Złożoność topologiczna języków definiowanych w $MSO + U$

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

23 marca 2010

Streszczenie

Klasyczne wyniki Büchiego i Rabina dowodzą rozstrzygalności teorii MSO dla struktur $S1S$ i SkS. W obu przypadkach dowód przebiega poprzez konstrukcję automatu równoważnego odpowiedniej logice. Jeden z wniosków mówi, że na słowach nieskończonych logiki MSO i $WMSO$ mają tę samą siłę wyrazu. Języki definiowane przez te logiki nazywane są językami ω-regularnymi.

Niedawno Mikołaj Bojańczyk w pracy [Boj09] zaproponował rozszerzenie pojęcia języka ω-regularnego. Języki takie są równoważnie definiowane przez odpowiednie automaty (tzw. max-automaty) i logikę $WMSO + U$, czyli logikę $WMSO$ wzbogaconą o dodatkowy kwantyfikator U. Jeden z wyników mówi, że logika ta jest rozstrzygalna.

Aktualnie pytaniem otwartym jest, czy $MSO + U$ jest rozstrzygalna. Jak dotąd nie udało się nawet znaleźć odpowiedniego modelu automatu. Wyniki z tej pracy pokazują, że w ramach $MSO + U$ można definiować zbiory leżące dowolnie wysoko w ramach skończonych poziomów hierarchii borelowskiej. Sugeruje to, że może nie istnieć dogodne pojęcie automatu dla $MSO + U$.

1 Wprowadzenie

Rozpatrywać będziemy języki słów nieskończonych nad alfabetem $A = \{a, \sharp, \$, \flat\}$. Zbiór wszystkich takich słów oznaczamy A^ω i traktujemy jako przestrzeń topologiczną, homeomorficzną ze zbiorem Cantora. Logika $MSO+U$ to zwykła, monadyczna logika drugiego rzędu na ω, wzbogacona o dodatkowy kwantyfikator U.

Definicja 1.1. *Zdanie $UX.\varphi(X)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dowolnie duże, skończone zbiory $X \subset \omega$, takie że $\varphi(X)$.*

Rozpatrywanym niedawno pojęciem są automaty BS, o sile wyrazu słabszej niż $MSO + U$, ale znacznie większej niż zwykłe automaty Rabina. W pracy [HT10] pokazane jest, że automaty te definiują języki leżące na czwartym poziomie hierarchii borelowskiej i nie wyżej.

W poniższej pracy pokażemy ciąg języków definiowalnych w $MSO+U$. Są one tak dobrane, by i-ty język był trudny (w sensie ciągłych redukcji) w klasie $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}$.

2 Definicje

W tym rozdziale wprowadzone są pomocnicze definicje, upraszczające dalsze rozumowanie. Zdefiniowane zostają również języki, których istnienia dowodzi ta praca.

2.1 Przestrzenie

Ze względu na specyfikę zagadnienia, operować będziemy jednocześnie słowami skończonymi i nieskończonymi. Stąd poniższa definicja.

Definicja 2.1. *Dla dowolnego niepustego zbioru S, przez $S^{\leqslant\omega}$ oznaczam zbiór słów skończonych i nieskończonych nad S.*

Dla $\eta \in S^{\leqslant\omega}$, przez $\mathrm{dom}(\eta) \subseteq \mathbb{N}$ oznaczam dziedzinę η traktowanej jako funkcji. Jest to zbiór postaci $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ dla pewnego $n \in \omega$, lub ω.

Opisywane języki słów nieskończonych zawarte będą w przestrzeni A^ω, jednak przydatne będą też inne przestrzenie topologiczne.

Definicja 2.2. *Dla $i \in \mathbb{N}$, niech*

$$\mathcal{N}_i = \left(\mathbb{N}^i\right)^{\leqslant\omega},$$

czyli przestrzeń skończonych i nieskończonych ciągów wektorów liczb naturalnych, długości i. Gdy $i = 0$, otrzymujemy przestrzeń homeomorficzną z $\omega + 1$.

