O *kolorowaniach* drzewa Cantora

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

22 marca 2010

Streszczenie

Poniższy dokument zawiera charakteryzację niektórych dolnych klas hierarchii borelowskiej w zbiorze Cantora z użyciem pojęcia *kolorowania*. Pojęcie to w łatwy sposób splata ze sobą kombinatorykę nieskończoną i deskryptywną teorię mnogości.

Prezentowane pojęcia i dowody są silnie motywowane teorią automatów skończonych i języków ω-regularnych. Uzyskane w pracy wyniki topologiczne mają swoje konsekwencje w tej teorii. Związki te są podsumowane w osobnym rozdziale.

W oparciu o zaprezentowaną charakteryzację, wykazana jest w prosty i bezpośredni sposób separacja klas $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0) \subsetneq \mathbf{\Delta}_2^0$ i $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0) \subsetneq \mathbf{\Delta}_3^0$. Na użyte w dowodach przykłady można patrzeć jako na *złączenie* ze sobą odpowiednio dobranych języków ω-regularnych.

Wprowadzenie

Zbiory leżące w klasach borelowskich $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ i $\mathbf{\Pi}^0_\eta$ mają naturalną reprezentację, jako odpowiednio suma, lub przecięcie zbiorów z niższych klas. Pozwala to dowodzić twierdzeń dotyczących zbiorów takich postaci, w sposób relatywnie prosty:

> Weźmy dowolny zbiór $S \in \mathbf{\Sigma}^0_2$. Przedstawmy go jako przeliczalną, wstępującą sumę zbiorów domkniętych $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Przez indukcję ze względu na n ....”

Sprawa się komplikuje w przypadku klas $\mathbf{\Delta}^0_\eta$, gdyż każdy taki zbiór ma zawsze dwa opisy, jeden jako suma zbiorów prostszych, a drugi jako przecięcie. Dlatego wartościowe są bardziej *namacalne* reprezentacje zbiorów z tych klas. Okazuje się, że dogodnym pojęciem są *kolorowania* nieskończonego drzewa binarnego, czyli funkcje z takiego drzewa w zbiory *kolorów*. W zależności od warunków jakie nakładamy na takie kolorowanie i przyjętej palety *kolorów*, otrzymujemy zbiory z kilku dolnych klas hierarchii borelowskiej.

Przykładem wykorzystania takich reprezentacji są dość proste i bezpośrednie dowody separacji wspomnianych w streszczeniu klas.

Podstawową przestrzenią będzie zbiór Cantora, definiowany jako A^ω, dla $A = \{a, b\}$. Niech T oznacza pełne drzewo binarne $A^{<\omega}$. Jak wiadomo, bazowe zbiory otwarte w A^ω są postaci $[s] := \{\alpha \in A^\omega : s < \alpha\}$ dla słów $s \in T$.

Zbiory G_δ to przeliczalne przecięcia zbiorów otwartych, natomiast F_σ to przeliczalne sumy zbiorów domkniętych. Rodzina $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ to boolowskie kombinacje zbiorów otwartych, czyli najmniejsze ciało zawierające zbiory otwarte. Rodzina $\mathbf{\Delta}^0_2$ to przecięcie G_δ i F_σ. Analogicznie $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ to boolowskie kombinacje zbiorów F_σ, a $\mathbf{\Delta}^0_3$ to zbiory które są jednocześnie $\mathbf{\Sigma}^0_3$ i $\mathbf{\Pi}^0_3$.

Aby wygodniej operować na elementach drzewa T korzystać będziemy z notacji związanej z wyrażeniami regularnymi. W notacji tej nie pisze się znaku konkatenacji słów, przez w^n rozumie się słowo $\underbrace{wwww\ldots w}_{n}$, natomiast w^* to dowolne słowo postaci w^n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Przez A^* oznaczane jest dowolne słowo w T, zaś ϵ oznacza słowo puste. Pewnym rozszerzeniem omawianej notacji będzie oznaczenie $s - t$, dla $t, s \in T$ i $t \leqslant s$, definiowane jako sufiks słowa s zaczynający się tuż za końcem słowa t.

Przez $p(s)$ dla $s \in T \setminus \{\epsilon\}$ oznaczam słowo $s|_{|s|-1}$, czyli s bez ostatniej litery.

Operować będziemy często parzystością liczb, wprowadźmy więc funkcję $P\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ równą 1 dla liczb nieparzystych i 0 w przeciwnym przypadku.

Dodatkowo przydatna będzie funkcja $S\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, zdefiniowana następująco: $S(n,m) = n - P(n) + m - P(m) + P(n) \cdot P(m)$. Jak łatwo sprawdzić jest ona monotoniczna ze względu na obie współrzędne oraz $P(S(n,m)) = P(n) \cdot P(m)$. Dodatkowo $S(n,m) \leqslant n + m$.

Rozdział 1

Kolorowania

Kluczowym pojęciem pracy jest *kolorowanie* pełnego drzewa binarnego.

Definicja 1.0.1. *Kolorowaniem nazywać będziemy dowolną funkcję $K\colon T \to \mathbb{N}$, która na każdej nieskończonej gałęzi T przyjmuje jakąś wartość nieskończenie wiele razy.*

Innymi słowy można to wyrazić tak, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodzi

$$\inf(K, \alpha) := \{n \in \mathbb{N} : \forall_{M \in \mathbb{N}} \exists_{m>M} K(\alpha|_m) = n\} \neq \emptyset.$$

Można też równoważnie powiedzieć, że wartości K na żadnej gałęzi nie zbiegają (jako ciąg) do ∞. Wobec tego dla każdego α, wartość $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$ jest skończona, równa $\min \inf(K, \alpha)$. Zauważmy przy okazji, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodzi

$$\exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{m>M} K(\alpha|_m) \geqslant \liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n).$$

Każde kolorowanie wyznacza podzbiór zbioru Cantora.

Definicja 1.0.2. *Dla danego kolorowania K definiujemy zbiór*

$$[K] = \left\{\alpha \in A^\omega : P\left(\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)\right) = 1\right\}.$$

Można powyższą definicję wyrazić równoważnie: $[K]$ to zbiór tych nieskończonych gałęzi na których najmniejsza z wartości przyjmowanych nieskończenie często jest nieparzysta.

Dodatkowo, wyróżniamy dwie dodatkowe własności jakie może mieć kolorowanie.

Definicja 1.0.3. *Powiemy, że kolorowanie K jest skończone, jeśli zbiór jego wartości jest ograniczony.*

Wahaniem kolorowania skończonego nazywam największą przyjmowaną przez nie wartość.

Kolorowanie K jest monotoniczne, jeśli przyjmowane przez nie wartości są niemalejące na gałęziach T.

Powyższe definicje dają nam cztery rodzaje kolorowań:

- ogólne,
- skończone,
- monotoniczne,
- monotoniczne i skończone.

Łatwo pokazać, że żaden z tych rodzajów nie jest trywialny – istnieją kolorowania będące dokładnie danego rodzaju.

Fakt 1.0.4. *Jeśli K jest kolorowaniem monotonicznym, to dla każdego $\alpha \in A^\omega$ określona jest granica*

$$\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n).$$

Dowód. Ponieważ ciąg wartości K na α jest monotoniczny, to dla tego ciągu zachodzą równości $\liminf = \limsup = \lim$. ∎

1.1 Ciągłe redukcje

Ciągłe redukcje jednego zbioru do drugiego stanowią ważne pojęcie w deskryptywnej teorii mnogości.

Definicja 1.1.1. *Powiemy, że zbiór $X \subseteq A^\omega$ redukuje się w sposób ciągły do zbioru $Y \subseteq A^\omega$, jeśli istnieje funkcja ciągła $f\colon A^\omega \to A^\omega$, spełniająca*

$$f^{-1}(Y) = X.$$

Ciągłe redukcje w zbiorze Cantora i przestrzeni Baira są dokładniej opisane w książce [Kec95]. Pokazany jest tam między innymi poniższy fakt.

Fakt 1.1.2. *Każda funkcja ciągła $f\colon A^\omega \to A^\omega$ indukuje przekształcenie $\overline{f}\colon T \to T$ spełniające dla każdego $\alpha \in A^\omega$:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left|\overline{F}(\alpha|_n)\right| = \infty$,
2. $\forall_{n<m} \overline{f}(\alpha|_n) \leqslant \overline{f}(\alpha|_n) \leqslant f(\alpha)$.

W oparciu o to spostrzeżenie, możemy pokazać, że kolorowania są w pewnym sensie zachowywane przy ciągłych redukcjach.

