Wprowadzenie do zgrubnej geometrii

Michał Skrzypczak

20 lutego 2008

Spis treści

Streszczenie

Poniższy referat ma na celu popularyzację zgrubnej geometrii. Przedstawiam tu podstawowe pojęcia i intuicje związane z tą dziedziną. Zarysowane są również źródła jej pochodzenia i rozmaite zastosowania.

1 Wstęp

Topologia skutecznie bada przestrzenie metryczne, jednak koncentruje się ona na ich lokalnych własnościach. Dlatego też staje się ona zupełnie nieskuteczna, gdy dana przestrzeń jest dyskretna (składa się z izolowanych punktów). Jednak takie dyskretne przestrzenie metryczne nie są wszystkie jednakowe (np. $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}^2$). By dostrzec między nimi różnice należy skupić się na ich globalnym „kształcie", zamiast na lokalnych własnościach. W dalszej części referatu postaram się wskazać przykłady dyskretnych przestrzeni metrycznych, dla których cenne jest badanie ich globalnej struktury.

Jednym z pionierów zgrubnego podejścia do geometrii (oraz geometrycznego podejścia do matematyki :) jest rosyjski matematyk Michaił Leonidowicz Gromov. Korzystając z pojęć zgrubnej geometrii dokonał on istotnych odkryć w takich dziedzinach, jak geometryczna teoria grup, geometria rozmaitości, równania różniczkowe cząstkowe.

2 Przestrzenie metryczne

Zaczniemy od zgrubnego spojrzenia na przestrzenie metryczne. W dodatku A przypomniane zostają podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni metrycznych.

Zdefiniujmy jakie funkcje zachowują zgrubne własności przestrzeni.

Definicja 2.1. *Dla X, Y przestrzeni metrycznych, oraz funkcji $f\colon X \to Y$ niekoniecznie ciągłej, mówimy że f jest*

- *metrycznie właściwa (ang. proper), gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych, są ograniczone,*
- *bornologiczna (ang. bornologous) jeśli*

$$\forall_{R>0}\exists_{S>0}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S,$$

- *zgrubna (ang. coarse), jeśli spełnia obie powyższe własności.*

Chodzi nam o to by funkcje zgrubne zachowywały globalny „kształt" przestrzeni. W związku z tym nie powinny jej zgniatać (metryczna właściwość), ani przesadnie rozciągać w żadnym kierunku (bornologiczność).

Pora na kilka przykładów:

- inwersja na przestrzeni $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ nie jest ani właściwa, ani bornologiczna,
- $n \mapsto 0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nie jest właściwa, ale jest bornologiczna,
- $n \mapsto n^2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest właściwa, ale nie bornologiczna,
- $x \mapsto \lfloor x \rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ jest zgrubna.

W pewnym sensie analogicznie do definicji równoległych funkcji homotopijnych w topologii, wprowadzamy następujące definicje.

Definicja 2.2. *Dwa przekształcenia f, g określone na dowolnym zbiorze X w przestrzeń metryczną Y są bliskie (ang. close) gdy zbiór*

$$\{d(f(x), g(x)) : \ x \in X\}$$

jest ograniczony.

Jeśli dwie funkcje spełniają powyższą definicję, to patrząc na nie z dostatecznie daleka wydają się być jednym i tym samym przekształceniem.

Definicja 2.3. *Dwie przestrzenie metryczne X, Y są zgrubnie równoważne (ang. coarsely equivalent) gdy istnieją funkcje zgrubne $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$, takie że ich złożenia są bliskie identycznościom.*

Oczywiście zgrubna równoważność jest relacją równoważności na klasie przestrzeni metrycznych.

Elegancka charakteryzacja zgrubnych równoważności jest podana w pracach [1], [5]. Do naszych zastosowań wystarczy powyższa definicja.

