Obwody logiczne a zbiory borelowskie

Adam Radziwończyk-Syta   Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

9 marca 2009

http://students.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/obwody.pdf

Zbiór Cantora

Definicja

Przez zbiór Cantora K oznaczamy obraz zbioru $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ przy funkcji

$$(x_0, x_1, \ldots) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} x_i \frac{1}{3^{i+1}}.$$

Zbiór Cantora

Fakt

$$\mathbb{K} \simeq_{\textsf{\textbf{Top}}} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Zbiory borelowskie

Definicja

- Π_0 - *skończone przecięcia zbiorów postaci* $\{x_i = b_i\}$, *dla* $b_i = 0, 1$,
- Σ_α - *przeliczalne sumy zbiorów z* $\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta$,
- Π_α - *dopełnienia zbiorów z* Σ_α.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & \cdots & & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha & & & \cdots\\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & & \nearrow & & \searrow & & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & & \cdots & \mathbf{\Delta}^0_\alpha & & & & \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1} & \cdots\\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & \mathbf{\Pi}^0_1 & & & & \mathbf{\Pi}^0_2 & \cdots & & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha & & & \cdots
\end{array}$$

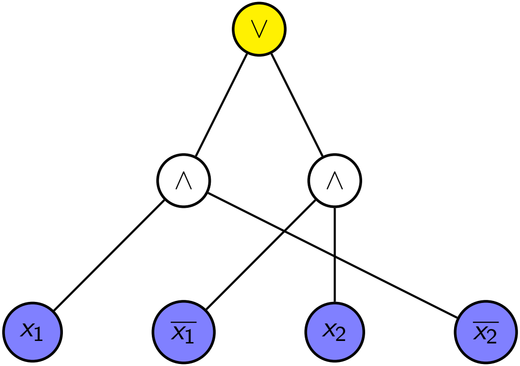
Obwody logiczne

Obwód C o n wejściach:

- bramki wejściowe $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
- bramka wyjściowa,
- bramki typu $\vee$, $\wedge$, $\neg$,
- wyznacza $f_C \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

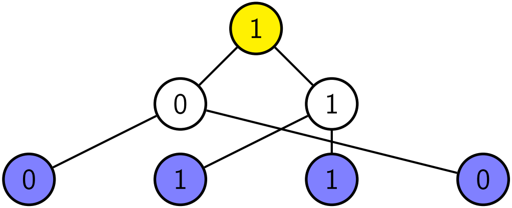
Obwody logiczne

Obwód obliczający $x_1 \ \mathrm{XOR} \ x_2$:



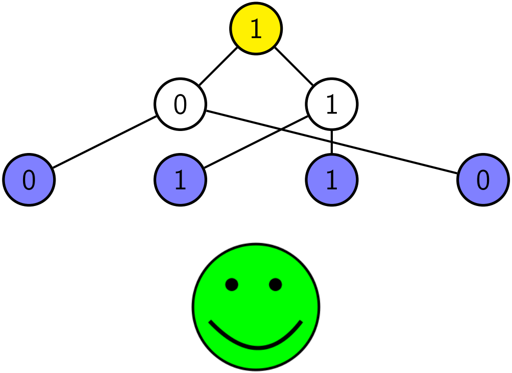
Obwody logiczne

Poprzedni obwód dla $x = (01)$



Obwody logiczne

Poprzedni obwód dla $x = (01)$



Parametry obwodów logicznych

- negacje można przesunąć w dół,
- głębokość (długość najdłuższej ścieżki),
- rozmiar (ilość bramek),
- nieograniczone stopnie wejściowe vs ograniczone stopnie wejściowe.

Czemu obwody są fajne?

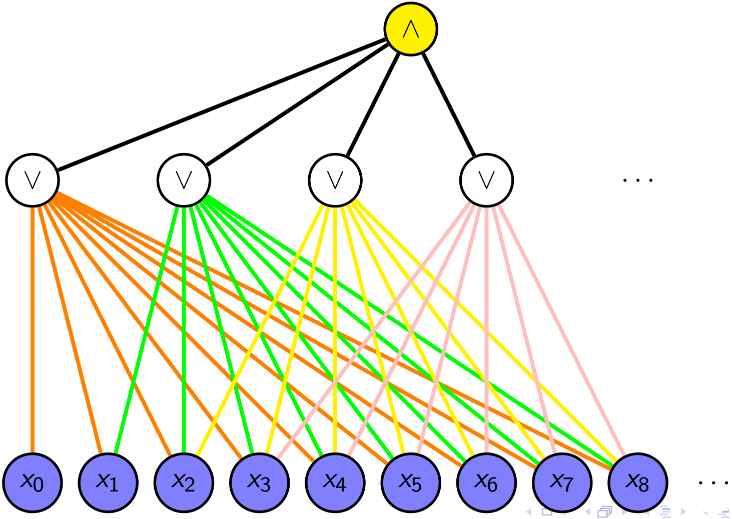
- model obliczeń,
- istnieje ciąg obwodów rozmiaru $T(n) \log T(n)$ dla MT działającej w czasie $T(n)$,
- argumenty kombinatoryczne,
- $AC_0[k] = FO[k]$ i Rossman,
- $AC_0 \neq NC_1$ - Furst, Saxe, Sipser, (Ajtai, Hästad),
- $AC_0[k]$ - ścisła hierarchia,
- podobne twierdzenia dla obwodów nieskończonych.