Twierdzenie 1.1.3. *Dla każdego kolorowania K i zbioru $X \subseteq A^\omega$ takich, że istnieje ciągła redukcja X do $[K]$, istnieje kolorowanie K' spełniające $[K'] = X$.*

Jeśli K ma wahanie n, to K' ma wahanie ograniczone przez n.

Jeśli K jest monotoniczne, to K' też.

Dowód. Weźmy funkcję $\overline{f}: T \to T$ indukowaną przez f.

Niech $K'(\epsilon) = 0$. Weźmy dowolne słowo $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech $u = \overline{f}(p(s))$ i $v = \overline{f}(s)$. Wiemy, że $u \leqslant v$. Rozważmy ciąg słów $u = w_0 < w_1 < w_2 < \ldots < w_i = v$, spełniający $p(w_{j+1}) = w_j$, czyli kolejne wierzchołki T na ścieżce od u do v. Zdefiniujmy

$$K'(s) = \min \{K(w_0), K(w_1), \ldots, K(w_i)\}.$$

Twierdzę, że dla każdej $\alpha \in A^\omega$, zachodzi

$$\liminf_{n\to\infty} K'(\alpha|_n) = \liminf_{n\to\infty} K(f(\alpha)|_n).$$

Jeśli to wykażę, to K' jest kolorowaniem i dodatkowo $[K'] = f^{-1}([K]) = X$, co zakończy dowód twierdzenia.

Weźmy dowolną $\alpha \in A^\omega$. Oznaczmy $m = \liminf_{n\to\infty} K(f(\alpha)|_n)$. Po pierwsze od pewnego momentu $K(f(\alpha)|_n) \geqslant m$. Więc od pewnego momentu rozpatrywane wartości $K(w_j) \geqslant m$, więc od pewnego momentu $K'(s) \geqslant m$. Jednocześnie nieskończenie często $K(f(\alpha)|_n) = m$, więc nieskończenie wiele razy wśród rozpatrywanych wartości $\{K(w_j) : 0 \leqslant j \leqslant i\}$ występuje m. Więc nieskończenie często $K'(s) \leqslant m$. Czyli $\liminf_{n\to\infty} K'(\alpha|_n) = m$.

Oczywiście jeśli K ma wartości ograniczone przez n, to K' też, a jeśli K jest monotoniczne, to K' też. ■

1.2 Operacje boolowskie

Okazuje się, że zbiory definiowane przez kolorowania odpowiednich rodzajów stanowią ciała. Dowód w przypadku kolorowań ogólnych jest dość techniczny, a w kontekście pozostałych wyników pracy zbędny.

Fakt 1.2.1. *Jeśli K jest kolorowaniem, to istnieje kolorowanie K', spełniające*

$$[K] = A^\omega \setminus [K'].$$

Jeśli K jest skończone (monotoniczne), to K' też jest skończone (monotoniczne).

Dowód. Wystarczy rozważyć $K'(s) = K(s) + 1$. ■

Wobec tego, by pokazać że kolorowania danego rodzaju stanowią ciało, wystarczy pokazać że są zamknięte na przecięcie.

Najpierw pokażemy odpowiedni fakt dla kolorowań monotonicznych.

Fakt 1.2.2. *Jeśli kolorowania K_1, K_2 są monotoniczne, to istnieje kolorowanie monotoniczne K" spełniające*

$$[K_1] \cap [K_2] = [K"].$$

Jeśli K_1, K_2 są skończone, to K" też.

Dowód. Wystarczy rozważyć $K"(s) = S(K_1(s), K_2(s))$. Wtedy $K"$ jest funkcją monotoniczną na gałęziach i dodatkowo dla $\alpha \in A^\omega$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} K"(\alpha|_n) = S(\lim_{n\to\infty} K_1(\alpha|_n), \lim_{n\to\infty} K_2(\alpha|_n)).$$

Więc $[K"] = [K_1] \cap [K_2]$. Oczywiście, jeśli K_1, K_2 są skończone, to $K"$ też. ■

Teraz pora na kolorowania skończone, ale niekoniecznie monotoniczne.

Fakt 1.2.3. *Jeśli kolorowania K_1, K_2 są skończone, to istnieje kolorowanie skończone $K"$ spełniające*

$$[K_1] \cap [K_2] = [K"].$$

Dowód. Załóżmy, że dane kolorowania K_1, K_2 mają wahania n_1, n_2. Jak łatwo sprawdzić, uzależnienie wartości $K"(s)$ wyłącznie od wartości $K_1(s), K_2(s)$ jest błędne.

Przez indukcję po długości słowa $s \in T$ zdefiniujmy funkcje

$$M_s \colon \{0, 1, \ldots, n_1\} \to \{0, 1, \ldots, n_2\}$$

i wartości $K"(s) \leqslant S(n_1, n_2)$. Intuicyjnie $M_s(n)$ to najmniejsza wartość przyjęta przez K_2, od czasu ostatniego wystąpienia n w K_1.

Niech M_ϵ będzie wszędzie równa 0, a $K"(\epsilon) = 0$.

Weźmy $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech $r = p(s)$. Załóżmy, że zdefiniowana jest funkcja M_r i wartość $K"(r)$. Położmy:

- $K"(s) \overset{(A)}{:=} S\left(K_1(s), M_r(K_1(s))\right)$,
- $M_s(K_1(s)) \overset{(B)}{:=} K_2(s)$,
- $M_s(n) \overset{(C)}{:=} \min(M_r(n), K_2(s))$, dla $n \neq K_1(s)$ i $0 \leqslant n \leqslant n_1$.

Pozostaje sprawdzić, że $K"$ jest kolorowaniem i $[K"] = [K_1] \cap [K_2]$. Weźmy dowolną gałąź $\alpha \in A^\omega$. Załóżmy że $\liminf$ wartości K_1, K_2 na α to odpowiednio m_1, m_2. Wobec faktu, że $P(S(m_1, m_2)) = P(m_1) \cdot P(m_2)$, wystarczy wykazać poniższy lemat.

Lemat 1.2.4. *Przy powyższych definicjach ma miejsce następująca równość*

$$\liminf_{n\to\infty} K"(\alpha|_n) = S(m_1, m_2).$$

Po pierwsze zauważmy, że nieskończenie często $K_1(s) = m_1$. Jednocześnie, nieskończenie często $K_2(s) = m_2$, więc nieskończenie często $M_s(m_1) \leqslant m_2$. Czyli nieskończenie często $K"(s) \leqslant S(m_1, m_2)$. Pozostaje wykazać, że od pewnego momentu $K"(s) \geqslant S(m_1, m_2)$.

Wiemy, że dla pewnego $M \in \mathbb{N}$ i wszystkich $m \geqslant M$ zachodzi $K_1(\alpha|_m) \geqslant m_1$ i $K_2(\alpha|_m) \geqslant m_2$. Niech $q = \alpha|_M$. Jest co najwyżej $n_1 + 1$ liczb n dla których $M_q(n) < m_2$, bo dziedzina M_q ma moc $n_1 + 1$. Jednocześnie wartości nowo przypisywane równością (B) są dla $s > q$ nie mniejsze niż m_2.

Wobec powyższych, dla $s > q$, jedyna sytuacja w której może być $K"(s) < S(m_1, m_2)$, to taka gdy $M_{p(s)}(K_1(s)) < m_2$. Wtedy nowa wartość przypisana $M_s(K_1(s))$ to $K_2(s) \geqslant m_2$. Więc taka sytuacja może wystąpić tylko skończenie wiele razy – co najwyżej tyle ile jest liczb n dla których $M_q(n) < m_2$. Czyli od pewnego momentu będzie zachodzić $K"(s) \geqslant S(m_1, m_2)$. Kończy to dowód lematu, a co za tym idzie całego twierdzenia. ■

W oparciu o powyższe konstrukcje można sformułować następujący wniosek.

Wniosek 1.2.5. *Jeśli kolorowania (monotoniczne) skończone K_1, K_2 mają wahania n_1, n_2 odpowiednio, to istnieje kolorowanie (monotoniczne) $K"$ o wahaniu ograniczonym przez $n_1 + n_2$, spełniające*

$$[K"] = [K_1] \cap [K_2].$$

1.3 Inne spojrzenia

Główną motywacją dla takiej a nie innej definicji kolorowań są automaty deterministyczne z warunkiem parzystości. Związki pomiędzy takimi automatami, a kolorowaniami opisane są w rozdziale 8.2.2.