Dodatkowo, niech

$$\mathcal{N}_i^\infty = (\mathbb{N}^i)^\omega \subset \mathcal{N}_i,$$

czyli zbiór nieskończonych ciągów odpowiednich wektorów. W szczególności $\mathcal{N}_0^\infty = \{\omega\}$.

Dla odróżnienia, elementy $\mathcal{N}_i$ czyli ciągi wektorów, oznaczane będą literą η, natomiast poszczególne wektory oznaczać będziemy $(n_1, n_2, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^i$.

Zauważmy, że przestrzenie $\mathcal{N}_i$ z naturalną topologią ciągową są przestrzeniami polskimi. Dodatkowo, pokażemy że zanurzają się one w naturalny sposób w A^ω. Najpierw określmy pomocnicze funkcje $M_i \colon \mathbb{N}^i \to A^*$, zdefiniowane $M_i(n_1, n_2, \ldots, n_i) = a^{n_1}\sharp a^{n_2}\sharp \ldots \sharp a^{n_i}$. Teraz możemy określić ciąg funkcji $W_i \colon \mathcal{N}_i \to A^\omega$, określonych równaniami

$$W_i(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_M) = M_i(\eta_0)\$M_i(\eta_1)\$\ldots\$M_i(\eta_M)\$\flat^\omega,$$

$$W_i(\eta_0, \eta_1, \ldots) = M_i(\eta_0)\$M_i(\eta_1)\$\ldots.$$

Fakt 2.3. *Funkcje W_i są różnowartościowe i ciągłe.*

Dowód. Oczywiście są one różnowartościowe. Jednocześnie, przypisują one prefiksom $\eta \in \mathcal{N}_i$, prefiksy słowa $W_i(\eta) \in A^\omega$. Więc są ciągłe. ■

2.2 Operacje

Języki definiowane w tej pracy, powstawać będą indukcyjnie ze względu na wymaganą złożoność topologiczną. Dlatego przydatne będą następujące definicje.

Definicja 2.4. *Dla dowolnego słowa $\eta \in S^{\leqslant\omega}$ i zbioru X zawartego w dziedzinie η, niech $\eta|_X \in S^{\leqslant\omega}$ oznacza słowo, powstałe przez wybranie z η znaków na pozycjach leżących w X.*

Oczywiście pozycje ulegają zmianie, czyli zazwyczaj $\mathrm{dom}(\eta|_X) \neq X$, ale zawsze $|\mathrm{dom}(\eta|_X)| = |X|$. W szczególności, jeśli X jest pusty, to $\eta|_X = \varepsilon$, jeśli X jest skończony, to $\eta|_X \in S^*$, a w przeciwnym przypadku $\eta|_X \in S^\omega$.

Definicja 2.5. *Zdefiniujmy, dla $i > 0$, funkcje*

$$\sigma_i \colon \mathbb{N} \times \mathcal{N}_i \to 2^\omega,$$

w następujący sposób:

$$\sigma_i(m, \eta) = \{x \in \mathrm{dom}(\eta) : \eta(x)_i = m\}.$$

Czyli $\sigma_i(m, \eta)$ to te pozycje w słowie η, gdzie najwyższa współrzędna jest równa m. Oczywiście $\sigma_i(m, \eta) \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$. Jednocześnie może być tak, że $\mathrm{dom}(\eta) = \mathbb{N}$ i jednocześnie $\sigma_i(m, \eta) = \emptyset$.

Definicja 2.6. *Dla $i > 0$, niech $\pi_i \colon \mathcal{N}_i \to \mathcal{N}_{i-1}$ obcina z każdego wyrazu ciągu jego pierwszą współrzędną.*

Oczywiście π_i jest na.

