku kończymy postępowanie w kroku $i$.

Okazuje się, że powyższe postępowanie zawsze musi zakończyć się w jakimś kroku $i \in \mathbb{N}$. Gdyby bowiem tak nie było, dostalibyśmy nieskończony ciąg $s_0 < s_1 < \ldots$, spełniający $M(s_0) < M(s_1) < \ldots$ . Ale to dawałoby element $\alpha \in A^\omega$, spełniający $\forall_{i\in\mathbb{N}} s_i < \alpha$ i

$$\limsup_{n\to\infty} M(\alpha|_n) = \infty.$$

Czyli sprzeczność z faktem, że $M$ jest kolorowaniem typu max.

Wobec tego opisane wyżej postępowanie zawsze kończy się w jakimś kroku $i \in \mathbb{N}$, definiując pewien wierzchołek $s_i \in T$. Rozważmy $U = [s_i]$. Po ograniczeniu $M$ do poddrzewa o korzeniu $s_i$, wszystkie wartości są wspólnie ograniczone. Więc $M$ na $U$ definiuje zbiór $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. Więc $[M]_{\max}$ ma własność upraszczania. ■

## 8.2. Odróżnienie $\mathcal{P} \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$

W tym podrozdziale wskażę zbiór $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$ który nie ma własności upraszczania, więc nie jest definiowany przez żadne kolorowanie typu max. Za przekonanie mnie, że takie zbiory istnieją, dziękuję panom Witoldowi Marciszewskiemu i Filipowi Murlakowi. Poniższa konstrukcja opiera się na zaproponowanym pomyśle stworzenia zbioru $X \in \mathbf{\Delta}^0_3 \setminus BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$, homeomorficznego z $X \cap [s]$ dla wszystkich $s \in T$. Sposób realizacji tego zamiaru jest autorski. Dodatkowo, konstrukcja nie korzysta z żadnej dodatkowej wiedzy ponad fakty dotyczące kolorowań.

Rozważmy dwie funkcje $M, C \colon T \to N$:

- $M(\epsilon) = 0$ i dla $s \in T \setminus \{\epsilon\}$ wartość $M(s)$ to największa liczba $n$ taka, że słowo $a^n$ występuje jako infiks $p(s)$, czyli $s = A^* a^n A^+$.

- Funkcja $C$ przypisuje słowu $s \in T$ największe takie $n$, że $a^n$ jest sufiksem $s$, czyli $s = A^* a^n$.

Własności zdefiniowanych funkcji podsumowuje poniższy lemat.

**Lemat 8.2.1.** *Dla dowolnego słowa $s$, zachodzi nierówność $C(s) \leqslant M(s) + 1$.*
*Dodatkowo równość $C(s) = M(s) + 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s = a^{C(s)}$, lub $s = wba^{C(s)}$ i w słowie $w$ nie występuje podsłowo $a^{C(s)}$.*

Zdefiniujmy teraz funkcję $K \colon T \to \mathbb{N}$ dla dowolnego słowa $s \in T$, w następujący sposób:

- jeśli $s = \epsilon$, to $K(s) = 0$,
- wpp. jeśli $C(s) = M(s) + 1$, to $K(s) = 0$,
- wpp. jeśli $s = ra$, dla pewnego $r \in T$, to $K(s) = K(r)$,
- wpp. jeśli $s = rb$, dla pewnego $r \in T$, to $K(s) = C(r)$.

Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$, możliwe są dwa rozłączne przypadki:

1. Ciągi $a^n$ występujące w $\alpha$ są dowolnie długie. Wtedy dla nieskończenie wielu $s < \alpha$ zachodzi $C(s) = M(s)+1$, czyli nieskończenie często $K(s) = 0$ dla $s < \alpha$.
2. Ciągi $a^n$ występujące w $\alpha$ są ograniczonej przez $N \in \mathbb{N}$ długości. Wtedy dla $s < \alpha$, wartości $K(s)$ są ograniczone przez $N$.

W każdym z dwóch przypadków określona jest wartość $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$, więc $K$ jest kolorowaniem. Dodatkowo, jeśli ma miejsce przypadek drugi, to dla dostatecznie długich $r < \alpha$, $K$ spełnia następujące równania: $K(ra) = K(r)$, $K(rb) = C(r)$.