Jeżeli interesują nas tylko topologiczne własności przestrzeni metrycznej, możemy zastąpić daną metrykę d, przez $d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$, a topologia pozostanie ta sama. Niestety postępując w ten sposób tracimy kluczowe informacje na temat rozmiaru i globalnych własności naszej przestrzeni.

Zgrubna geometria podchodzi do rzeczy dokładnie odwrotnie.

Fakt 2.4. *Dla danej przestrzeni metrycznej (X, d), zdefiniujmy*

$$d'(x, y) = \max(d(x, y), 1), \quad d'(x, x) = 0.$$

Wtedy (X, d') jest przestrzenią metryczną i para funkcji $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X$ jest zgrubną równoważnością przestrzeni $(X, d), (X, d')$.

Jako proste ćwiczenie pozostawiam wykazanie poniższych faktów.

Fakt 2.5. *Przestrzenie $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne dla $n = 1, 2, \ldots,$*

Fakt 2.6. *Dowolna przestrzeń metryczna ograniczona jest zgrubnie równoważna przestrzeni jednopunktowej.*

3 Abstrakcyjne przestrzenie zgrubne

Przy wprowadzaniu zgrubnej geometrii postępujemy podobnie jak w topologii. Zaczynamy od badań przestrzeni metrycznych, później zaś definiujemy abstrakcyjną przestrzeń zgrubną, która jest niezależna od metryki, natomiast może być przez nią indukowana.

Definicja 3.1. *Parę $(X, \mathcal{E})$ nazywamy przestrzenią zgrubną, jeśli $\mathcal{E}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X \times X$, czyli $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{P}(X \times X)$, $\mathcal{E} \neq \emptyset$, oraz dla każdych $E, F \in \mathcal{E}$, spełnione są następujące warunki:*

1. $\{(x, x) : x \in X\} \in \mathcal{E}$,

2. $\forall_{E' \subseteq E} E' \in \mathcal{E}$*,*

3. $E^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in E\} \in \mathcal{E}$*,*

4. $E \circ F = \{(x,z) : \exists_{y \in X}(x,y) \in E \wedge (y,z) \in F\} \in \mathcal{E}$*,*

5. $E \cup F \in \mathcal{E}$*.*

Powyższe warunki mogą się wydawać wzięte z kosmosu, jednak najbliższe definicje powinny rzucić trochę światła.

Definicja 3.2. *Zgrubną strukturą na* X *indukowaną przez metrykę* d *nazywamy*

$$\mathcal{E} = \{E \subseteq X \times X : \sup_{(x,y) \in E} d(x,y) < \infty\}.$$

Definicja 3.3. *Dla dowolnego zbioru* S *i przestrzeni zgrubnej* $(X, \mathcal{E})$*, powiemy że funkcje* $f, g \colon S \to X$ *są bliskie, jeśli* $(f \times g)(S) = \{(f(s), g(s)) : s \in S\} \in \mathcal{E}$*.*

Widzimy, że jeśli struktura zgrubna na X jest indukowana z metryki d, to powyższa definicja bliskości funkcji pokrywa się z poprzednią, bo $\{(f(s), g(s)) : s \in S\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \sup_{s \in S} d(f(s), g(s)) < \infty$.

Na warunki na strukturę zgrubną można spojrzeć z powyższej perspektywy.

1. Funkcje $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X$ powinny być bliskie,
2. jeśli dwie funkcje $f, g \colon S \to X$ są bliskie, to dla $S' \subseteq S$, również $f|_{S'}, g|_{S'}$ są bliskie,
3. relacja bliskości jest symetryczna,
4. relacja bliskości jest przechodnia,
5. dla $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, jeśli $f_1, g_1 \colon S_1 \to X$ są bliskie i tak samo $f_2, g_2 \colon S_2 \to X$, to również $f_1 \cup f_2, g_1 \cup g_2 \colon S_1 \cup S_2 \to X$ są bliskie.