Definicja 2.7. *Dla $i > 0$ oraz $\eta \in \mathcal{N}_i$, zdefiniujmy rodzinę*

$$B_i(\eta) = \{X \subseteq \mathrm{dom}(\eta) : \exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{x \in X} \eta(x)_i \leqslant k\},$$

tych podzbiorów $\mathrm{dom}(\eta)$, na których ostatnia współrzędna wektorów w η jest ograniczona.

Na przykład $B_i(\eta)$ zawsze zawiera wszystkie skończone podzbiory ω.

2.3 Języki

W tym rozdziale zdefiniujemy omawiane w pracy języki, trudne dla coraz wyższych klas borelowskich. Będzie to zrealizowane na dwa sposoby. Dodatkowo, dla uproszczenia, języki te będą definiowane w przestrzeniach $\mathcal{N}_i$.

Definicja 2.8. *Dla $i > 0$, niech język $L_i \subseteq \mathcal{N}_i = \left(\mathbb{N}^i\right)^{\leqslant\omega}$, będzie składał się z takich słów $\eta \in \mathcal{N}_i$, że*

$$\exists^{\infty}_{m_i} \exists^{\infty}_{m_{i-1}} \dots \exists^{\infty}_{m_1} \exists^{\infty}_{x \in \mathrm{dom}(\eta)} \eta(x) = (m_i, m_{i-1}, \dots, m_1)\,,$$

gdzie $\exists^{\infty}$ oznacza „istnieje nieskończenie wiele”.

Dodatkowo, niech

$$L_0 = \mathcal{N}_0^{\infty} \subset \mathcal{N}_0.$$

Zauważmy, że $L_i \subseteq \mathcal{N}_i^{\infty}$.

Równolegle, postaramy się opisać języki L_i w inny sposób, tak by przekładało się to na formułę $MSO + U$.

Definicja 2.9. *Niech $H_0 = \mathcal{N}_0^{\infty} \subset \mathcal{N}_0$.*

Weźmy $i > 0$. Niech $H_i \subseteq \mathcal{N}_i$ będzie językiem tych słów $\eta \in \mathcal{N}_i$, że

$$\forall_{X \in B_i(\eta)} \exists_{Y \in B_i(\eta)} Y \cap X = \emptyset \wedge \pi_i\left(\eta|_Y\right) \in H_{i-1}.$$

Znowu łatwo pokazać, że $H_i \subseteq \mathcal{N}_i^{\infty}$.

3 Topologia

W tym rozdziale pokażemy, że języki L_i są trudne w odpowiednich klasach topologicznych.

Przydatne będzie następujące spostrzeżenie.

Fakt 3.1. *Dla dowolnego $i > 1$ i zbioru $X \in \mathbf{\Sigma}^0_i$, istnieją parami rozłączne zbiory $X_n \in \mathbf{\Pi}^0_{i-1}$, spełniające*

$$\bigcup_n X_n = X.$$

Dowód. Fakt ten, wraz z dowodem, występuje jako twierdzenie 2 w rozdziale §30.V w pracy [Kur66]. ■

Podstawą do indukcyjnego dowodu trudności odpowiednich języków, będzie następujące spostrzeżenie.

Fakt 3.2. *Język $L_1 \subseteq \mathbb{N}^{\omega}$ jest $\mathbf{\Pi}^0_4$-zupełny.*

Dowód. Jest to prosta konsekwencja ćwiczenia 23.6 z książki [Kec95]. ■

Twierdzenie 3.3. *Dla każdego $i > 0$, język $L_i \subseteq \mathcal{N}_i^{\infty}$ jest $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}$ zupełny.*