**Lemat 8.2.2.** *Dla każdego słowa nieskończonego $\alpha \in A^\omega$ i słowa skończonego $w \in A^*$, zachodzi*

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = \liminf_{n\to\infty} K((w\alpha)|_n).$$

*Czyli $\alpha \in [K]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w\alpha \in [K]$.*

Powyższy lemat mówi między innymi to, że zbiór $[K]$ jest samopodobny, to znaczy dla każdego $w \in T$, funkcja $\alpha \mapsto w\alpha$ jest homeomorfizmem $A^\omega$ na $[w]$, przeprowadzającym $[K]$ na $[K] \cap [w]$.

*Dowód.* Weźmy dowolne $\alpha, w$. Rozważmy który z przypadków zachodzi:

1. Ciągi $a^n$ są nieograniczenie długie w $\alpha$. Wtedy tę samą własność ma $w\alpha$ i obie strony dowodzonej równości są równe 0.
2. Ciągi $a^n$ są ograniczonej przez $N \in \mathbb{N}$ długości w $\alpha$. Czyli w szczególności w $\alpha$ występuje nieskończenie wiele liter $b$. Oznaczmy długości ciągów $a^n$ pomiędzy kolejnymi literami $b$ jako $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{0, 1, \ldots, N\}$. Wtedy

   $$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = \liminf_{i\to\infty} n_i.$$

   Prawej strony tej równości nie zmienia dopisanie na początku $\alpha$ słowa $w$, więc lewa strona również pozostaje bez zmian.

■

Pozostaje już tylko wykazać poniższy lemat.

**Lemat 8.2.3.** *Nie istnieje kolorowanie o skończonym wahaniu $K'$, spełniające $[K'] = [K]$.*

*Dowód.* Załóżmy, że istnieje kolorowanie $K'$ o wahaniu ograniczonym przez $n$, spełniające $[K'] = [K]$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 7.2.1 skonstruujemy $\alpha \in A^\omega$, jako granicę $\epsilon = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$.

Niech $\alpha_0 = \epsilon$, $\alpha_1 = b$. Załóżmy teraz, że jest określone $\alpha_j$ dla pewnego $j \geqslant 1$. Zdefiniuję $\alpha_{j+1} > \alpha_j$. Indukcyjnie wiem, że $\alpha_j > \alpha_{j-1}$. Określmy $r = \alpha_j - \alpha_{j-1}$. Niech teraz $M$ będzie najmniejszą wartością ze zbioru

$$\left\{K'(\alpha_{j-1}r_0), K'(\alpha_{j-1}r_0r_1), \ldots, K'(\alpha_{j-1}r_0r_1\ldots r_{|r|-1})\right\}.$$

Czyli $M$ to najmniejsza wartość, jaką przyjęło kolorowanie $K'$ na ścieżce od pierwszej litery za $\alpha_{j-1}$ aż do $\alpha_j$. Niech teraz

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j a^{M+1} b.$$

W ten sposób, w granicy dla $j \to \infty$, otrzymujemy dobrze określone $\alpha \in A^\omega$. Rozważmy teraz wartości $S = \liminf_{m\to\infty} K(\alpha|_m)$ i $S' = \liminf_{m\to\infty} K'(\alpha|_m)$. Wykażę, że $S' = S + 1$.

Zauważmy, że w ciągu $\alpha$ występuje nieskończenie wiele $b$. Dodatkowo, ponieważ $K'$ ma wahanie ograniczone przez $n$, więc ciągi $a^i$ pomiędzy kolejnymi $b$, mają długości ze zbioru $\{1, \ldots, n+1\}$. Od pewnego momentu wartości $K'$ na $\alpha$ są ograniczone z dołu przez $S'$. Więc od pewnego momentu ciągi $a^i$ są nie krótsze niż $S' + 1$. Zatem $S \geqslant S' + 1$. Jednocześnie nieskończenie wiele razy $K'(\alpha|_m) = S'$, więc nieskończenie wiele razy $M = S'$, więc nieskończenie wiele razy występuje w $\alpha$ podsłowo $ba^{S'+1}b$. Czyli $S \leqslant S' + 1$. W sumie $S = S' + 1$.

