# O kolorowaniach drzewa Cantora

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

22 kwietnia 2010

# Automaty parzystości

## Definicja

*Deterministyczny automat parzystości to krotka*

$$\mathcal{A} = \langle Q,\ q_0 \in Q,\ \delta\colon Q \times A \to Q,\ \Omega\colon Q \to \mathbb{N}\rangle\,.$$

*Język akceptowany przez automat*

$$L(\mathcal{A}) = \left\{\alpha \in A^\omega : \liminf_{n\to\infty} \Omega(q_n^\alpha) \equiv 1 \mod 2\right\}.$$

*Automat jest słaby jeśli $\Omega(q) \leq \Omega(\delta(q,a))$, czyli $\delta$ jest monotoniczna ze względu na $\Omega$.*

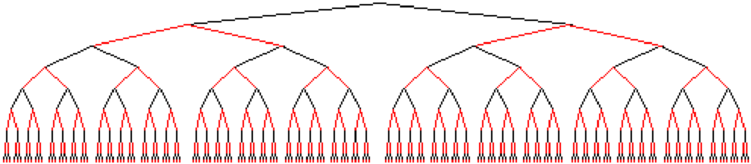
## Fakt

*Języki rozpoznawane przez automaty parzystości to dokładnie języki $\omega$-regularne.*

# Drzewo Cantora

## Definicja

*Drzewo Cantora to zbiór $A^*$ uporządkowany przez inkluzję. Jego element najmniejszy (korzeń) to słowo puste $\epsilon$.*



## Fakt

*Nieskończone gałęzie to słowa nieskończone nad $A$. Gdy zadamy na $A^\omega$ topologię generowaną przez zbiory postaci $[s] = sA^\omega$, otrzymujemy homeomorficzną kopię zbioru Cantora.*

# Hierarchia borelowska

## Definicja

*Indukcyjnie, dla $\eta < \omega_1$:*

- $\mathbf{\Sigma}^0_1$ – *zbiory otwarte w* $A^\omega$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ – *przeliczalne sumy zbiorów z* $\bigcup_{\beta<\eta} \mathbf{\Pi}^0_\beta$,
- $\mathbf{\Pi}^0_\eta$ – *dopełnienia zbiorów z* $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$,
- $\mathbf{\Delta}^0_\eta = \mathbf{\Sigma}^0_\eta \cap \mathbf{\Pi}^0_\eta$,
- $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_\eta\right)$ – *kombinacje boolowskie zbiorów* $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, dash] & & \mathbf{\Sigma}^0_2 \arrow[dr, dash] & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & \\
& \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_1\right) \text{ - } \mathbf{\Delta}^0_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right) \text{ - } \mathbf{\Delta}^0_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \\
\mathbf{\Pi}^0_1 \arrow[ur, dash] & & \mathbf{\Pi}^0_2 \arrow[ur, dash] & & \mathbf{\Pi}^0_3 &
\end{tikzcd}$$

# Własności hierarchii borelowskiej

## Fakt

*Hierarchia jest ścisła. Dla klas $\mathbf{\Sigma}^0_\eta, \mathbf{\Pi}^0_\eta$ istnieją zbiory zupełne w sensie ciągłych redukcji. Każda z klas zawiera kontinuum zbiorów.*

## Fakt

*Języki $\omega$-regularne leżą w klasie $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right)$. Nie wyczerpują jej, bo jest ich przeliczalnie wiele.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & \\
& \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_1\right) \text{ - } \mathbf{\Delta}^0_2 \arrow[ul, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right) \text{ - } \mathbf{\Delta}^0_3 \arrow[ul, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \\
\mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 &
\end{tikzcd}$$

# Kolorowania

## Definicja

*<u>Kolorowanie</u>, to dowolna funkcja* $K\colon A^* \to \mathbb{N}$ *z warunkiem, by dla każdego* $\alpha \in A^\omega$*, spełnione było*

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) < \infty.$$

$$L(K) = \left\{\alpha \in A^\omega : \liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) \equiv 1 \mod 2\right\}.$$

## Fakt

*Kolorowania, to to samo co „przeliczalne deterministyczne automaty parzystości”:*

$(\mathcal{A} \to K)$ $K(s) := \Omega(q_s)$,

$(K \to \mathcal{A})$ $Q := A^*$, $q_0 := \epsilon$, $\delta(s,a) := sa$, $\Omega := K$.