Oprócz kontekstu automatowego, można rozpatrywać kolorowania jako pewne szczególne funkcje $k\colon A^\omega \to \mathbb{N}^\omega$. Przy odpowiednio zadanej metryce, są to dokładnie wszystkie funkcje lipschitzowskie ze stałą 1, których obraz zawarty jest w zbiorze

$$\mathcal{I} = \left\{ \eta \in \mathbb{N}^\omega : \liminf_{n\to\infty} \eta(n) < \infty \right\}.$$

W tym kontekście, zbiory definiowane przez kolorowania, to po prostu zbiory dla których istnieją odpowiednie redukcje do zbioru

$$\mathcal{P} = \left\{ \eta \in \mathbb{N}^\omega : P\left(\liminf_{n\to\infty} \eta(n) \right) = 1 \right\}.$$

Takie spojrzenie na kolorowania może dawać pewną intuicję dotyczącą ich natury. Wydaje się jednak, że prezentowane rozumowania łatwiej wyraża się w kombinatoryczny sposób, analizując funkcje $T \to \mathbb{N}$, niż myśląc o lipschitzowskich redukcjach.

Rozdział 2

Rodzina $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$

W poniższym rozdziale pokażemy że kolorowania monotoniczne skończone definiują dokładnie wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Fakt 2.0.1. *Dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq A^\omega$ istnieje kolorowanie monotoniczne K o wahaniu ograniczonym przez 1, spełniające $[K] = U$.*

Dowód. Rozważmy $K : T \to \mathbb{N}$ zdefiniowane $K(s) = 1$ gdy $[s] \subseteq U$, $K(s) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Weźmy dowolne $\alpha \in A^\omega$. Jeśli $\alpha \in U$, to pewne minimalne $s < \alpha$ ma tę własność, że $[s] \subseteq U$. Więc dla wszystkich $r < s$ zachodzi $K(r) = 0$, a dla wszystkich r spełniających $s \leqslant r < \alpha$ zachodzi $K(r) = 1$. Jeśli natomiast $\alpha \notin U$, to żaden jego prefiks s nie ma własności $[s] \subseteq U$, więc K jest stała równa 0 na wszystkich prefiksach α.

Tak czy inaczej K jest monotoniczne o wahaniu co najwyżej 1, a $\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = 1$ wtw. gdy $\alpha \in U$. Więc $[K] = U$. ■

Wniosek 2.0.2. *Dla każdego zbioru $B \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ istnieje kolorowanie K spełniające $[K] = B$.*

Dowód. Skoro rodzina zbiorów definiowanych przez kolorowania monotoniczne skończone jest ciałem i zawiera wszystkie zbiory otwarte, to zawiera też wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. ■

Teraz pora na twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 2.0.3. *Jeśli K jest kolorowaniem monotonicznym skończonym, to $[K] \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.*

Dowód. Weźmy dowolne kolorowanie monotoniczne K o wahaniu N. Zdefiniujmy ciąg zbiorów

$$U_n = \{\alpha \in A^\omega : \exists_{i\in\mathbb{N}} K(\alpha|_i) \geqslant n\}\,.$$

Ponieważ kolorowanie K ma wahanie N, więc zbiory U_n są puste dla $n > N$. Oczywiście $U_0 = A^\omega$.

Lemat 2.0.4. *Dla każdego n, zbiór U_n jest otwarty.*

Dowód. Weźmy dowolne $\alpha \in U_n$. Wtedy istnieje takie $i \in \mathbb{N}$, że $K(\alpha|_i) \geqslant n$. Ale wtedy $[\alpha|_i] \subseteq U_n$. Więc każdy element U_n leży tam wraz z pewnym otoczeniem. Więc U_n jest zbiorem otwartym. ■

Dodatkowo zauważmy, że ciąg zbiorów U_n jest nierosnący ze względu na n.

Twierdzę, że

$$[K] = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant N/2} (U_{2i+1} \setminus U_{2i+2}) \,. \tag{2.0.1}$$

Wykazanie tej równości kończy dowód twierdzenia, gdyż podany zbiór należy do rodziny $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Weźmy $\alpha \in A^\omega$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = b$ dla pewnego $b \in \mathbb{N}$. Wobec tego $\alpha \in U_b$ i $\alpha \notin U_{b+1}$. Są dwa przypadki:

- b jest nieparzyste, czyli $\alpha \in [K]$, wtedy $\alpha \in U_{2i+1} \setminus U_{2i+2}$ dla $2i + 1 = b$, więc α należy do zdefiniowanej sumy.
- b jest parzyste, czyli $\alpha \notin [K]$, wtedy $\alpha \notin U_{2i+1}$ dla $2i+1 \geqslant b$, oraz $\alpha \in U_{2i+2}$ dla $2i + 1 < b$, więc α nie należy do żadnego składnika zdefiniowanej sumy.

■

Zauważmy przy okazji, że złożoność uzyskanej formuły boolowskiej jest równa wahaniu K. Dodatkowo wzór 2.0.1 zadaje postać normalną dowolnego zbioru $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Prostym wnioskiem z twierdzeń tego rozdziału jest następujące spostrzeżenie.

Twierdzenie 2.0.5. *Kolorowania o wahaniu* 1 *odpowiadają dokładnie zbiorom otwartym z zbiorze Cantora.*

Rozdział 3

Rodzina $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$

Kolorowania skończone odpowiadają dokładnie zbiorom $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. Dowody są w dużej mierze analogicznie do tych z poprzedniego rozdziału.

Twierdzenie 3.0.6. *Dla każdego zbioru $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ istnieje kolorowanie K, takie że $D = [K]$.*

Dowód. Podobnie jak w przypadku kolorowań monotonicznych, wykażemy najpierw że każdy zbiór $F \in F_\sigma = \mathbf{\Sigma}^0_2$ jest opisywany przez pewne kolorowanie o wahaniu 1.

Ze względu na twierdzenie 1.1.3, wystarczy sprawdzić że jakiś zbiór F_σ-zupełny jest opisywany przez pewne kolorowanie. Rozważmy homeomorficzną kopię liczb wymiernych w zbiorze Cantora

$$F = \{\alpha \in A^\omega : \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \alpha(n) = b\}.$$

Weźmy kolorowanie $K \colon T \to \{0, 1\}$ zdefiniowane $K(A^*a) = 0$ i $K(A^*b) = 1$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(n) = b \quad \Leftrightarrow \quad K(\alpha|_n) = 1.$$

Z definicji zbiór $[K]$ to zbiór tych gałęzi, na których od pewnego momentu K jest równe 1. Więc jest to zbiór tych α które od pewnego momentu są równe b. Więc $[K] = F$.

Teraz, skoro kolorowania o skończonym wahaniu stanowią ciało, więc każdy zbiór $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ jest opisywany przez pewne kolorowanie. ■

Przy okazji warto zauważyć, że złożoność formuły definiującej zbiór przekłada się bezpośrednio na wahanie odpowiedniego kolorowania oraz, że ma miejsce następujący fakt.

Fakt 3.0.7. *Kolorowania o wahaniu 1 to dokładnie zbiory F_σ.*

Znowu w dość prosty sposób dostajemy twierdzenie odwrotne. Metoda dowodzenia jest analogiczna jak w przypadku kolorowań monotonicznych.

Twierdzenie 3.0.8. *Każde kolorowanie o skończonym wahaniu K indukuje zbiór $[K] \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.*

Dowód. Weźmy dowolne kolorowanie K o wahaniu N. Zdefiniujmy ciąg zbiorów

$$F_n = \{\alpha \in A^\omega : \exists_{I \in \mathbb{N}} \forall_{i > I} K(\alpha|_i) \geqslant n\} .$$

Ponieważ kolorowanie K ma wahanie ograniczone przez N, więc zbiory F_n są puste dla $n > N$. Oczywiście $F_0 = A^\omega$.

Lemat 3.0.9. *Dla każdego n, zbiór F_n jest typu F_σ.*

Dowód. Wynika to wprost z postaci zbioru F_n. ■

Dodatkowo zauważmy, że ciąg zbiorów F_n jest nierosnący ze względu na n.

Twierdzę, że

$$[K] = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant N/2} (F_{2i+1} \setminus F_{2i+2}) . \tag{3.0.1}$$

Wykazanie tej równości kończy dowód twierdzenia, gdyż podany zbiór należy do rodziny $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

Weźmy $\alpha \in A^\omega$. Wtedy $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = b$ dla pewnego $b \in \mathbb{N}$ i dodatkowo $b \leqslant N$. Wobec tego $\alpha \in F_b$ i $\alpha \notin F_{b+1}$. Są dwa przypadki:

- b jest nieparzyste, czyli $\alpha \in [K]$, wtedy $\alpha \in G_{2i+1} \setminus G_{2i+2}$ dla $2i + 1 = b$, więc α należy do zdefiniowanej sumy.
- b jest parzyste, czyli $\alpha \notin [K]$, wtedy $\alpha \notin G_{2i+1}$ dla $2i+1 \geqslant b$, oraz $\alpha \in G_{2i+2}$ dla $2i + 1 < b$, więc α nie należy do żadnego składnika zdefiniowanej sumy.