Dowód. Dowód indukcyjny. Fakt 3.2 stanowi bazę dla $i = 1$. Weźmy $i > 1$ i dowolny zbiór $X \in \mathbf{\Pi}^0_{2i+2}$. Wiemy, że istnieje zstępująca rodzina zbiorów $X_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{2i+1}$, spełniająca

$$\bigcap_n X_n = X.$$

W oparciu o fakt 3.1, możemy zdefiniować zbiory $X_k^{(n)} \in \mathbf{\Pi}^0_{2i}$, które przy ustalonym n są parami rozłączne i spełniają

$$\bigcup_k X_k^{(n)} = X_n.$$

Ponieważ z założenia indukcyjnego, język L_{i-1} jest $\mathbf{\Pi}^0_{2i}$-trudny, to istnieją ciągłe redukcje $R_k^{(n)} \colon \mathcal{N}_{i-1}^\infty \to \mathcal{N}_{i-1}^\infty$ zbiorów $X_k^{(n)}$ do L_{i-1}.

Niech $\iota \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ będzie dowolną bijekcją. Zdefiniujmy funkcję $R \colon \mathcal{N}_i^\infty \to \mathcal{N}_i^\infty$, która bierze dowolne $\eta \in \mathcal{N}_i^\infty$ i przypisuje mu ciąg, mający na dowolnej pozycji $\iota(\iota(n,k), m) \in \omega$ wartość

$$\left(\iota(n,k), \left(R_k^{(n)}(\eta)\right)_m\right) \in \mathbb{N}^i.$$

Jak łatwo sprawdzić, tak określona funkcja jest ciągła.

Dodatkowo, $R(\eta) \in L_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla nieskończenie wielu par (n,k), zachodzi $R_k^{(n)}(\eta) \in L_{i-1}$. Ale ponieważ przy ustalonym n, zbiory $X_k^{(n)}$ są rozłączne, więc dla danego n może być co najwyżej jedna taka para. To oznacza, że (równoważnie) dla nieskończenie wielu n istnieje takie k, że $\eta \in X_k^{(n)}$, czyli równoważnie dla nieskończenie wielu n, $\eta \in X_n$. Ponieważ ciąg X_n jest zstępujący, jest to równoważne z faktem, że $\eta \in X$. Czyli istotnie R jest redukcją X do L_i. ■

Pozostaje wykorzystać ten wynik w odniesieniu do przestrzeni A^ω.

Wniosek 3.4. *$W_i(L_i)$ jest $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}(A^\omega)$-trudny.*

Dowód. Wiemy, że L_i jest $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}(\mathcal{N}_i^\infty)$-zupełny. Zarówno zanurzenie $\mathcal{N}_i^\infty$ w $\mathcal{N}_i$, jak też funkcja $W_i \colon \mathcal{N}_i \to A^\omega$, są różnowartościowe i ciągłe. Więc zachowują trudność języka L_i. ■

4 Logika

Definicja języków H_i jest tak skonstruowana, by zachodziło następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. *Dla każdego $i \in \mathbb{N}$, język $W_i(H_i) \subseteq A^\omega$ jest definiowalny w logice $MSO + U$.*

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję po i. Dla $i = 0$, możemy w samej logice MSO wyrazić własność, że $\alpha \in A^\omega$ jest postaci $W_0(\omega)$. Oznaczmy formułę to wyrażającą Φ_0.

Weźmy $i > 0$. Dość łatwo możemy napisać formułę $\upsilon_i(X)$, o własności

$$W_i(\eta) \models \upsilon_i(X) \quad \Leftrightarrow \quad X \notin B_i(\eta).$$

Wystarczy, że powie ona, że istnieją dowolnie duże zbiory składające się z samych liter a i położone po odpowiednim z kolei znaku $\sharp$, w ramach jakiejś sekcji $\$\{a, \sharp\}^*\$$.

Podobnie, jeśli mamy daną dowolną formułę ψ, możemy przerobić ją na nową formułę oznaczoną $\psi|_Y$, w której wszystkie kwantyfikatory będą ograniczone do danej zmiennej monadycznej Y. Wreszcie każdą kwantyfikację możemy ograniczyć do całych sekcji $\$\{a, \sharp\}^*\$$ i możemy wymagać, by całe słowo było w ogóle postaci $W_i(\eta)$, dla jakiejś $\eta \in \mathcal{N}_i^\infty$.