Definicja 3.4. *Dla danej przestrzeni zgrubnej* $(X, \mathcal{E})$*, powiemy że* $A \subseteq X$ *jest ograniczony jeśli* $A \times A \in \mathcal{E}$*.*

Definicja 3.5. *Dla przestrzeni zgrubnych* $(X, \mathcal{E}), (Y, \mathcal{F})$*, oraz funkcji* $f \colon X \to Y$*, powiemy że* f *jest bornologiczna jeśli* $(f \times f) \colon X \times X \to Y \times Y$ *spełnia warunek*

$$\forall_{E \in \mathcal{E}} (f \times f)(E) \in \mathcal{F},$$

Powyższy ciąg definicji pokazuje jak zdefiniować bliskość funkcji, zbiory ograniczone, funkcje bornologiczne, a co za tym idzie funkcje właściwe, zgrubne i zgrubną równoważność na abstrakcyjnych przestrzeniach zgrubnych.

Definicja 3.6. *Powiemy, że przestrzeń zgrubna* $(X, \mathcal{E})$ *jest (zgrubnie) spójna, jeśli dla każdych* $x, y \in X$*, zachodzi* $(x, y) \in \mathcal{E}$*.*

Przestrzeń metryczna (z metryką skończoną) zawsze jest zgrubnie spójna. Pojęcie zgrubnej spójności jest równoważne spójności łukowej w przypadku metryki geodezyjnych na rozmaitości Riemanna.

Najciekawsze i najczęstsze są przypadki gdy struktura zgrubna pochodzi od metryki. Jako ćwiczenie warto sprawdzić, że w przypadku struktury zgrubnej pochodzącej od metryki, powyższe definicje pokrywają się z definicjami z rozdziału 2.

4 Grupy

Zgrubna geometria w znacznej mierze zajmuje się badaniem globalnych – zgrubnych własności grup. W dodatku B znajduje się szybkie wprowadzenie używanych pojęć z teorii grup.

Zacznijmy od zdefiniowania normy i metryki na dowolnej grupie.

Definicja 4.1. *Niech G grupa generowana przez F. Niech $g \in G$. Wtedy g rozpisuje się na przynajmniej jeden sposób jako $f_1 f_2 f_3 \dots f_n$, dla $f_i^{\pm 1} \in F$. Definiujemy $||g||$ jako najmniejsze ze wszystkich n w rozpisaniach jak powyżej.*

Zauważmy, że $||e|| = 0$ dla $f \in F$ $||f|| = 1$, oraz dla $g, h \in G$ $||gh|| \leqslant ||g|| + ||h||$. Zdefiniujmy metrykę na G.

Definicja 4.2. *Dla grupy G generowanej przez F definiujemy metrykę*

$$d(g, h) = ||gh^{-1}||.$$

Łatwo wykazać, że powyżej faktycznie zdefiniowaliśmy metrykę. Ponadto dla dowolnych $f, g, h \in G$ zachodzi następujący wzór

$$d(g, h) = ||gh^{-1}|| = ||gff^{-1}h^{-1}|| = ||(gf)(hf)^{-1}|| = d(gf, hf).$$

Czyli metryka ta jest niezmiennicza ze względu na wymnażanie z prawej strony przez elementy grupy. Tak zdefiniowaną metrykę nazywamy metryką długości słowa.

Dla dowolnej skończenie generowanej grupy G (ze zbiorem generatorów F), można zdefiniować tzw. graf Cayleya G. Jest to graf nieskierowany, w którym wierzchołki to elementy grupy G, natomiast istnieje krawędź (g, f), gdy $(gf^{-1})^{\pm 1} \in F$. Warto narysować grafy Cayleya grup $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n$, grupy wolnej o dwóch generatorach.

Zauważmy, że metryka długości słowa na grupie skończenie generowanej G, pokrywa się z metryką najkrótszej ścieżki w grafie Cayleya G.

Dosyć zaskakującym „królikiem z kapelusza” może się wydawać następujący fakt.