■

Powyższe wyniki, w nieco innym kontekście znalazły zastosowanie w pracy [BNR+10].

Rozdział 4

Rodzina $\mathbf{\Delta}^0_2$

Okazuje się że zbiory definiowane przez kolorowania monotoniczne to dokładnie zbiory należące do $\mathbf{\Delta}^0_2$.

4.1 $\mathbf{\Delta}^0_2$ jako kolorowania monotoniczne

Twierdzenie 4.1.1. *Jeśli $D \subseteq A^\omega$ jest jednocześnie zbiorem typu G_δ i F_σ (czyli należy do $\mathbf{\Delta}^0_2$), to istnieje kolorowanie K dla którego $[K] = D$.*

Wiemy, że w takiej sytuacji można znaleźć rodzinę zbiorów domkniętych F_i taką, że $\bigcup_n F_n = D$. Można też znaleźć rodzinę zbiorów domkniętych E_i taką, że $\bigcup_n E_n = A^\omega \setminus D$.

Rozważmy rodzinę zbiorów domkniętych H_i, powstałą przez złączenie rodzin F_i, E_i. Niech $H_{2i} = E_i$ i $H_{2i+1} = F_i$. Zauważmy, że $\bigcup_n H_n = A^\omega$.

Zdefiniujmy funkcję $K\colon T \to \mathbb{N}$. Weźmy dowolne $s \in T$. Niech i_s będzie najmniejszą liczbą naturalną dla której $H_{i_s} \cap [s] \neq \emptyset$. Liczba taka istnieje, bo $[s]$ jest niepusty, a suma rodziny H_i to cała przestrzeń. Połóżmy $K(s) = i_s$.

Teraz sprawdzę, że tak zdefiniowane K jest istotnie kolorowaniem monotonicznym. Weźmy dowolną gałąź nieskończoną $\alpha \in A^\omega$. Po pierwsze zbiory $[\alpha|_n]$ są nierosnące ze względu na i, więc K jest funkcją niemalejącą na α. Jednocześnie istnieje takie i, że $\alpha \in H_i$. Wiemy więc, że wartości K na α są ograniczone przez i. Więc K jest kolorowaniem monotonicznym.

Pozostaje sprawdzić, że $[K] = D$. Weźmy dowolne $\alpha \in A^\omega$. Niech i_α będzie najmniejszą liczbą taką, że $\alpha \in H_{i_\alpha}$. Twierdzę, że wartość K na prefiksach α jest od pewnego momentu stała równa i_α. Oczywiście jest ona ograniczona z góry przez i_α. Istnieje skończenie wiele liczb mniejszych od i_α. Wystarczy więc że wykażę, że dla każdego $j < i_\alpha$, wartości K na prefiksach α są od pewnego momentu różne od j.

Weźmy dowolne $j < i_\alpha$. Wiemy, że $\alpha \notin H_j$. H_j jest zbiorem domkniętym, więc istnieje pewne otoczenie U_α rozłączne z H_j. Więc istnieje N takie że dla

$n > N$ mamy $[\alpha|_n] \subseteq U_\alpha$. Więc dla $n > N$ mamy $[\alpha|_n] \cap H_j = \emptyset$. Czyli dla $n > N$ wartość $K(\alpha|_n)$ jest różna od j.

Jeśli $\alpha \in D$ to dla pewnego i zachodzi $\alpha \in F_i$ i jednocześnie dla wszystkich i zachodzi $\alpha \notin E_i$. Więc zdefiniowane powyżej i_α jest nieparzyste, gdyż zbiory F_i stoją na nieparzystych pozycjach w ciągu H_i. Więc dla dostatecznie dużych n wartość $K(\alpha|_n)$ jest nieparzysta. Więc $\alpha \in [K]$. Gdy $\alpha \notin D$ jest analogicznie, wtedy $\alpha \notin [K]$. Więc w sumie $[K] = D$.

4.2 Kolorowania monotoniczne jako $\mathbf{\Delta}_2^0$

Prawdą jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia z poprzedniego rozdziału.

Twierdzenie 4.2.1. *Dla każdego kolorowania monotonicznego K, zbiór $[K]$ jest zbiorem typu $\mathbf{\Delta}_2^0$ w A^ω.*

Dowód. Przedstawię definicję zbioru $[K]$, jako przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych. Wtedy będziemy wiedzieć, że dla każdego kolorowania K zbiór $[K]$ jest typu G_δ. Ale jego dopełnienie też jest definiowane przez pewne kolorowanie, więc też jest typu G_δ. Więc $[K]$ jest jednocześnie G_δ i F_σ, więc leży w $\mathbf{\Delta}_2^0$.

Zauważmy, że

$$\alpha \in [K] \Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{w\in T} |w| > n \wedge P(K(w)) = 1 \wedge \alpha \in [w].$$

Wynika to wprost z monotoniczności K na α. Niech

$$W_n = \{v \in T : |v| > n \wedge P(K(v)) = 1\}.$$

Wtedy

$$[K] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{w\in W_n} [w].$$

Wobec tego $[K]$ można zapisać jako przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych. Więc $[K]$ jest typu G_δ. ■

Rozdział 5

Rodzina $\mathbf{\Delta}^0_3$

Okazuje się, że kolorowania ogólne odpowiadają dokładnie zbiorom $\mathbf{\Delta}^0_3$.

5.1 $\mathbf{\Delta}^0_3$ jako kolorowania

Można przypuszczać, że nic by się nie zmieniło, gdyby w definicji zbioru $[K]$ zamiast $\liminf$ wziąć $\limsup$. Okazuje się, że ma to duże znaczenie, mianowicie gdyby przyjąć definicję z $\limsup$, poniższe twierdzenie przestało by być prawdziwe. Zagadnienie to jest opisane w rozdziale 7.

Twierdzenie 5.1.1. *Jeśli $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$, to istnieje kolorowanie K takie, że $[K] = D$.*

Idea dowodu jest analogiczna jak w przypadku klasy $\mathbf{\Delta}^0_2$, chociaż użyte techniki są nieco bardziej skomplikowane.

Dowód. Przedstawmy D jako sumę rodziny zbiorów $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G_\delta$. Analogicznie zapiszmy $A^\omega \setminus D$ jako sumę rodziny $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G_\delta$. Korzystając z faktu 3.0.7 dla dopełnień odpowiednich zbiorów, znajdujemy ciągi kolorowań $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}, (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wartościach $\{1, 2\}$, spełniające

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad [K_n] = G_n \quad \wedge \quad [L_n] = J_n.$$

Wreszcie zdefiniujmy kolorowania $H_{2n+1} = K_n$ i $H_{2n+2} = L_n$.

Zdefiniujemy wartość $K(s)$ indukcyjnie ze względu na długość słowa s. Połóżmy najpierw $K(\epsilon) = 0$. Weźmy $s \in T \setminus \{\epsilon\}$. Niech i_s to najmniejsza taka liczba dodatnia, że $H_{i_s}(s) = 1$, lub $K(p(s))$ gdy takiej liczby nie ma. Połóżmy $K(s) = i_s$.

Weźmy dowolną $\alpha \in A^\omega$. Istnieje takie najmniejsze i, że $\alpha \in [H_i]$. W takim razie dla nieskończenie wielu n zachodzi $H_i(\alpha|_n) = 1$, więc dla nieskończenie wielu n mamy $K(\alpha|_n) \leqslant i$. Wobec tego K jest kolorowaniem. Dodatkowo K na każdej gałęzi od pewnego momentu nie przyjmuje wartości 0. Twierdzę, że

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = i.$$

Wystarczy wykazać, że dla dowolnego $0 < j < i$, od pewnego momentu K nie przyjmuje wartości j. Ale wiem że $\alpha \notin [H_j]$, więc od pewnego momentu $H_j(\alpha|_n) = 2$, więc dla dostatecznie dużych n zachodzi $K(\alpha|_n) \neq j$.

Czyli $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = i$, a jednocześnie i jest nieparzyste, wtw. $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[K_n] = D$. ■

5.2 Kolorowania jako $\mathbf{\Delta}_3^0$

Twierdzenie 5.2.1. *Dla każdego kolorowania K, zachodzi $[K] \in \mathbf{\Delta}_3^0$.*

Dowód. Weźmy dowolne kolorowanie K. Ponieważ zbiory definiowane przez kolorowania są zamknięte ze względu na dopełnienie, wystarczy wykazać, że $[K] \in \Sigma_3^0$.