Ale liczby $S, S+1$ mają różną parzystość, więc albo $\alpha \in [K] \setminus [K']$, albo $\alpha \in [K'] \setminus [K]$. Tak czy inaczej, $[K] \neq [K']$. Sprzeczność. ■

Korzystając z powyższych lematów, można prosto pokazać poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 8.2.4.** *Zbiór $[K]$ nie ma własności uproszczania.*

*Dowód.* Gdyby $[K]$ miał własność upraszczania, to dla pewnego $w \in T$, zbiór $[K] \cap [w]$ leżałby w $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2([w]))$. Ale zbiór $[K]$ jest samopodobny, więc wtedy też $[K]$ byłby typu $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. A wiemy, że tak nie jest, bo nie jest on definiowany przez żadne kolorowanie skończone. ■

Komplikacja powyższego przykładu wynika z faktu, że wymagamy by powstałe kolorowanie definiowało zbiór samopodobny. Kolorowanie $K_\omega$ zdefiniowane w rozdziale 7.2 jest prostsze, ale nie jest samopodobne — dla każdego $n$ zbiór $[K_\omega] \cap [a^n b]$ leży w $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

# Rozdział 9

# Inne spojrzenia

W tym rozdziale przedstawionych jest kilka pomysłów, jak spojrzeć na kolorowania w kontekście znanych wcześniej obiektów.

## 9.1. Automaty

Pierwotną inspiracją dla pojęcia kolorowania, były deterministyczne skończone automaty parzystości. W tej sekcji rozważane są dwa rozszerzenia modelu automatu, równoważne kolorowaniom — automaty nieskończone i automaty z poradą.

### 9.1.1. Automaty nieskończone

W tym podrozdziale rozpatrujemy naturalne rozszerzenie pojęcia automatu, dopuszczając sytuację, gdy będzie on posiadał nieskończenie wiele stanów. Okaże się, że automaty takie odpowiadają dokładnie kolorowaniom, a dodatkowe ograniczenia na liczbę ranków, czy wymagania by automat był słaby, odpowiadają skończoności i monotoniczności odpowiedniego kolorowania. Poniżej zaprezentowane jest rozszerzenie pojęcia automatu skończonego.

**Definicja 9.1.1.** *Automat nieskończony $\mathcal{A}$ to dowolna krotka $\langle q_0, Q, \delta, \Omega\rangle$ jak w definicji automatu. Zamiast założenia, że $Q$ jest skończony, zakładamy że jest przeliczalny. Dodatkowy warunek jest taki, by dla każdego $\alpha \in A^\omega$, dla ciągu ranków $(R^\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, występujących w biegu $\mathcal{A}$ na $\alpha$, zachodził warunek*

$$\liminf_{n\to\infty} R^\alpha_n < \infty.$$

*Dodatkowo automat ma skończenie wiele ranków, jeśli $\sup_{q\in Q}\Omega(q) < \infty$ i jest słaby, jeśli dla każdych $q \in Q, z \in A$ zachodzi $\Omega(\delta(q, z)) \geqslant \Omega(q)$.*

Kluczową (aczkolwiek prostą) obserwację na temat takich automatów formułuje poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 9.1.2.** *Rodzina zbiorów definiowanych przez automaty nieskończone i rodzina zbiorów definiowanych przez kolorowania są równe.*

*Dodatkowo, powyższa równość zachodzi, gdy rozpatrzymy:*

- *automaty o skończenie wielu rankach i kolorowania o skończonym wahaniu,*
- *automaty słabe i kolorowania monotoniczne,*
- *automaty słabe o skończenie wielu rankach i kolorowania monotoniczne skończone.*

*Dowód.* Weźmy najpierw dowolny automat $\mathcal{A}$, skończony lub nie. Zauważmy, że każde słowo $s \in T$ definiuje jednoznacznie stan $q_s \in Q$, w którym jest automat $\mathcal{A}$ po wczytaniu $s$. Zdefiniujmy teraz $K(s) = \Omega(q_s)$. Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$, ciąg $R_n^\alpha$ ranków występujących w biegu $\mathcal{A}$ na $\alpha$ i ciąg $K(\alpha|_n)$ są równe. Więc $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$ jest określone i $\alpha \in L(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in [K]$. Więc $L(\mathcal{A}) = [K]$.

Teraz weźmy dowolne kolorowanie $K$. Rozważmy automat $\mathcal{A}$ o stanach $Q = A^{<\omega}$ i stanie początkowym $q_0 = \epsilon$. Niech teraz $\delta(w, z) = wz$ i $\Omega(q) = K(q)$. Jak łatwo sprawdzić $\mathcal{A}$ jest automatem nieskończonym i $[K] = L(\mathcal{A})$.

W obu powyższych konstrukcjach zachowywane są własności skończenie wielu ranków (skończonego wahania) i słabości (monotoniczności) odpowiedniego automatu i kolorowania. ■

Wobec powyższego twierdzenia, wyniki uzyskane dla kolorowań, przenoszą się na języki rozpoznawane przez automaty nieskończone. Więc między innymi:

- automaty nieskończone rozpoznają wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}_3^0$,
- automaty o skończenie wielu rankach rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$,
- automaty słabe rozpoznają wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}_2^0$,
- automaty słabe o skończenie wielu rankach rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$,
- zastąpienie warunku $\liminf$ klasycznym warunkiem $\limsup$ sprawia, że siła wyrazu automatów nieskończonych istotnie maleje i przestają one rozpoznawać wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}_3^0$.