Wtedy piszemy

$$\Phi_i = \forall_X \neg\upsilon_i(X) \Rightarrow (\exists_Y \neg\upsilon_i(Y) \wedge X \cap Y = \emptyset \wedge \Phi_{i-1}|_Y)\,.$$

W łatwy sposób widzimy, że dla każdego $\alpha \in A^\omega$ zachodzi

$$\alpha \models \Phi_i \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in W_i(H_i).$$

■

5 Równoważność

Pozostaje pokazać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5.1. *Dla każdego $i > 0$ zachodzi*

$$W_i(L_i) = W_i(H_i).$$

Ponieważ H_i są różnowartościowe, wystarczy sprawdzić, że $L_i = H_i$. W tym celu pokażemy kilka lematów.

Lemat 5.2. *$\eta \in L_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieskończenie wiele m, takich że*

$$\pi_i\left(\eta|_{\sigma_i(m,\eta)}\right) \in L_{i-1}.$$

Dowód. Wprost z definicji i przez indukcję. ■

Lemat 5.3. *Jeśli $\eta \in \mathcal{N}_i$, $D \subseteq Y \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$ i zachodzi $\eta|_D \in L_i$, to $\eta|_Y \in L_i$.*

Dowód. Oczywisty, z monotoniczności kwantyfikatora $\exists^\infty$. ■

Poniższy lemat wyraża kluczowy związek języków L_i z kwantyfikatorem U.

Lemat 5.4. *Jeśli $X, Y \subseteq \omega$ i $X \cap Y = \emptyset$ i pewne $\eta \in \mathcal{N}_i$ spełnia $\eta|_{X\cup Y} \in L_i$, to $\eta|_X \in L_i$, lub $\eta|_Y \in L_i$.*

Dowód. Dowód przez indukcję. Dla $i = 0$, mamy $\eta_{X\cup Y} \in L_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|X \cup Y| = \aleph_0$. Ale wtedy któryś ze zbiorów X, Y jest nieskończony. Oznaczmy go Z. Wtedy zachodzi $\eta|_Z \in L_0$.

Weźmy $i > 0$. Skoro $\eta|_{X\cup Y} \in L_i$, to istnieje nieskończenie wiele $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dla których

$$\pi_i\left((\eta|_{X\cup Y})\,|_{\sigma_i(m_k,\eta|_{X\cup Y})}\right) = \pi_i\left(\eta|_{(X\cup Y)\cap\sigma_i(m_k,\eta)}\right) \in L_{i-1}.$$

Oczywiście

$$(X\cup Y)\cap\sigma_i(m_k,\eta) = (\sigma_i(m_k,\eta)\cap X)\cup(\sigma_i(m_k,\eta)\cap Y)\,,$$

więc z założenia indukcyjnego, dla każdego $k \in \mathbb{N}$, mamy zbiór $Z_k \in \{X, Y\}$, spełniający $\pi_i\left(\eta|_{\sigma_i(m_k,\eta)\cap Z_k}\right) \in L_{i-1}$. Któryś ze zbiorów X, Y występuje nieskończenie często w ciągu Z_k. Oznaczmy go $Z \in \{X, Y\}$ i ograniczmy się do podciągu tych k, że $Z_k = Z$. Wtedy, dla każdego k (z tego podciągu), mamy

$$L_{i-1} \ni \pi_i\left(\eta|_{\sigma_i(m_k,\eta)\cap Z}\right) = \pi_i\left((\eta|_Z)\,|_{\sigma_i(m_k,\eta|_Z)}\right),$$

więc $\eta|_Z \in L_i$. ■

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia. Dowód w obie strony przebiegać będzie przez indukcję po i.

Dowód twierdzenia 5.1.