Dzięki definicji K wiemy, że $[K]$ powstaje jako suma po $n \in \mathbb{N}$ i $P(n) = 1$ zbiorów tych gałęzi na których n jest najmniejszą wartością przyjmowaną nieskończenie często. Czyli $[K]$ to

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}\wedge P(n)=1} \{\alpha \in A^\omega : \exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{m>M}K(\alpha|_m) \geqslant n \wedge \forall_{L\in\mathbb{N}}\exists_{l>L}K(\alpha|_l) = n\}.$$

Czyli $[K]$ to przeliczalna suma po parach $(n, M) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, spełniających $P(n) = 1$ zbiorów

$$G_{n,M}\{\alpha \in A^\omega : \forall_{m>M}K(\alpha|_m) \geqslant n \wedge \forall_{L\in\mathbb{N}}\exists_{l>L}K(\alpha|_l) = n\}.$$

Każdy ze zbiorów $G_{m,M}$ jest typu G_δ, więc w sumie $[K]$ jest typu Σ_3^0. ■

Rozdział 6

Separacje

Kolorowania pozwalają skonstruować bardzo konkretne przykłady zbiorów separujących klasy $BC(\mathbf{\Sigma}_i^0) \subsetneq \mathbf{\Delta}_{i+1}^0$ dla $i = 1, 2$.

6.1 $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0) \subsetneq \mathbf{\Delta}_2^0$

W poniższym rozdziale wykażę, że $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0) \subsetneq \mathbf{\Delta}_2^0$.

Twierdzenie 6.1.1. *Istnieje zbiór $D \subseteq A^\omega$ należący do $\mathbf{\Delta}_2^0$, a nie należący do $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$.*

Idea dowodu jest taka, by wskazać kolorowanie monotoniczne K_ω, takie by nie istniało kolorowanie monotoniczne skończone K, spełniające $[K] = [K_\omega]$. Wtedy $[K_\omega] \in \mathbf{\Delta}_2^0$ i jednocześnie $[K_\omega] \notin BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$.

Aby zdefiniować kolorowanie K_ω najpierw zdefiniujemy ciąg kolorowań K_n wymagających coraz większych wahań.

Niech K_0 będzie kolorowaniem stałym równym 1. Niech K_n będzie określone następująco: $K_n(a^*) = 1$, oraz dla $w \in A^*$ niech $K_n(a^*bw) = K_{n-1}(w) + 1$.

Lemat 6.1.2. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz kolorowania K' o własności $[K_n] = [K']$ istnieje takie $s \in T$, że $K'(s) \geqslant n$.*

Dowód. Ponieważ $a^\omega \in [K_n] = [K']$, więc istnieje takie i_n, że $P(K'(a^{i_n})) = 1$. W kolejnym kroku zauważamy, że $a^{i_n}ba^\omega \notin [K_n] = [K']$, bo $a^\omega \in [K_{n-1}]$. Więc istnieje takie i_{n-1}, że $P(K'(a^{i_n}ba^{i_{n-1}})) = 0$. Iteracyjnie, definiujemy liczby $i_{n-2}, \ldots, i_1$, takie by $P \circ K'$ na słowach $a^{i_n}ba^{i_{n-1}} \ldots ba^{i_j}$ miało na przemian wartości $1, 0$ w zależności od j. Więc K' na słowie $s = a^{i_n}ba^{i_{n-1}} \ldots ba^{i_1}b$ zmienia parzystość przynajmniej n razy. Ponieważ K' jest monotoniczne, to

$$K'(s) \geqslant n.$$

■

Rozpatrzmy kolorowanie K_ω zdefiniowane następująco: $K_\omega(a^*) = 1$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$ i $w \in A^*$ niech $K_\omega(a^n bw) = K_n(w)$. Weźmy K' o własności $[K_\omega] = [K']$ oraz dowolne n. Twierdzę, że istnieje słowo $r \in T$ takie, że $K'(r) \geqslant n$.

Rozpatrzmy L będące kolorowaniem K' obciętym do pod drzewa o korzeniu $a^n b$. Z definicji $[L] = [K_n]$, więc istnieje $s \in T$, że $L(s) \geqslant n$. Więc $K'(a^n bs) \geqslant n$.

Podsumowaniem tego rozumowania jest poniższy fakt.

Fakt 6.1.3. *Nie istnieje kolorowanie monotoniczne skończone K, spełniające $[K_\omega] = [K]$.*

Dzięki temu możemy zakończyć dowód twierdzenia.

Dowód. Szukanym zbiorem $D \subseteq A^\omega$ jest zbiór $[K_\omega]$. Ponieważ jest to zbiór definiowany przez kolorowanie monotoniczne, więc $D \in \mathbf{\Delta}^0_2$. Jednocześnie, gdyby $D \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, to istniało by kolorowanie monotoniczne skończone K, dla którego $[K] = D$. Ale wtedy $[K] = D = [K_\omega]$, co daje sprzeczność z powyższym faktem. ■

6.2 $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$

W tym rozdziale wskażemy przykład separujący $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$.

Twierdzenie 6.2.1. *Istnieje kolorowanie K_ω, takie że jeśli $[K] = [K_\omega]$, to K nie jest skończone.*

W rozdziale 7 podany jest przykład kolorowania K_ω o podanej powyżej własności. Poniższa konstrukcja jest nieco prostsza, ponadto ma pewne zalety z punktu widzenia teorii automatów.

Metoda postępowania będzie analogiczna jak w poprzednim rozdziale. Najpierw zdefiniuję ciąg kolorowań K_n z których każde wymagać będzie wahania przynajmniej n, a następnie złączę je wszystkie w kolorowanie K_ω.

Niech $K_n \colon T \to \mathbb{N}$ będzie określone następująco:

- $K_n(A^* ba^i b) = i$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$,
- w pozostałych przypadkach $K_n(s) = n$.

Czyli jeśli dane słowo $s \in T$ jest na końcu ciągu liter a o długości pomiędzy 0, a n, to wartość $K_n(s)$ jest równa długości tego ciągu, w pozostałych przypadkach $K(s) = n$.

Oczywiście kolorowanie K_n ma wahanie równe n. Pozostaje wykazać poniższy lemat.

Lemat 6.2.2. *Dla każdego n, jeśli kolorowanie K spełnia $[K] = [K_n]$, to wahanie K wynosi przynajmniej n.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego n istnieje K o wahaniu co najwyżej $n-1$ spełniające $[K] = [K_n]$. Zdefiniuję przez indukcję ciąg $\alpha \in A^\omega$, który rozróżnia $[K]$ i $[K_n]$ (ściśle, należy do ich różnicy symetrycznej).

Niech $\alpha_0 = \epsilon$, $\alpha_1 = b$. Załóżmy teraz że jest określone α_j dla pewnego $j \geqslant 1$. Zdefiniuję $\alpha_{j+1} > \alpha_j$. Indukcyjnie wiem, że $\alpha_j > \alpha_{j-1}$. Określmy $r = \alpha_j - \alpha_{j-1}$. Niech teraz M będzie najmniejszą wartością ze zbioru

$$\left\{K(\alpha_{j-1}r_0), K(\alpha_{j-1}r_0r_1), \ldots, K(\alpha_{j-1}r_0r_1\ldots r_{|r-1|})\right\}.$$

Czyli M to najmniejsza wartość jaką przyjęło kolorowanie K na ścieżce od pierwszej litery za α_{j-1} aż do α_j. Niech teraz

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j a^{M+1} b.$$

W ten sposób w granicy dla $j \to \infty$ otrzymujemy dobrze określone $\alpha \in A^\omega$. Rozważmy teraz wartości $S = \liminf_{m\to\infty} K(\alpha|_m)$ i $S' = \liminf_{m\to\infty} K_n(\alpha|_m)$. Wykażę, że $S' = S + 1$.

Zauważmy że w ciągu α występuje nieskończenie wiele b. Dodatkowo, ponieważ K ma wahanie ograniczone przez $n-1$ więc ciągi a^i pomiędzy kolejnymi b mają długości ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Od pewnego momentu wartości K na α są ograniczone z dołu przez S, więc od pewnego momentu ciągi a^i są nie krótsze niż $S+1$. Więc $S' \geqslant S+1$. Jednocześnie nieskończenie wiele razy $K(\alpha|_m) = S$, więc nieskończenie wiele razy $M = S$, więc nieskończenie wiele razy występuje w α podsłowo $ba^{S+1}b$. Czyli $S' \leqslant S+1$. W sumie $S' = S+1$.

Ale liczby $S, S+1$ mają różną parzystość, więc albo $\alpha \in [K] \setminus [K_n]$, albo $\alpha \in [K_n] \setminus [K]$. Tak czy inaczej $[K] \neq [K_n]$. Sprzeczność. ∎

Możemy teraz zakończyć dowód twierdzenia.