Podobne spostrzeżenie do powyższej różnicy pomiędzy warunkiem $\liminf$ i $\limsup$ można znaleźć w pracy [GW06]. Znajduje się tam analiza gier parzystości o potencjalnie nieskończenie wielu rankach i stawiane jest pytanie o determinację pozycyjną takich gier. Okazuje się tam (bez odwołania się do topologii), że determinacja taka ma miejsce w przypadku warunku $\liminf$, natomiast w ogólności nie zachodzi przy warunku $\limsup$.

Przy okazji warto zauważyć, że przykłady kolorowań $K_n$ definiowanych w rozdziałach 7.1 i 7.2 zbudowane są w oparciu o proste automaty skończone o $n + 1$ stanach. Poniższe twierdzenie wyraża tę zależność.

**Twierdzenie 9.1.3.** *Dla każdego $n$ istnieje język rozpoznawany przez (słaby) automat o $n+1$ stanach i rankach $\{0, 1, \ldots, n\}$, który nie jest definiowany przez żadne (monotoniczne) kolorowanie o wahaniu $n - 1$.*

### 9.1.2. Automaty z poradą

W pracy [BNR$^+$10] analizowane jest pojęcie automatu z poradą. Poniżej znajduje się jedna z równoważnych definicji takiego automatu.

**Definicja 9.1.4.** *Deterministyczny automat parzystości z poradą, to dowolna krotka* $\langle q_0, Q, \delta, \Omega\rangle$ *jak w definicji automatu, z tą różnicą, że funkcja* $\delta$ *prowadzi z* $Q \times A^*$ *w* $Q$*, czyli przypisuje całemu do tej pory wczytanemu słowu kolejny stan automatu.*

Okazuje się, że automaty takie w bezpośredni sposób odpowiadają kolorowaniom skończonym.

**Fakt 9.1.5.** *Rodzina zbiorów definiowanych przez automaty z poradą i rodzina zbiorów definiowanych przez kolorowania skończone są równe.*

*Dowód.* Dowód jest w zasadzie taki sam jak dowód twierdzenia 9.1.2.

Weźmy dowolny automat z poradą $\mathcal{A}$. Ponieważ jest on deterministyczny, dla każdego słowa $s \in T$ można określić stan $q_s \in Q$, w którym będzie automat po wczytaniu słowa $s$. Niech kolorowanie $K$ będzie określone następująco

$$K(s) = \Omega(q_s).$$

Jak łatwo sprawdzić, $\mathcal{A}$ akceptuje $\alpha \in A^\omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in [K]$.

Weźmy dowolne kolorowanie skończone $K$ o wahaniu $N$. Określmy automat z poradą $\mathcal{A}$ o stanach $Q = \{0, 1, \ldots, N\}$ z $q_0 = 0$. Niech $\Omega(n) = n$ i $\delta(s, q) = K(s)$. Jak wyżej, $\alpha \in A^\omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in [K]$. ■

Powyższa równoważność pozwoliła wykorzystać wyniki uzyskane dla kolorowań do przypadku automatów z poradą. Chodzi konkretnie o fakt 2.1.3 i twierdzenie 4.0.11 z tej pracy, których bezpośrednim wnioskiem jest, że automaty z poradą rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. Jest to treść twierdzenia 2.1 z pracy [BNR$^+$10]. Użyte tam metody dowodowe różnią się nieco od prezentowanych tutaj, gdyż operują bezpośrednio na automatach z poradą, nie wprowadzając explicite pojęcia kolorowania.

## 9.2. Lipschitzowskie redukcje

Oprócz kontekstu automatowego można rozpatrywać kolorowania jako pewne szczególne funkcje $A^\omega \to \mathbb{N}^\omega$. By zdefiniować o jakie konkretnie funkcje chodzi, poczyńmy wpierw kilka spostrzeżeń.

**Fakt 9.2.1.** *Weźmy dowolny zbiór* $X$*. Określmy funkcję* $d_X \colon X^\omega \times X^\omega \to \mathbb{R}$ *wzorami:* $d_X(\alpha, \alpha) = 0$ *i dla* $\alpha \neq \beta$*,* $n = \min\{n : \alpha_n \neq \beta_n\}$ *niech* $d_X(\alpha, \beta) = 2^{-n-1}$*.*

*Funkcja* $d_X$ *jest metryką na* $X^\omega$*. Dodatkowo, gdy* $X = A$*, metryka* $d_A$ *wyznacza topologię Cantora na* $A^\omega$*.*

Fakt ten jest opisany w rozdziale 2.B w książce [Kec95].