Uogólnione obwody logiczne

- nieskończenie wiele wejść $x_0, x_1, \ldots$,
- nieskończone stopnie wejściowe,
- Σ_0-obwód - skończona alternatywa zmiennych lub ich negacji,
- Π_0-obwód - skończona koniunkcja zmiennych lub ich negacji,
- Σ_α - przeliczalna alternatywa obwodów należących do $\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta$,
- Π_α - przeliczalna koniunkcja obwodów należących do $\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta$,

Przykład

Nieskończony obwód rozpoznający słowa z nsk. wieloma 1:



Uogólnione obwody logiczne

Oczywista oczywistość

- *Jeśli* $C \in \Sigma_\alpha$, *to* $f_C^{-1}(\{1\}) \in \Sigma_\alpha$.
- *Jeśli* $A \in \Sigma_\alpha$, *to istnieje obwód* $C \in \Sigma_\alpha$ *taki, że* $f_C = \Xi_A$.

Uogólnione obwody logiczne

Oczywista oczywistość

- *Jeśli* $C \in \Sigma_\alpha$, *to* $f_C^{-1}(\{1\}) \in \Sigma_\alpha$.
- *Jeśli* $A \in \Sigma_\alpha$, *to istnieje obwód* $C \in \Sigma_\alpha$ *taki, że* $f_C = \Xi_A$.

Wniosek

Hierarchia borelowska i hierarchia obwodów są w odpowiedniej odpowiedniości.

Restrykcje

Definicja

Restrykcją nazywamy dowolny nieskończony ciąg symboli ze zbioru $\{0, 1, \star\}$*, zawierający nieskończenie wiele znaków* $\star$.

Restrykcje

Definicja

Restrykcją nazywamy dowolny nieskończony ciąg symboli ze zbioru $\{0, 1, \star\}$, zawierający nieskończenie wiele znaków $\star$.

Definicja

Dla danego obwodu C, oraz restrykcji ρ, przez $C|_\rho$ oznaczamy obwód, w którym za poszczególne zmienne zostały podstawione symbole ρ. Tam gdzie w ρ występuje $\star$, zostają wpisane nowe zmienne (pod pierwszą $\star$ zmienna x_1, pod drugą x_2, itd.).

Restrykcje

Definicja

Restrykcją nazywamy dowolny nieskończony ciąg symboli ze zbioru $\{0, 1, \star\}$, zawierający nieskończenie wiele znaków $\star$.

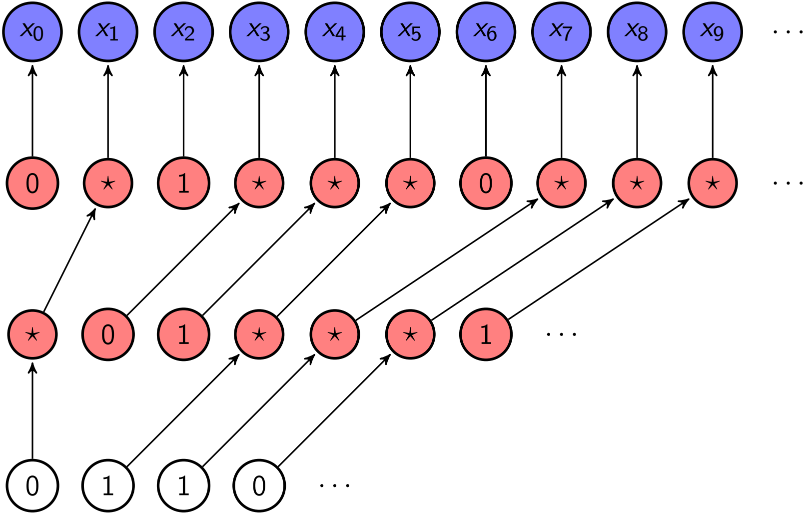
Definicja

Dla danego obwodu C, oraz restrykcji ρ, przez $C|_\rho$ oznaczamy obwód, w którym za poszczególne zmienne zostały podstawione symbole ρ. Tam gdzie w ρ występuje $\star$, zostają wpisane nowe zmienne (pod pierwszą $\star$ zmienna x_1, pod drugą x_2, itd.).