Dowód. Pozostaje teraz zdefiniować kolorowanie K_ω w następujący sposób: $K_\omega(a^*) = 0$ i $K_\omega(a^n b w) = K_n(w)$, dla $n \in N$ i $w \in A^*$. Analogicznie jak w przypadku kolorowań monotonicznych, gdyby istniało K o wahaniu skończonym spełniające $[K] = [K_\omega]$, to biorąc n większe od wahania K i rozważając pod drzewo o korzeniu $a^n b$ otrzymujemy sprzeczność. ∎

Rozdział 7

Dlaczego lim inf?

W poniższym rozdziale przedstawiona jest analiza alternatywnej definicji kolorowania. Można mianowicie, zamiast warunku, by na każdej gałęzi nieskończonej α określona była wartość $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$, rozważać warunek

$$\forall_{\alpha\in A^\omega} \limsup_{n\to\infty} K(\alpha|_n) < \infty.$$

Funkcje $M\colon T \to \mathbb{N}$ spełniające taki warunek nazwijmy kolorowaniami typu max. Oznaczać je będziemy literą M. Zbiór definiowany przez kolorowanie typu max, to

$$[M]_{\max} = \left\{\alpha \in A^\omega : P\left(\limsup_{n\to\infty} M(\alpha|_n)\right) = 1\right\}.$$

Jak łatwo sprawdzić, każde kolorowanie M typu max definiuje zbiór $[M]_{\max} \in \mathbf{\Delta}^0_3$, dowód jest analogiczny jak w przypadku zwykłych kolorowań. Podobnie jak dla zwykłych kolorowań, można rozpatrywać dwie ich podklasy:

- Kolorowania skończone typu max, czyli takie gdzie wartości funkcji M są wspólnie ograniczone przez jakąś liczbę N. Kolorowania takie są w odpowiedniości ze zwykłymi kolorowaniami skończonymi, poprzez formuły $K(s) = N - M(s)$ i $M(s) = N - K(s)$.

- Kolorowania monotoniczne typu max, czyli takie gdzie wartości M są niemalejące na gałęziach. Takie kolorowania to dokładnie te same funkcje co zwykłe kolorowania monotoniczne. Indukowane zbiory też są równe, gdyż w tym przypadku zawsze określona jest wartość $\lim_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$.

Czyli cała prezentowana powyżej teoria w łatwy sposób przenosi się na kolorowania typu max, z dokładnością do jednego szczegółu. Mianowicie a'priori nie wiadomo, czy każdy zbiór $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$ jest definiowany przez jakieś kolorowanie typu max. Okazuje się, że odpowiedź jest negatywna, dalsza część tego rozdziału prowadzi do dowodu tego faktu.

7.1 Własność upraszczania $\mathcal{S}$

Najpierw zdefiniujmy pewną własność którą mogą posiadać podzbiory przestrzeni A^ω.

Definicja 7.1.1. *Powiemy, że zbiór $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$ ma własność upraszczania, jeśli istnieje zbiór bazowy otwarty $U_s = [s]$ dla pewnego $s \in T$, spełniający*

$$D \cap U_s \in BC(\mathbf{\Sigma}^0_2(U_s)).$$

Rodzinę wszystkich zbiorów z własnością upraszczania oznaczam $\mathcal{S}$.

Okazuje się, że wszystkie zbiory definiowane przez kolorowania typu max mają powyższą własność.

Twierdzenie 7.1.2. *Dla każdego kolorowania M typu* max*, zbiór $[M]_{\max}$ ma własność upraszczania.*

Dowód. Oczywiście $[M]_{\max} \in \mathbf{\Delta}^0_3$. Zdefiniujmy przez indukcję ciąg $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq T$. Niech $s_0 = \epsilon$. Załóżmy, że jest określone $s_0 < s_1 < \ldots < s_i$. Rozważmy dwa przypadki

- Wśród wartości $\{M(s_i w) : w \in T\}$ istnieje większa niż $M(s_i)$. Określmy wtedy $s_{i+1} > s_i$, spełniające $M(s_{i+1}) > M(s_i)$.
- Wszystkie wartości w pod drzewie o korzeniu w s_i są ograniczone przez $M(s_i)$. W takim przypadku kończymy postępowanie w kroku i.

Okazuje się, że powyższe postępowanie zawsze musi zakończyć się w jakimś kroku $i \in \mathbb{N}$. Gdyby bowiem tak nie było, dostalibyśmy nieskończony ciąg $s_0 < s_1 < \ldots$, spełniający $M(s_0) < M(s_1) < \ldots$. Ale to dawało by element $\alpha \in A^\omega$, spełniający $\forall_{i\in\mathbb{N}} s_i < \alpha$ i

$$\limsup_{n\to\infty} M(\alpha|_n) = \infty.$$

Czyli sprzeczność z faktem, że M jest kolorowaniem typu max.

Wobec tego opisane wyżej postępowanie zawsze kończy się w jakimś kroku $i \in \mathbb{N}$, definiując $s_i \in T$. Rozważmy $U = [s_i]$. Po ograniczeniu M do poddrzewa o korzeniu s_i, wszystkie wartości są wspólnie ograniczone. Więc M na U definiuje zbiór $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. Więc $[M]_{\max}$ ma własność upraszczania. ■

7.2 Separacja $\mathcal{S} \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_3$

W tej sekcji wskażę zbiór $D \in \mathbf{\Delta}^0_3$ który nie ma własności upraszczania. Za przekonanie mnie, że takie zbiory istnieją, dziękuję panom Witoldowi Marciszewskiemu i Filipowi Murlakowi. Zbiór taki będzie stanowić przykład zbioru definiowanego przez kolorowanie, ale nie definiowanego przez żadne kolorowanie typu max.

Rozważmy dwie funkcje $M, C\colon T \to N$:

- $M(\epsilon) = 0$ i dla $s \in T \setminus \{\epsilon\}$ wartość $M(s)$ to największa liczba n taka, że słowo a^n występuje jako infiks $p(s)$, czyli $p(s) = A^* a^n A^*$.
- Funkcja C mapuje $s \in T$ na największe takie n, że słowo a^n jest sufiksem s, czyli $s = A^* a^n$.

Własności zdefiniowanych funkcji podsumowuje poniższy lemat.

Lemat 7.2.1. *Dla dowolnego słowa s zachodzi nierówność $C(s) \leqslant M(s) + 1$.*

Dodatkowo równość $C(s) = M(s) + 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s = a^{C(s)}$, lub $s = wba^{C(s)}$ i w słowie w nie występuje podsłowo $a^{C(s)}$.

Zdefiniujmy teraz funkcję $K\colon T \to \mathbb{N}$ dla dowolnego słowa $s \in T$, w następujący sposób:

- jeśli $s = \epsilon$, to $K(s) = 0$,
- wpp. jeśli $C(s) = M(s) + 1$, to $K(s) = 0$,
- wpp. jeśli $s = ra$, dla pewnego $r \in T$, to $K(s) = K(r)$,
- wpp. jeśli $s = rb$, dla pewnego $r \in T$, to $K(s) = C(r)$,

Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$ możliwe są dwa rozłączne przypadki:

1. Ciągi a^n występujące w α są dowolnie długie. Wtedy nieskończenie często $C(s) = M(s) + 1$ czyli nieskończenie często $K(s) = 0$ na $s < \alpha$.
2. Ciągi a^n występujące w α są ograniczonej przez $N \in \mathbb{N}$ długości. Wtedy wartości K są ograniczone przez N na α.

W każdym z dwóch przypadków określona jest wartość $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$, więc K jest kolorowaniem. Dodatkowo, jeśli ma miejsce przypadek drugi, to dla dostatecznie długich $r < \alpha$, K spełnia następujące równania: $K(ra) = K(r)$, $K(rb) = C(r)$.

Lemat 7.2.2. *Dla każdego słowa nieskończonego $\alpha \in A^\omega$ i słowa skończonego $w \in A^*$, zachodzi*

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) = \liminf_{n\to\infty} K((w\alpha)|_n).$$

Czyli $\alpha \in [K]$ wtedy i tylko wtedy gdy $w\alpha \in [K]$.

Powyższy lemat mówi między innymi to, że zbiór $[K]$ jest samopodobny, mianowicie funkcja $\alpha \to w\alpha$ jest homeomorfizmem $[K]$ na $[K] \cap [w]$, dla każdego $w \in T$.

Dowód. Weźmy dowolne α, w. Rozważmy który z przypadków zachodzi:

1. Ciągi a^n są nieograniczenie długie w α. Wtedy tę samą własność ma $w\alpha$ i obie strony dowodzonej równości są równe 0.