## Definicja

*Kolorowanie jest:*

- *skończone jeśli przyjmuje skończenie wiele wartości,*
- *monotoniczne jeśli nie maleje na gałęziach.*

## Twierdzenie (Główne wyniki)

| *kolorowania* | *skończone* | *ogólne* |
|---|---|---|
| *monotoniczne* | $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_1\right)$ | $\mathbf{\Delta}^0_2$ |
| *ogólne* | $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right)$ | $\mathbf{\Delta}^0_3$ |

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{\Sigma}^0_1 & & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & & \mathbf{\Sigma}^0_3 \\
& \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_1\right) \text{ - } \mathbf{\Delta}^0_2 & & & \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right) \text{ - } \mathbf{\Delta}^0_3 & & & \cdots \\
\mathbf{\Pi}^0_1 & & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & & \mathbf{\Pi}^0_3
\end{array}
$$

# Metody dowodowe

- $L(K+1) = A^\omega \setminus L(K)$.
- Każdy z typów kolorowań jest zamknięty na przecięcie – konstrukcja zbliżona do tej dla automatów.
- Więc każdy typ kolorowań zamknięty na operacje boolowskie.
- Każdy zbiór $\mathbf{\Sigma}^0_1$ jest opisywany przez kolorowanie monotoniczne o wartościach $\{0,1\}$.
- Każdy zbiór $\mathbf{\Sigma}^0_2$ jest opisywany przez kolorowanie ogólne o wartościach $\{0,1\}$.
- Jeśli $K \leq N$, to $L(K) = \bigcup_{0 \leq i \leq N/2} (F_{2i+1} \setminus F_{2i+2})$.

- $f\colon A^\omega \to A^\omega$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\bar{f}\colon A^* \to A^*$ „przybliżająca" $f$.
- Jeśli $f\colon A^\omega \to A^\omega$ ciągła i $K$ kolorowanie, to $f^{-1}(L(K)) \subseteq A^\omega$ jest opisywany przez kolorowanie tego samego typu co $K$.
- Jeśli $X \subseteq A^\omega$ leży w klasie $\mathbf{\Delta}^0_\eta$ to $X_n \nearrow X$ i $Y_n \nearrow A^\omega \setminus X$ dla pewnych $X_n, Y_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\eta-1}$.

# Wnioski

- Naturalna reprezentacja nieskończonego automatu parzystości.
- Kombinatoryczna charakteryzacja odpowiednich klas.
- Konkretne przykłady dla ścisłych inkluzji $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_n\right) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{n+1}$ przy $n = 1, 2$.
- Możliwość wyczerpania klas topologicznych modelem „automatowym”.
- Kolorowania skończone $\equiv$ automaty z poradą $\equiv$ zbiory gałęzi definiowanych w $MSO$ z dodatkowymi predykatami.
- Warunki $\liminf$ i $\limsup$ są nierównoważne (o tym zaraz).

# $\liminf$ vs. $\limsup$

## Definicja

*Kolorowania typu* $\max$ *– tak samo jak do tej pory, tylko* $\limsup$ *zamiast* $\liminf$.

## Fakt (Intuicja)

*Dla każdego ciągu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n < \infty \implies \liminf_{n\to\infty} a_n < \infty.$$

## Twierdzenie

| ***kolorowania*** $\max$ | ***skończone*** | ***ogólne*** |
|---|---|---|
| ***monotoniczne*** | $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_1\right)$ | $\mathbf{\Delta}^0_2$ |
| ***ogólne*** | $\mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right)$ | $\subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$ |

# Idea dowodu

- Jeśli $K$ – kolorowanie typu $\max$, to istnieje takie $s$, że $K|_{[s]}$ jest skończone. Bo można schodzić w dół drzewa, stale zwiększając $K(s_i)$, dopóki się da.
- Czyli $L(K) \cap [s] \in \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right)$ – „własność upraszczania”.
- Wystarczy wskazać $T \subseteq A^\omega$, taki że $T \in \mathbf{\Delta}^0_3 \setminus \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right)$ i $T$ niezależny od prefiksu:

$$\forall_{s \in A^*} T \cong T \cap [s].$$

- Wtedy $T$ nie ma własności upraszczania, więc nie może być opisywany przez kolorowanie typu $\max$.

Pomysł na $T$:

- Rozważamy ciągi $\alpha \in A^\omega$ z nieskończenie wieloma literami $b$.
- $\alpha = a^{n_0} b a^{n_1} b \ldots$ traktujemy jako kod $n_0, n_1, \ldots$.
- Tworzymy kolorowanie $K$, tak by $\liminf K(\alpha|_i) = 0$ wtw $n_i \to \infty$. Wpp. by $\liminf K(\alpha|_i) = \liminf n_i$.
- Wtedy $T = L(K) \in \mathbf{\Delta}^0_3$, $T$ niezależne od prefiksu.
- Można pokazać $T \notin \mathcal{BC}\left(\mathbf{\Sigma}^0_2\right)$, bo nie ma kolorowania skończonego $K'$ by $L(K') = T$.

Dziękuję za uwagę, czy są jakieś pytania?