**Definicja 9.2.2.** *Powiemy, że funkcja* $f\colon X \to Y$ *pomiędzy dwoma przestrzeniami metrycznymi jest* lipshitzowska ze stałą $L \in \mathbb{R}$, *jeśli dla każdej pary* $x, y \in X$ *zachodzi równanie*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant L \cdot d_X(x, y).$$

Okazuje się, że zadana powyżej metryka wymusza szczególną postać funkcji lipshitzowskich ze stałą 1 na przestrzeniach ciągów nieskończonych.

**Fakt 9.2.3.** *Jeśli funkcja* $f\colon X^\omega \to Y^\omega$ *jest lipshitzowska ze stałą* 1, *to istnieje funkcja* $\overline{f}\colon X^{<\omega} \to Y$ *taka, że*

$$\forall_{\alpha \in X^\omega} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ f(\alpha)_n = \overline{f}(\alpha|_n).$$

*Dodatkowo, dla dowolnej funkcji* $\overline{g}\colon X^{<\omega} \to Y$, *funkcja* $g\colon X^\omega \to Y^\omega$, *określona* $g(\alpha)_n = \overline{g}(\alpha|_n)$ *jest lipshitzowska ze stałą* 1.

*Dowód.* Weźmy dowolne słowo $s \in X^{<\omega}$ i oznaczmy $n = |s|$. Weźmy dowolne $\alpha_s$, takie by $\alpha_s|_n = s$. Określmy $\overline{f}(s) = f(\alpha_s)_n$. Oczywiście, o ile $\overline{f}$ jest dobrze określona, to spełnia tezę faktu.

Pokażemy, że powyższa definicja nie zależy od wyboru $\alpha_s$. Weźmy $\beta_s$ spełniające $\beta_s|_n = s$. Wtedy $d_X(\alpha_s, \beta_s) < 2^{-n-1}$. Więc $d_Y(f(\alpha_s), f(\beta_s)) < 2^{-n-1}$. Wobec tego $f(\alpha_s)|_n = f(\beta_s)|_n$, w szczególności $f(\alpha_s)_n = f(\beta_s)_n$.

Weźmy teraz $\overline{g}$ jak w treści faktu i dowolne $\alpha \neq \beta \in X^\omega$. Niech $n = \min\{n : \alpha_n \neq \beta_n\}$. Wtedy $\alpha|_n = \beta|_n$, więc też $g(\alpha)|_n = g(\beta)|_n$, toteż $d_Y(g(\alpha), g(\beta)) \leqslant 2^{-n-1} = d_X(\alpha, \beta)$. ■

Gdy przyjmiemy w powyższym fakcie $X = A$ i $Y = \mathbb{N}$, uzyskana funkcja $\overline{f}$ prowadzi z $T$ w $\mathbb{N}$, tak samo jak kolorowania. By odpowiedniość była kompletna, pozostaje określić następujące zbiory.

**Definicja 9.2.4.** *Niech*

$$\mathcal{I} = \left\{\eta \in \mathbb{N}^\omega : \liminf_{n\to\infty} \eta(n) < \infty\right\},$$

$$\mathcal{R} = \left\{\eta \in \mathcal{I} : P\left(\liminf_{n\to\infty} \eta(n)\right) = 1\right\}.$$

**Twierdzenie 9.2.5.** *Zbiór* $X \subseteq A^\omega$ *jest definiowany przez kolorowanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja* $f\colon A^\omega \to \mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^\omega$ *lipshitzowska ze stałą* 1, *spełniająca*

$$X = f^{-1}(\mathcal{R}).$$

*Dowód.* Załóżmy, że $X = [K]$ dla pewnego kolorowania $K$. Korzystając z faktu 9.2.3 dla $\overline{g} = K$, otrzymujemy funkcję $g\colon A^\omega \to \mathbb{N}^\omega$. Z definicji kolorowania, dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodzi $g(\alpha) \in \mathcal{I}$. Dodatkowo

$$\alpha \in [K] \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) \equiv 1 \mod 2 \Leftrightarrow g(\alpha) \in \mathcal{R}.$$

Załóżmy teraz, że $X = f^{-1}(\mathcal{R})$, dla pewnej $f$ jak w sformułowaniu twierdzenia. Weźmy $K = \overline{f}$ określoną w fakcie 9.2.3. Ponieważ dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodziło $f(\alpha) \in \mathcal{I}$, to $K$ jest kolorowaniem. Jak poprzednio $\alpha \in [K]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\alpha) \in \mathcal{R}$. ■

Takie spojrzenie na kolorowania może dawać pewną intuicję dotyczącą ich natury. Wydaje się jednak, że prezentowane rozumowania łatwiej wyraża się w kombinatoryczny sposób, analizując funkcje $T \to \mathbb{N}$, niż myśląc o lipschitzowskich redukcjach.