2. Ciągi a^n są ograniczonej przez $N \in \mathbb{N}$ długości w α. Czyli w α występuje nieskończenie wiele liter b. Oznaczmy długości ciągów a^n pomiędzy kolejnymi literami b jako $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \{0, 1, \ldots, N\}$. Wtedy

$$\liminf_{n \to \infty} K(\alpha|_n) = \liminf_{i \to \infty} n_i.$$

Ale prawej strony tej równości nie zmienia dopisanie na początku α słowa w.

■

Pozostaje już tylko wykazać poniższy lemat.

Lemat 7.2.3. *Nie istnieje kolorowanie o skończonym wahaniu K', spełniające $[K'] = [K]$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje kolorowanie K' o wahaniu ograniczonym przez n, spełniające $[K'] = [K]$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 6.2.1 skonstruujemy $\alpha \in A^\omega$, jako granicę $\epsilon = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$.

Niech $\alpha_0 = \epsilon$, $\alpha_1 = b$. Załóżmy teraz że jest określone α_j dla pewnego $j \geqslant 1$. Zdefiniuję $\alpha_{j+1} > \alpha_j$. Indukcyjnie wiem, że $\alpha_j > \alpha_{j-1}$. Określmy $r = \alpha_j - \alpha_{j-1}$. Niech teraz M będzie najmniejszą wartością ze zbioru

$$\left\{ K'(\alpha_{j-1} r_0), K'(\alpha_{j-1} r_0 r_1), \ldots, K'(\alpha_{j-1} r_0 r_1 \ldots r_{|r-1|}) \right\}.$$

Czyli M to najmniejsza wartość jaką przyjęło kolorowanie K' na ścieżce od pierwszej litery za α_{j-1} aż do α_j. Niech teraz

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j a^{M+1} b.$$

W ten sposób w granicy dla $j \to \infty$ otrzymujemy dobrze określone $\alpha \in A^\omega$. Rozważmy teraz wartości $S = \liminf_{m \to \infty} K(\alpha|_m)$ i $S' = \liminf_{m \to \infty} K'(\alpha|_m)$. Wykażę, że $S' = S + 1$.

Zauważmy że w ciągu α występuje nieskończenie wiele b. Dodatkowo, ponieważ K' ma wahanie ograniczone przez n, więc ciągi a^i pomiędzy kolejnymi b mają długości ze zbioru $\{1, \ldots, n+1\}$. Od pewnego momentu wartości K' na α są ograniczone z dołu przez S', więc od pewnego momentu ciągi a^i są nie krótsze niż $S' + 1$. Więc $S \geqslant S' + 1$. Jednocześnie nieskończenie wiele razy $K(\alpha|_m) = S'$, więc nieskończenie wiele razy $M = S'$, więc nieskończenie wiele razy występuje w α podsłowo $ba^{S'+1}b$. Czyli $S \leqslant S' + 1$. W sumie $S = S' + 1$.

Ale liczby $S, S+1$ mają różną parzystość, więc albo $\alpha \in [K] \setminus [K']$, albo $\alpha \in [K'] \setminus [K]$. Tak czy inaczej $[K] \neq [K']$. Sprzeczność. ■

Korzystając z powyższych lematów prosto można zakończyć dowód separacji, wykazując poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7.2.4. *Zbiór $[K]$ nie ma własności uproszczania.*

Dowód. Gdyby $[K]$ miał własność upraszczania, to dla pewnego $w \in T$, zbiór $[K] \cap [w]$ leżałby w $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2([w]))$. Ale zbiór $[K]$ jest samopodobny, więc wtedy też $[K]$ byłby typu $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$. A wiemy, że tak nie jest. $\blacksquare$

Rozdział 8

Kolorowania i automaty

Teoria automatów na słowach nieskończonych sięga lat sześćdziesiątych XX wieku. W oparciu o tę teorię Büchi wykazał rozstrzygalność logiki $MSO(\mathbb{N})$. Więcej informacji o automatach na słowach nieskończonych i związkach z logiką można znaleźć w pracy [Tho96].

W pracy [BNR$^+$10] analizowane jest pojęcie automatu z poradą. Okazuje się, że automaty takie w bezpośredni sposób odpowiadają kolorowaniom skończonym. Pozwoliło to wykorzystać opisywane tu rezultaty dla $BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ i kolorowań skończonych, do badania automatów z poradą.

8.1 Wprowadzenie

Poniżej zaprezentowane jest krótkie prowadzenie do teorii języków ω-regularnych.

Rozpatrywać będziemy tylko automaty deterministyczne z warunkiem parzystości. Automaty takie to krotki $\mathcal{A} = \langle q_0, Q, \delta, \Omega \rangle$, gdzie:

- q_0 to dowolny element Q, nazywany stanem początkowym,
- Q to dowolny skończony zbiór stanów automatu,
- δ to funkcja $Q \times A \to Q$, definiująca jak ma się zmienić stan automatu pod wpływem wczytania kolejnej litery,
- Ω to funkcja $Q \to \mathbb{N}$ przypisująca stanom ich *ranki.*

Ustalmy automat $\mathcal{A}$ oraz słowo nieskończone $\alpha \in A^\omega$. Funkcja δ wyznacza jednoznacznie *bieg* $\tau \in Q^\omega$ automatu $\mathcal{A}$ na α, mianowicie $\tau(0) = q_0$ oraz $\tau(n+1) = \delta(\tau(n), \alpha(n))$. Do tak wyznaczonego biegu możemy przyłożyć funkcję Ω, uzyskując ciąg ranków

$$(R^\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\Omega(\tau(n)))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^\omega.$$

Ponieważ automat ma skończenie wiele stanów, to wartości R_n^α są ograniczone. Dobrze określona jest więc wartość $\liminf_{n\to\infty} R_n^\alpha$. Mówimy, że $\mathcal{A}$ *akceptuje* słowo α, gdy $P\left(\liminf_{n\to\infty} R_n^\alpha\right) = 1$, czyli najmniejszy[1] rank występujący nieskończenie często jest nieparzysty. Zbiór słów akceptowanych przez $\mathcal{A}$ oznaczamy $L(\mathcal{A}) \subseteq A^\omega$. Często zamiast mówić *zbiór słów nieskończonych*, mówić będziemy *język*. Wszystkie zbiory postaci $L(\mathcal{A})$ dla wszystkich automatów $\mathcal{A}$ nazywamy rodziną języków ω-regularnych.

Wyróżniona jest dość naturalna podklasa automatów, nazywana automatami *słabymi*. Automat jest *słaby* jeśli dla każdego stanu $q \in Q$ oraz litery $z \in A$, zachodzi

$$\Omega(\delta(q, z)) \geqslant \Omega(q).$$

Czyli mówiąc potocznie, są to takie automaty gdzie każde przejście nie zmniejsza ranku.

Wiele wyników w teorii automatów dotyczy możliwości obliczania pewnych wartości z użyciem komputera. Dlatego szczególnie ważne jest by automat reprezentować jako obiekt skończony, czyli w szczególności posiadający skończenie wiele stanów. Jedna z konsekwencji jest taka, że wszystkich takich automatów jest przeliczalnie wiele, a więc też przeliczalnie wiele jest języków ω-regularnych.

Okazuje się, że topologia zbioru A^ω odgrywa istotną rolę w teorii automatów. Jednym z przykładów jest dowód twierdzenia 5.1 z pracy [Boj09], gdzie autor dowodzi separacji rodzin klas języków, korzystając z faktu, że jakiś zbiór jest Σ_3^0-zupełny, więc nie leży w rodzinie $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$.

Powszechnie wiadomo, że wszystkie języki ω-regularne leżą w ramach klasy $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$. Dodatkowo znane są charakteryzacje w terminach hierarchii Wadge'a i związki z kombinatoryczną hierarchą Wagnera. Warte uwagi jest, że ponieważ wszystkich języków ω-regularnych jest przeliczalnie wiele, nie mogą więc wypełniać żadnej rozsądnej klasy złożoności topologicznej. Stąd wszelkie charakteryzacje topologiczne mówią jedynie w jakich klasach języki ω-regularne **mogą** się znajdować.

8.2 Automaty nieskończone

W tym rozdziale rozpatrywać będziemy naturalne rozszerzenie pojęcia automatu, dopuszczając sytuację gdy będzie on posiadał nieskończenie wiele stanów. Okaże się, że automaty takie odpowiadają dokładnie kolorowaniom, a dodatkowe ograniczenia na liczbę ranków czy wymagania by automat był słaby, odpowiadają skończoności i monotoniczności odpowiedniego kolorowania.