Fakt 4.3. *Niech grupa G będzie generowana przez dwa skończone zbiory generatorów F_1, F_2. Niech d_1, d_2 to metryki długości słowa na G pochodzące od F_1, F_2 odpowiednio. Wtedy przestrzenie metryczne $(G, d_1), (G, d_2)$ są zgrubnie równoważne.*

Dowód powyższego faktu nie jest bardzo skomplikowany, wystarczy zauważyć, że każdy element F_2 daje się uzyskać poprzez wymnożenie pewnej ilości elementów F_1. A ponieważ F_2 jest zbiorem skończonym, możemy ograniczyć z góry, ile co najwyżej elementów F_1 potrzeba wziąć by uzyskać dowolny element F_2. Wobec tego $d_2(g, h)$ szacuje się z jakąś stałą przez $d_1(g, h)$. I vice-versa.

Powyższy fakt pokazuje, że jeśli patrzymy na skończenie generowaną grupę G ze zgrubnego punktu widzenia, nie jest istotny wybór zbioru generatorów.

W dodatku C znajduje się krótkie wprowadzenie do grup podstawowych. Okazuje się, że dla większości badanych przestrzeni topologicznych, ich grupy podstawowe są skończenie generowane. Dzięki temu metody zgrubnej geometrii (poprzez metrykę długości słowa na grupie podstawowej), można wykorzystywać przy badaniu klas homotopii przestrzeni topologicznych.

5 Wymiar asymptotyczny

Aby poznać szybkość rozszerzania się przestrzeni „daleko od środka" zdefiniujemy pojęcie wymiaru asymptotycznego. Intuicyjnie będzie to liczba mówiąca w ilu niezależnych kierunkach przestrzeń ucieka do nieskończoności. Zostało wykazane (patrz [2]), że pewne hipotezy dotyczące grup skończenie generowanych są prawdziwe, gdy wymiar asymptotyczny danej grupy jest skończony.

Definicja 5.1. *Powiemy że zbiory U_1, U_2 zawarte w przestrzeni metrycznej (X, d) są L-rozłączne, jeśli*

$$d(U_1, U_2) \geqslant L.$$

Definicja 5.2. *Przestrzeń metryczna X ma wymiar asymptotyczny co najwyżej n (ozn. $\mathrm{asdim} X \leqslant n$), jeśli dla każdego $L > 0$ istnieją rodziny podzbiorów X $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$, takie że*

- *dla każdego $0 \leqslant i \leqslant n$ zbiory w rodzinie $\mathcal{U}_i$ są parami L-rozłączne,*
- *wszystkie elementy w sumie tych rodzin $\mathcal{U} = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathcal{U}_i$ mają wspólnie ograniczoną z góry średnicę, czyli*

$$\exists_{D \in \mathbb{R}} \forall_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{diam} U < D,$$

- *$\bigcup \mathcal{U} = X$, czyli w sumie wszystkie elementy $\mathcal{U}$ pokrywają X.*

Oczywiście powiemy, że X ma wymiar asymptotyczny n jeśli $\mathrm{asdim} X \leqslant n$, oraz nie jest prawdą, że $\mathrm{asdim} X \leqslant n - 1$.

Można wykazać, że wymiar asymptotyczny jest niezmienniczy ze względu na zgrubną równoważność. Istnieją przestrzenie X, które nie mają skończonego wymiaru asymptotycznego, wtedy określamy $\mathrm{asdim} X = \infty$.

Jak można się spodziewać $\mathrm{asdim} \mathbb{R}^n (= \mathrm{asdim} \mathbb{Z}^n) = n$.