## 9.3. Hierarchia różnicowa

Jednym ze znanych narzędzi do badania rodzin $\mathbf{\Delta}^0_\eta$ jest hierarchia różnicowa, gdzie rozpatruje się zbiory, powstałe jako naprzemienne różnice zbiorów prostszych. Różnice te indeksowane są liczbami porządkowymi, mniejszymi niż $\omega_1$.

Aby uprościć przykład, badać będziemy jedynie hierarchię różnicową budowaną ze zbiorów $\mathbf{\Sigma}^0_2$ w odniesieniu do kolorowań ogólnych. Analogiczne spostrzeżenia można by przeprowadzić dla kolorowań monotonicznych i hierarchii opartej o zbiory $\mathbf{\Sigma}^0_1$.

Poniżej definiuję tylko skończone poziomy hierarchii. Wyższe poziomy określone są analogicznie, z ich definicji nie będziemy korzystać.

**Definicja 9.3.1.** *Dla danego wstępującego ciągu zbiorów $(F_i)_{i<n} \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$, zdefiniujmy:*

- *jeśli $P(n) = 0$, to*

$$D_n(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}) := (F_1 \setminus F_0) \cup (F_3 \setminus F_2) \cup \ldots \cup (F_{n-1} \setminus F_{n-2}).$$

- *jeśli $P(n) = 1$, to*

$$D_n(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}) := F_0 \cup (F_2 \setminus F_1) \cup (F_4 \setminus F_3) \cup \ldots \cup (F_{n-1} \setminus F_{n-2}).$$

*Niech $D_n$ będzie rodziną wszystkich zbiorów $D_n((F_i))$, po wszystkich możliwych $(F_i) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ jak powyżej. Rodzinę $D_n$ nazywamy poziomem $n$ w hierarchii różnicowej.*

Szerzej zagadnienia te są opisane w paragrafie 12 rozdziału pierwszego u K. Kuratowskiego [Kur66] i w rodziale 22.E w książce [Kec95]. Poniżej znajduje się podsumowanie kluczowych własności z odnośnikami do książki A. Kechrisa.

**Fakt 9.3.2.** *Definicję $D_\eta$ można rozszerzyć dla liczb porządkowych $\omega \leqslant \eta < \omega_1$ (definicja z początku rozdziału 22.E).*

*Zbiory $D_\eta$ stanowią ściśle wstępującą hierarchię (wniosek z ćwiczenia 22.26).*

*Ponadto $\bigcup_{\eta<\omega_1} D_\eta = \mathbf{\Delta}^0_3$ i $\bigcup_{\eta<\omega} D_\eta = BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ (odpowiednio twierdzenie 22.27 i ćwiczenie 22.29).*

Okazuje się, że dla skończonych poziomów hierarchii różnicowej, pokrywa się ona z hierarchią kolorowań o skończonych wahaniach. Pokazują to poniższe dwa fakty.

**Fakt 9.3.3.** *Jeśli $K$ to kolorowanie o wahaniu $n$, to $[K] \in D_n$.*

*Dowód.* Wystarczy skorzystać z postaci normalnej zaproponowanej w formule 4.0.1 w rozdziale 4 i zdefiniować $E_i = F_{n-i}$. Wtedy $(E_i)_{0\leqslant i<n}$ to ciąg wstępujący i $[K] = D((E_i))$. ∎

**Fakt 9.3.4.** *Jeśli zbiór $X \in D_n$, to istnieje kolorowanie $K$ o wahaniu co najwyżej $n$, spełniające $[K] = X$.*

*Dowód.* Zmieńmy kolejność składników w sumie z definicji $D_n$, tak by $X = (F_0 \setminus F_1) \cup (F_2 \setminus F_3) \cup \ldots \cup (F_{k-1} \setminus F_k)$, dla zstępujących $F_i \in \mathbf{\Sigma}_2^0$ i $k \in \{n-1, n\}$ i $F_n = \emptyset$.

