$MSO + U$ definiuje języki nieborelowskie

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

10 stycznia 2011

Streszczenie

Poniższa praca pokazuje nieborelowski język słów nieskończonych definiowalny w $MSO + U$.

Wersja bardzo wstępna!

1 Wprowadzenie

Przypomnijmy, że w przestrzeni wszystkich drzew na $\mathbb{N}$ (ozn. $\mathcal{T}$), czyli domkniętej podprzestrzeni $2^{\mathbb{N}^*}$, zbiór tych drzew które posiadają nieskończoną gałąź (ozn. $B \subseteq \mathcal{T}$), jest analityczny-zupełny, czyli w szczególności nieborelowski.

Rozważmy dowolne drzewo $T \subseteq \mathbb{N}^*$. Będziemy je w sposób ciągły kodować jako słowo nad alfabetem $A = \{a, b, c\}$. Niech kod wierzchołka $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^*$ będzie równy

$$a^{n_1} b a^{n_2} b \ldots b a^{n_m}.$$

Teraz niech kod drzewa T to będzie słowo $k(T) = k_1 c k_2 c k_3 c \ldots$, gdzie k_i to kod i'tego wierzchołka drzewa (w dowolnym porządku). Nie będziemy starali się wyrazić, że słowo $\alpha \in A^\omega$ jest kodem drzewa. Wyrazimy tylko, że „jeśli α to kod drzewa, to drzewo to ma nieskończoną gałąź".

Definicja 1.1. *Poniższą własność drzewa $T \subseteq \mathbb{N}^*$ nazywać będę własnością $\mathcal{G}$:*

Istnieje nieskończony podzbiór wierzchołków $T' \subseteq T$, taki, że dla każdego $R \in \mathbb{N}$, zbiór

$$\{v_k : v \in T', 0 \leqslant k < \min(R, |v|)\} \subseteq \mathbb{N},$$

jest ograniczony.

Fakt 1.2. *Własność $\mathcal{G}$ jest równoważna posiadaniu nieskończonej gałęzi przez T.*

Dowód. Jeśli drzewo ma nieskończoną gałąź $\epsilon < v_1 < v_2 < \ldots$, to można ją wziąć jako T'. Wtedy T' jest nieskończone. Dodatkowo, dla każdego R, wszystkie wierzchołki w T' (oprócz pierwszych $R-1$) mają te same pierwsze R współrzędnych – dokładnie wyrazy v_R jako słowa. Więc są one wszystkie wspólnie ograniczone przez

$$\max\{(v_R)_0, (v_R)_1 \ldots, (v_R)_{R-1}\}.$$

Teraz w drugą stronę: Załóżmy, że podzbiór $T' \subseteq T$ ma własność $\mathcal{G}$. Wybiorę ciąg $v_0 < v_1 < v_2 \ldots$ wierzchołków w T. Będzie to oznaczało istnienie nieskończonej gałęzi w T. Weźmy za $v_0 = \epsilon$.

Indukcja po i. Załóżmy, że dla $i-1 \geqslant 0$ mamy określone $v_0 < v_1 < \ldots < v_{i-1} \in T$, takie że jest nieskończenie wiele wierzchołków $v \in T'$ spełniających $v_{i-1} < v$. Oczywiście, skoro T' jest nieskończone, to $v_0 = \epsilon$ ma tę własność.

Rozważmy $R = i+1$. Własność $\mathcal{G}$ oznacza w szczególności, że w T' występuje tylko skończenie wiele i-tych współrzędnych słów. Czyli jakaś i-ta współrzędna n_i występuje nieskończenie często wśród tych nieskończenie wielu wierzchołków $v \in T'$ spełniających $v_{i-1} < v$. Weźmy $v_i = v_{i-1}n_i$. Oczywiście w takim razie $v_i \in T$. Dodatkowo, wciąż nieskończenie wiele wierzchołków $v \in T'$ spełnia $v_i < v$.

Powyższa indukcja zadaje poszukiwany ciąg $v_0 < v_1 < \ldots \subseteq T$. ∎

Definicja 1.3. *Powiemy, że $S \subseteq \omega$ jest dobre (w kontekście $\alpha \in A^\omega$), jeśli:*

- *z każdego kodu postaci $ca^{n_1}ba^{n_2}b\ldots a^{n_m}c$, zawiera pewien jego spójny odcinek, zaczynający się tuż za c i kończący się tuż przed którąś literą b lub tuż przed końcowym c,*
- *ma wspólnie ograniczoną liczbę wystąpień litery b w poszczególnych kodach.*

Definicja 1.4. *Formuła φ mówi, że istnieje nieskończony podzbiór $G \subseteq \omega$, zawierający tylko całe kody pomiędzy kolejnymi literami c, taki że dla każdego $S \subseteq G$ które jest dobre, bloki liter a^n występujące w S są wspólnie ograniczone co do rozmiaru.*

Fakt 1.5. *Drzewo T ma własność $\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy słowo $\alpha = k(T) \in A^\omega$ spełnia*

$$\alpha \models \varphi.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\alpha \models \varphi$. Weźmy za $T' \subseteq T$ podzbiór wyznaczany przez $G \subseteq \omega$. Weźmy dowolne R i określmy za zbiór S kody wierzchołków w G obcięte do pierwszych R współrzędnych. Wtedy wystąpienia liter b w kodach w S są wspólnie ograniczone przez R, więc bloki a^n są wspólnie ograniczone. Co daje ograniczoność odpowiedniego zbioru z definicji własności $\mathcal{G}$.

Załóżmy teraz, że T ma własność $\mathcal{G}$. Weźmy podzbiór $T' \subseteq T$ z własności $\mathcal{G}$ i jako G wybierzmy kody tych wierzchołków, które leżą w T'.

Weźmy dowolny dobry zbiór $S \subseteq G$. Wiemy, że wystąpienia liter b są wspólnie ograniczone, ograniczenie to nazwijmy R. W takim razie (z $\mathcal{G}$ dla tego R) zbiór wszystkich współrzędnych od 1 do R jest ograniczony, a to jest nadzbiór zbioru bloków a^n występujących w S. Więc te bloki są ograniczone w S. ■

Czyli $k(T)$ zadaje ciągłą redukcję zbioru $B \subseteq \mathcal{T}$ do zbioru $W = \{\alpha : \alpha \models \varphi\} \subseteq A^\omega$. Łatwo sprawdzić, że W jest analityczny, wynika to z postaci warunku $\mathcal{G}$. Więc jest analityczny-zupełny, bo B taki jest.