6 Dodatki

A Przestrzenie metryczne

Definicja A.1. *Przestrzenią metryczną, nazywamy zbiór X, wraz z odwzorowaniem $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ takim, że dla każdych $x, y, z \in X$:*

1. $d(x, y) \geqslant 0$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Definicja A.2. *Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(a,b)\in A^2} d(a, b).$$

Czasami będziemy używać pojęcia odległości zbiorów. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $A, B \subseteq X$ to niepuste jej podzbiory. Wtedy definiuje się

$$d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a, b).$$

B Teoria grup

Definicja B.1. *Zbiór G, wraz ze stałą $e \in G$, oraz działaniami: jednoargumentowym $-^{-1}$ (element odwrotny), oraz dwu-argumentowym $- \cdot -$ (mnożenie), nazywamy grupą gdy dla każdych $g, f, h \in G$, zachodzi*

- $e \cdot g = g \cdot e = x$ — *e jest elementem neutralnym mnożenia*
- $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ — *g^{-1} jest elementem odwrotnym do g,*
- $g \cdot (f \cdot h) = (g \cdot f) \cdot h$ — *mnożenie jest łączne.*

Ponieważ działanie grupowe $- \cdot -$ jest łączne i traktujemy je analogicznie do mnożenia, będziemy pomijać znak $\cdot$ i pisać po prostu gh.

Najczęstsze przykłady grup, to zbiory rozmaitych permutacji ustalonego zbioru X, wraz z identycznością, przekształceniem odwrotnym i składaniem przekształceń.

Twierdzenie Cayleya (patrz [4]) mówi, że każda grupa może być traktowana jako zbiór bijekcji pewnego zbioru (konkretnie zbioru elementów tej grupy).

Definicja B.2. *Dla dowolnych grup G, H powiemy że funkcja $f\colon G \to H$ jest homomorfizmem grup, jeśli f zachowuje strukturę grupy, czyli dla każdych $a, b \in G$*

- $f(e) = e$,

- $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$,
- $f(ab) = f(a)f(b)$.

Definicja B.3. *Dla danej grupy G i $G' \subseteq G$, powiemy że G' jest podgrupą G jeśli $e \in G'$, oraz dla każdych $f, g \in G'$, $f \cdot g, g^{-1} \in G'$, czyli G' jest zamknięta ze względu na działania.*

Oczywiście dla dowolnej grupy G, jej podgrupami są G, oraz $\{e\}$.

Przy okazji warto wspomnieć o teoriomnogościowym fakciku.

Fakt B.4. *Dla danej grupy G i dowolnej rodziny jej podgrup $\{F_i\}_{i\in I}$, zbiór $\bigcap_{i\in I} F_i$ jest podgrupą G.*

Fakt B.5. *Dla dowolnego zbioru $F \in G$, istnieje najmniejsza podgrupa G, zawierająca F, oznaczana $< F >$. Powstaje ona przez przecięcie wszystkich podgrup G, zawierających F. Grupę tą nazywamy grupą generowaną przez zbiór generatorów F.*

Fakt B.6. *Alternatywny opis podgrupy generowanej przez F w G to wszystkie takie elementy G, które powstają jako wymnożenie skończenie wielu składników (lub odwrotności składników) zbioru F.*

Przykład B.7. *Liczby rzeczywiste wraz z 0 jako elementem neutralnym, liczbą przeciwną i dodawaniem stanowią grupę. Podgrupa $\mathbb{R}$ generowana przez $\{2\}$ to wszystkie parzyste liczby całkowite. Podgrupa generowana przez zbiór $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ to liczby wymierne. Liczby całkowite są generowane przez $\{1\}$, ale też $\{1, 10\}, \{2, 3\}, \mathbb{N}, \ldots$.*

Definicja B.8. *Mówimy, że F to zbiór generatorów G (G jest generowana przez F), jeśli podgrupa generowana przez F w G to G.*

Definicja B.9. *Grupa G jest skończenie generowana jeśli posiada skończony zbiór generatorów.*

Definicja B.10. *Powiemy, że grupa G jest wolna nad zbiorem generatorów $F \subseteq G$, jeśli zbiór F generuje G i każdy nietrywialny (różny od e) element G rozpisuje się jednoznacznie jako wymnożenie składników (lub odwrotności składników) z F (oczywiście jednoznacznie po skróceniu wszystkich napisów postaci ff^{-1}, lub $f^{-1}f$).*

Poniższy fakt to bardziej abstrakcyjna definicja grupy wolnej.