Niech $K_i$ to kolorowanie o wartościach $\{0, 1\}$ spełniające $[K_i] = F_i$ jak w fakcie 4.0.12.

Połóżmy $K(\epsilon) = 0$. Weźmy dowolne $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech $i$ to najmniejsza taka liczba, że $K_i(s) = 0$ lub $K(p(s))$, gdy taka nie istnieje. Połóżmy $K(s) = i$. Przy tej definicji, wartości $K$ są oczywiście ograniczone przez $n$.

Weźmy dowolne $\alpha \in A^\omega$. Niech $j$ to najmniejsza taka liczba, że $\alpha \notin F_j$. Oczywiście $j \leqslant n$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 6.1.1 pokazujemy, że od pewnego momentu $K(\alpha|_n) \geqslant j$. Jednocześnie, nieskończenie często $K(\alpha|_n) = j$. Wobec tego $\liminf_n K(\alpha|_n) = j$. Więc $\alpha \in [K]$ wtw. $P(j) = 1$ wtw. $\alpha \in X$. Więc $[K] = X$. ■

Dzięki pokazanej tutaj równoważności, można byłoby zrezygnować z dowodu faktu 2.2.3 i zamiast tego powołać się na ćwiczenie 22.29 w książce Kechrisa mówiące, że $\bigcup_{n<\omega} D_n = BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$. Jednak wtedy stracilibyśmy wiedzę o tym o ile wzrasta wahanie kolorowania przy operacjach boolowskich.

Aktualnie nie wiadomo jak przenieść odpowiedniość pokazaną powyżej, na pozaskończone poziomy hierarchii różnicowej. Z jednej strony trudno kolorowaniu o nieskończonym wahaniu przypisać liczbę porządkową, określającą złożoność definiowanego przez nie zbioru w hierarchii różnicowej. Z drugiej strony, w dowodach obu powyższych faktów odgrywało rolę, że mogliśmy *odwócić* kolejność zbiorów w ciągu, a następnie indeksy zbiorów traktować jako wartości kolorowania. Nie jest jasne, jak należałoby to wykonać w przypadku ciągów pozaskończonych.

Zachodzi podejrzenie, że pełną odpowiedniość pomiędzy kolorowaniami a hierarchią różnicową da się uzyskać, dostosowując nieco definicję obu pojęć. W tym celu ciągi zbiorów w hierarchii różnicowej powinny być zstępujące. Możliwe też, że konieczne będzie przejście do dopełnienia zbioru definiowanego przez kolorowanie.

Poniżej znajduje się hipoteza, w jaki sposób należy kolorowaniom przypisywać pozaskończone indeksy.

**Hipoteza 9.3.5.** *Dla danego kolorowania $K$ rozważmy funkcję $W \colon T \to \mathbb{N}$ określoną następująco:*

$$W(s) = \min\{K(st) : t \in T\}.$$

*Wyróżnijmy $R \subseteq T$ jako zbiór tych $s \in T \setminus \{\epsilon\}$, dla których $W(s) > W(p(s))$. Zbiór $R \cup \{\epsilon\}$ z porządkiem dziedziczonym z $T$ jest dobrze ufundowany. Złożonością kolorowania $K$ (ozn. $\rho(K)$) określamy rangę[1] porządku $R \cup \{\epsilon\}$.*

Poniżej kilka prostych własności tak określonej złożoności kolorowań.

[1] Definicję rangi porządku można znaleźć w rozdziale 2.E w książce [Kec95].

**Fakt 9.3.6.** *Jeśli kolorowanie $K$ jest skończone o wahaniu $N$, to $\rho(K) \leqslant N$.*

*Dla każdego kolorowania $K$ zachodzi $\rho(K) < \omega_1$.*

**Fakt 9.3.7.** *Istnieje kolorowanie $K$ o własności $\rho(K) \geqslant \omega$.*

*Dowód.* Rozważmy kolorowanie monotoniczne $K_\omega$ zdefiniowane w rozdziale 7.1. Ponieważ $K_\omega$ jest monotoniczne, więc dla każdego $s \in T$ zachodzi $W(s) = K(s)$. Zauważmy, że porządek $R$ określone dla $K_\omega$ składa się z elementu najmniejszego $\epsilon$ oraz parami nieporównywalnych składowych $R_n = R \cap \{a^n w : w \in T\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jak łatwo sprawdzić $R_n$ ma rangę $n$, więc całe $R$ ma rangę $\omega + 1$. ■

# Rozdział 10

# Podsumowanie

W pracy zdefiniowano pojęcie kolorowania, czyli dowolnej funkcji $K\colon A^{<\omega} \to \mathbb{N}$, która na każdej gałęzi nieskończonej $\alpha \in A^\omega$ spełnia warunek

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) < \infty.$$

Dla każdego kolorowania $K$ zdefiniowany jest zbiór

$$[K] = \left\{\alpha \in A^\omega : \liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) \equiv 1 \pmod 2\right\}.$$

Dodatkowo wyróżniono dwie własności, jakie kolorowanie może posiadać:

- *monotoniczność* — kolorowanie musi być funkcją niemalejącą na gałęziach,
- *skończoność* — kolorowanie przyjmuje tylko skończenie wiele wartości.