1) $L_i \subseteq H_i$ Ustalmy $\eta \in L_i$. Weźmy dowolny $X \in B_i(\eta)$. Załóżmy, że najwyższe współrzędne η na pozycjach z X są ograniczone przez M. Korzystając z lematu 5.2 wiemy, że istnieje $m > M$, dla którego $\pi_i\left(\eta|_{\sigma_i(m,\eta)}\right) \in L_{i-1}$. Weźmy $Y = \sigma_i(m,\eta)$. Wtedy wiemy, że $Y \cap X = \emptyset$ i z założenia indukcyjnego $\pi_i(\eta|_Y) \in H_{i-1}$. Więc pokazaliśmy, że $\eta \in H_i$.

2) $H_i \subseteq L_i$ Weźmy $\eta \in H_i$. Załóżmy przez sprzeczność, że istnieje tylko skończenie wiele m z lematu 5.2. Załóżmy, że największy z nich to M.

Weźmy $X = \bigcup_{m\leqslant M}\sigma_i(m,\eta)$. Oczywiście $X \in B_i(\eta)$. Wiemy więc, że istnieje $Y \in B_i(\eta)$ rozłączny z X, taki że $\pi_i(\eta|_Y) \in H_{i-1}$. Z założenia indukcyjnego, mamy że $\pi_i(\eta|_Y) \in L_{i-1}$. Dodatkowo powiedzmy, że najwyższe współrzędne η w Y są ograniczone przez N.

W takim razie

$$Y \subseteq \bigcup_{M<m\leqslant N}\sigma_i(m,\eta).$$

Więc korzystając wielokrotnie z lematu 5.4, dla $Y \cap \sigma_i(m,\eta)$, po $M < m \leqslant N$, dostajemy, że dla pewnego $M < m \leqslant N$, zachodzi $\pi_i(\eta|_{Y\cap\sigma_i(m,\eta)}) \in L_{i-1}$.

W oparciu o lemat 5.3, dostajemy, że w takim razie

$$\pi_i(\eta|_{\sigma_i(m,\eta)}) \in L_{i-1}.$$

Ale $m > M$, co daje sprzeczność z definicją M.

■

Pozwala to wyciągnąć główny wniosek.

Wniosek 5.5. *Dla każdego $i \in \mathbb{N}$, istnieją języki słów nieskończonych nad alfabetem A, definiowalne w $MSO+U$, trudne w klasie $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}(A^\omega)$.*

Dowód. Język $W_i(H_i) = W_i(L_i) \subseteq A^\omega$ jest jednocześnie definiowalny w $MSO+U$ (twierdzenie 4.1) i $\mathbf{\Pi}^0_{2i+2}(A^\omega)$-trudny (wniosek 3.4). ■

6 Podsumowanie

Powyższa praca daje relatywnie silnie, dolne szacowanie złożoności topologicznej języków definiowalnych w $MSO+U$. Pokazuje mianowicie, że w tej logice można definiować zbiory leżące dowolnie wysoko w ramach skończonych poziomów hierarchii borelowskiej. Znane do tej pory szacowania dolne, ograniczały się do poziomu czwartego hierarchii.

Problem szacowania górnego złożoności wciąż pozostaje otwarty. Jedyne co wiadomo, to że każdy taki język leży gdzieś w hierarchii analitycznej – wynika to wprost z postaci formuł w logice $MSO+U$.

Serdecznie podziękowania należą się panu Szczepanowi Hummelowi, za cenne uwagi i sugestie merytoryczne.

Literatura

[Boj09] Mikolaj Bojanczyk. Weak MSO with the unbounding quantifier. In *STACS*, pages 159–170, 2009.

[HT10] Szczepan Hummel and Szymon Toruńczyk. Topological complexity of ω BS-regular languages. Exact bounds for the topological complexity of ω BS-regular Languages, 2010.

[Kec95] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Kur66] Kazimierz Kuratowski. *Topology. Vol. I.* Academic Press, New York, 1966.