Fakt

Dla danych C, ρ_1, ρ_2, istnieje restrykcja $\rho_1 \circ \rho_2$ taka że $(C|_{\rho_1})|_{\rho_2} \equiv C|_{\rho_1 \circ \rho_2}$. Powstaje ona przez podstawienie symboli ρ_1 w gwiazdki ρ_2.

Przykład



Główne twierdzenie

Twierdzenie

Dla każdego uogólnionego obwodu logicznego C, istnieje restrykcja ρ, taka że $C|\rho$ ma stałą wartość (niezależną od wejść).

Główne twierdzenie

Twierdzenie

Dla każdego uogólnionego obwodu logicznego C, istnieje restrykcja ρ, taka że $C|\rho$ ma stałą wartość (niezależną od wejść).

Dowód składa się z dwóch części:

Główne twierdzenie

Twierdzenie

Dla każdego uogólnionego obwodu logicznego C, istnieje restrykcja ρ, taka że $C|\rho$ ma stałą wartość (niezależną od wejść).

Dowód składa się z dwóch części:

- Pierwsza pozwala dowolny obwód C wysokości 3 obciąć tak dobraną restrykcją ρ, by $C|_\rho$ był obwodem skończonym. A oczywiście dla obwodu skończonego istnieje restrykcja ustalająca jego wartość.

Główne twierdzenie

Twierdzenie

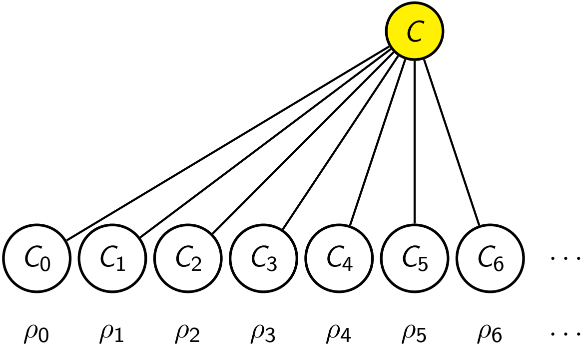
Dla każdego uogólnionego obwodu logicznego C, istnieje restrykcja ρ, taka że $C|\rho$ ma stałą wartość (niezależną od wejść).

Dowód składa się z dwóch części:

- Pierwsza pozwala dowolny obwód C wysokości 3 obciąć tak dobraną restrykcją ρ, by $C|_\rho$ był obwodem skończonym. A oczywiście dla obwodu skończonego istnieje restrykcja ustalająca jego wartość.
- Druga, przez indukcję pozaskończoną ze względu na wysokość obwodu, dowodzi tezy twierdzenia, redukując obwody do wysokości 3.

Pomysł

Indukcja ze względu na wysokość obwodu, *od góry*.



Trick

Mamy nieskończenie wiele restrykcji $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Jak można złożyć je wszystkie w jedną?

Trick

Mamy nieskończenie wiele restrykcji $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Jak można złożyć je wszystkie w jedną?
Postępujemy tak (najpierw $\rho = \rho_0$, wszystkie gwiazdki ρ są czarne):

- weź aktualne ρ,
- weź jakąś czarną gwiazdkę ρ i pomaluj na czerwono,
- pod czarne gwiazdki ρ wstaw w nie kolejną ρ_i,
- wróć na początek pętli.

W każdym momencie mamy skończenie wiele czerwonych gwiazdek, możemy się nimi nie przejmować. A po nieskończenie wielu krokach gwiazdek czerwonych jest nieskończenie wiele.

Funkcje parzystości

Definicja

Funkcja parzystości to dowolna funkcja $P\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$, *taka że* $P(x) \neq P(y)$, *jeśli* x *i* y *różnią się na dokładnie jednej pozycji.*

Funkcje parzystości

Definicja

Funkcja parzystości to dowolna funkcja $P\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$, *taka że* $P(x) \neq P(y)$, *jeśli* x *i* y *różnią się na dokładnie jednej pozycji.*

Fakt

Oczywiście dla każdej restrykcji ρ, $P|_\rho$ *nie jest funkcją stałą (bo* ρ *zawiera jakąś gwiazdkę).*

Funkcje parzystości

Definicja

Funkcja parzystości to dowolna funkcja $P\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$*, taka że* $P(x) \neq P(y)$*, jeśli* x *i* y *różnią się na dokładnie jednej pozycji.*

Fakt

Oczywiście dla każdej restrykcji ρ*,* $P|_\rho$ *nie jest funkcją stałą (bo* ρ *zawiera jakąś gwiazdkę).*

Wniosek

Dla każdej funkcji parzystości P*, nie istnieje uogólniony obwód logiczny* C*, obliczający* P*.*

Dziękujemy za uwagę.