Oprócz tego wyróżniono kolorowania o wahaniu 1, czyli o wartościach $\{0, 1\}$. Uzyskane wyniki są podsumowane w poniższej tabelce. Każda z sześciu komórek tej tabeli prezentuje rodzinę dokładnie tych podzbiorów $A^\omega$ które są definiowane przez odpowiednie kolorowania.

| **kolorowania** | **wahanie** 1 | **skończone** | **nieskończone** |
|---|---|---|---|
| **monotoniczne** | $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ | $BC(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ | $\boldsymbol{\Delta}^0_2$ |
| **niemonotoniczne** | $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ | $BC(\boldsymbol{\Sigma}^0_2)$ | $\boldsymbol{\Delta}^0_3$ |

Podane są konstruktywne metody tworzenia kolorowania dla danego zbioru. Wahanie kolorowania skończonego odpowiada bezpośrednio złożoności formuły boolowskiej definiującej odpowiedni zbiór. Przy okazji wykazano, że kolorowania o większych wahaniach definiują ściśle więcej zbiorów.

W deskryptywnej teorii mnogości znane są konstrukcje zbiorów, które gwarantują, że rodziny w powyższej tabeli są parami różne. W powyższej pracy zaproponowane są konkretne przykłady zbiorów pokazujących, że rodzina $\boldsymbol{\Delta}^0_3$ jest ściśle większa niż $BC(\boldsymbol{\Sigma}^0_2)$ oraz że rodzina $\boldsymbol{\Delta}^0_2$ jest ściśle większa niż $BC(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$.

Ponadto przedstawiona jest analiza alternatywnej definicji kolorowania, gdyby warunek $\liminf < \infty$ był zmieniony na $\limsup < \infty$. Wykazano, że istnieje zbiór definiowany przez kolorowanie z warunkiem $\liminf$, którego nie można zdefiniować przez kolorowanie z warunkiem $\limsup$.

Okazuje się, że kolorowania odpowiadają deterministycznym automatom parzystości o nieskończenie wielu stanach. Daje to silne związki zaprezentowanych wyników i teorii automatów na słowach nieskończonych. Jednym z wniosków jest, że automaty z warunkiem $\liminf$ o nieskończenie wielu stanach rozpoznają wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}^0_3$.

W pracy [BNR+10] analizowane są *automaty z poradą*. Okazuje się, że bezpośrednio odpowiadają one kolorowaniom skończonym. Spostrzeżenie to pozwala pokazać, że automaty z poradą rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

## 10.1. Podziękowania

Za liczne cenne sugestie dziękuję mojemu promotorowi — Henrykowi Michalewskiemu. Oprócz tego chciałbym również podziękować panom Witoldowi Marciszewskiemu, Filipowi Murlakowi, Damianowi Niwińskiemu oraz Piotrowi Zakrzewskiemu za poświęcony czas.

# Bibliografia


[BNR$^+$10] Mikołaj Bojańczyk, Damian Niwiński, Alexander Rabinovich, Adam Radziwończyk-Syta, and Michał Skrzypczak. On the borel complexity of MSO definable sets of branches. *Fundamenta Informaticae*, 98(4):337–349, 2010. Online: `http://www.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/`.

[Boj09] Mikołaj Bojańczyk. Weak MSO with the unbounding quantifier. In *STACS*, pages 159–170, 2009.

[GW06] Erich Grädel and Igor Walukiewicz. Postinal determinacy of games with infinitely many priorities. *CoRR*, abs/cs/0610034, 2006.

[Kec95] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[Kur66] Kazimierz Kuratowski. *Topology. Vol. I.* Academic Press, New York, 1966.

[Tho96] Wolfgang Thomas. Languages, automata and logics. Technical Report 9607, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Christian-Albsechts-Universität, Kiel, Germany, 1996.

[Wag79] Klaus Wagner. On $\omega$-regular sets. *Information and Control*, 43(2):123–177, 1979.