[1] W teorii automatów zazwyczaj rozpatruje się wartość $\limsup$, a nie $\liminf$. Gdy automat ma skończenie wiele stanów nie ma to znaczenia. My przyjmujemy jednak ten drugi warunek w związku z wynikami z rozdziału 7.

Definicja 8.2.1. *Automat nieskończony to dowolna krotka* $\langle q_0, Q, \delta, \Omega\rangle$ *jak w definicji automatu. Zamiast założenia że* Q *jest skończony, zakładamy że jest przeliczalny. Dodatkowy warunek jest taki, by dla każdego* $\alpha \in A^\omega$*, dla ciągu ranków* $(R_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *występujących w biegu* $\mathcal{A}$ *na* α*, zachodził warunek*

$$\liminf_{n\to\infty} R_n^\alpha < \infty.$$

Dodatkowo automat ma skończenie wiele ranków, jeśli $\sup_{q\in Q}\Omega(q) < \infty$ *i jest słaby, jeśli dla każdych* $q \in Q, z \in A$ *zachodzi* $\Omega(\delta(q,z)) \geqslant \Omega(q)$.

Kluczową obserwację na temat takich automatów formułuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 8.2.2. *Rodzina języków definiowanych przez automaty nieskończone i rodzina zbiorów definiowanych przez kolorowania, są równe.*

Dodatkowo automaty o skończenie wielu rankach odpowiadają kolorowaniom skończonym, a automaty słabe odpowiadają kolorowaniom monotonicznym.

Dowód. Weźmy najpierw dowolny automat $\mathcal{A}$, skończony lub nie. Zauważmy, że każde słowo $s \in T$ definiuje jednoznacznie stan $q_s \in Q$ w którym jest automat $\mathcal{A}$ po wczytaniu s. Zdefiniujmy teraz $K(s) = \Omega(q_s)$. Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$, ciąg R_n ranków występujących w biegu $\mathcal{A}$ na α i ciąg $K(\alpha|_n)$ są równe. Więc $\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n)$ jest określone i $\alpha \in L(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in [K]$. Więc $L(\mathcal{A}) = [K]$.

Teraz weźmy dowolne kolorowanie K. Rozważmy automat $\mathcal{A}$ o stanach $Q = A^*$ i stanie początkowym $q_0 = \epsilon$. Niech teraz $\delta(w,z) = wz$ i $\Omega(q) = K(q)$. Jak łatwo sprawdzić $\mathcal{A}$ jest automatem nieskończonym i $[K] = L(\mathcal{A})$.

W obu powyższych konstrukcjach zachowywane są własności skończenie wielu ranków (skończonego wahania) i słabości (monotoniczności) odpowiedniego automatu i kolorowania. ∎

8.3 Wnioski

Wobec twierdzenia 8.2.2, wyniki uzyskane dla kolorowań przenoszą się na języki rozpoznawane przez automaty nieskończone. Więc między innymi:

- automaty nieskończone rozpoznają wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}_3^0$,
- automaty o skończenie wielu rankach rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$,
- automaty słabe rozpoznają wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}_2^0$,
- automaty słabe o skończenie wielu rankach rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}_1^0)$,

- zastąpienie warunku $\liminf$ klasycznym warunkiem $\limsup$ sprawia, że siła wyrazu automatów nieskończonych istotnie maleje i przestają one rozpoznawać wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}^0_3$.

Podobne spostrzeżenie do powyższej różnicy pomiędzy warunkiem $\liminf$ i $\limsup$ można znaleźć w pracy [GW06]. Znajduje się tam analiza gier parzystości o potencjalnie nieskończenie wielu rankach i stawiane jest pytanie o determinację pozycyjną takich gier. Okazuje się tam (bez odwołania się do topologii), że aby taka determinacja miała miejsce, właściwym warunkiem jest $\liminf$.

Przykłady kolorowań K_n definiowanych w rozdziałach 6.1 i 6.2 motywowane są przez bardzo proste automaty o n stanach. Wobec tego ma miejsce poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 8.3.1. *Dla każdego n istnieje język ω-regularny $L_n \subseteq A^\omega$ (czyli rozpoznawany przez automat o skończenie wielu stanach), definiowany przez pewne kolorowanie o wahaniu n i nie definiowany przez żadne kolorowanie o wahaniu $n-1$.*

Powyższe zdanie jest również prawdziwe gdy rozpatrujemy języki rozpoznawane przez słabe automaty skończone i kolorowania monotoniczne odpowiednio.

Rozdział 9

Podsumowanie

W pracy zdefiniowano pojęcie kolorowania, czyli dowolnej funkcji $K \colon A^{<\omega} \to \mathbb{N}$ która na każdej gałęzi nieskończonej $\alpha \in A^\omega$ spełnia warunek

$$\liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) < \infty.$$

Dla każdego kolorowania K, w prosty sposób zdefiniowany jest zbiór

$$[K] = \left\{\alpha \in A^\omega : \liminf_{n\to\infty} K(\alpha|_n) \equiv 1 \pmod 2\right\}.$$

Dodatkowo wyróżniono dwie własności jakie kolorowanie może posiadać:

- *monotoniczność* – kolorowanie musi być funkcją niemalejącą na gałęziach.
- *skończoność* – kolorowanie przyjmuje tylko skończenie wiele wartości.

Oprócz tego wyróżniono kolorowania o wahaniu 1, czyli o wartościach $\{0, 1\}$. Uzyskane wyniki są podsumowane w poniższej tabelce. Każda z sześciu komórek tej tabeli prezentuje rodzinę dokładnie tych podzbiorów A^ω które są definiowane przez odpowiednie kolorowania.

kolorowania	**wahanie** 1	**skończone**	**nieskończone**
monotoniczne	$\mathbf{\Sigma}^0_1$	$BC(\mathbf{\Sigma}^0_1)$	$\mathbf{\Delta}^0_2$
niemonotoniczne	$\mathbf{\Sigma}^0_2$	$BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$	$\mathbf{\Delta}^0_3$

Podane są konstruktywne metody tworzenia kolorowania dla danego zbioru. Wahanie kolorowania skończonego odpowiada bezpośrednio złożoności formuły boolowskiej definiującej odpowiedni zbiór. Przy okazji wykazano, że kolorowania o większych wahaniach definiują ściśle więcej zbiorów.

Separacja klas z górnego wiersza tabeli od tych z dolnego jest konsekwencją ścisłości hierarchii borelowskiej w zbiorze Cantora. Separacje klas z wierszy położonych bardziej na lewo od tych bardziej na prawo są wykazane w pracy.

Ponadto przedstawiona jest analiza alternatywnej definicji kolorowania, gdy warunek $\liminf < \infty$ byłby zmieniony na $\limsup < \infty$. Wykazano, że kolorowania takie (nazywane kolorowaniami typu max) definiują ściśle mniej zbiorów, niż zwykłe kolorowania.

Okazuje się, że kolorowania bezpośrednio odpowiadają deterministycznym automatom parzystości o nieskończenie wielu stanach. Daje to silne związki zaprezentowanych wyników i teorii automatów na słowach nieskończonych. Jednym z wniosków jest, że automaty z warunkiem $\liminf$ o nieskończenie wielu stanach rozpoznają wszystkie zbiory $\mathbf{\Delta}^0_3$.

W pracy [BNR$^+$10] analizowane są tzw. *automaty z poradą*. Okazuje się, że bezpośrednio odpowiadają one kolorowaniom skończonym. Spostrzeżenie to pozwala pokazać, że automaty z poradą rozpoznają wszystkie zbiory $BC(\mathbf{\Sigma}^0_2)$.

9.1 Podziękowania

Za cenne sugestie i uwagi dziękuję mojemu promotorowi – Henrykowi Michalewskiemu. Oprócz tego chciałbym podziękować panom Witoldowi Marciszewskiemu, Filipowi Murlakowi, Damianowi Niwińskiemu oraz Piotrowi Zakrzewskiemu.

Za wsparcie i inspirację dziękuję mojej żonie Iwonie Skrzypczak.

Spis treści

Bibliografia

[BNR$^+$10] Mikołaj Bojańczyk, Damian Niwiński, Alexander Rabinovich, Adam Radziwończyk-Syta, and Michał Skrzypczak. On the borel complexity of MSO definable sets of branches. *Fundamenta Informaticae*, 98(4):337–349, 2010.

[Boj09] Mikolaj Bojanczyk. Weak MSO with the unbounding quantifier. In *STACS*, pages 159–170, 2009.

[GW06] Erich Grädel and Igor Walukiewicz. Postinal determinacy of games with infinitely many priorities. *CoRR*, abs/cs/0610034, 2006.

[Kec95] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[Tho96] Wolfgang Thomas. Languages, automata and logics. Technical Report 9607, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Christian-Albsechts-Universität, Kiel, Germany, 1996.