Fakt B.11. *Dla danego zbioru $F \subseteq G$ powiemy, że G jest wolna nad zbiorem generatorów F, jeśli dla dowolnej grupy G' oraz funkcji $f\colon F \to G'$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $\phi\colon G \to G'$ taki, że $\phi|_F = f$.*

Grupy wolne to bardzo szczególny rodzaj grup. O ile nie zostanie zaznaczone inaczej należy zakładać, że dana grupa nie jest wolna.

Przykład B.12. *$\mathbb{Z}$ z dodawaniem jest wolna nad $\{-1\}$, natomiast nie jest wolna nad $\{1, 7\}$. Żadna grupa skończona, oprócz trywialnej $\{e\}$ nie może być wolna nad żadnym zbiorem generatorów. Załóżmy przeciwnie, że $f \in F$, F to zbiór generatorów G i G-wolna nad F. Wtedy $f, ff, fff, \ldots$ to parami różne elementy G. Więc G jest przynajmniej przeliczalna.*

C Grupy podstawowe

Wstępnym pojęciem topologii algebraicznej jest *grupa podstawowa*.

Definicja C.1. *Niech X to łukowo spójna przestrzeń topologiczna. Pętlą w X zaczepioną w x_0 nazywamy funkcję ciągłą $f\colon [0,1] \to X$, taką że $f(0) = f(1) = x_0$.*

Pętle można traktować jako „spacery" po przestrzeni: startujemy z x_0 w chwili 0, idziemy, idziemy i po godzinie wracamy do x_0.

Spacery takie można odwracać (idziemy tyłem od końca), oraz składać (najpierw robimy pierwszy spacer w pół godziny, a potem drugi). Oczywiście istnieje spacer „neutralny" czyli taki w którym cały czas stoimy w miejscu.

Definicja C.2. *Dwie pętle w X f, g uważamy za homotopijne, jeśli istnieje przekształcenie ciągłe $H\colon [0,1]^2 \to X$ takie, że $H(.,0) = f$ i $H(.,1) = g$.*

Utożsamiamy dwa spacery jeśli są homotopijne.

Definicja C.3. *Grupą podstawową łukowo spójnej przestrzeni topologicznej X (z wyróżnionym punktem $x_0 \in X$) nazywamy grupę pętli zaczepionych w x_0 z pętlą stałą, odwracaniem pętli i ich składaniem. (Tak naprawdę nie pętle są elementami grupy, tylko klasy abstrakcji względem relacji homotopijności, ale to drobiazg).*

Grupa podstawowa sfery to grupa trywialna $\{e\}$, okręgu to $\mathbb{Z}$, torusa to $\mathbb{Z}^2$, natomiast ósemki to grupa wolna o dwóch generatorach. Wszystkie te grupy są skończenie generowane.

Jednym z zastosowań zgrubnej geometrii jest badanie grup podstawowych przestrzeni. Przykładowy wynik w tej dziedzinie, to fakt, że uniwersalne nakrycie przestrzeni zwartej X jest zgrubnie równoważne jej grupie podstawowej.

Literatura

[1] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003), s 3–7.

[2] G. Bell, A. Dranishnikov, *On asymptotic dimension of groups*, Algebraic & Geometric Topology, Volume 1 (2001), s 57—71

[3] B. Grave, *Coarse geometry and asymptotic dimension*, Gottingen 2005.

[4] C. Bagiński, *Wstęp do teorii grup*, Script, Warszawa 2002.

[5] M. Skrzypczak, *Zgrubne spojrzenie na przestrzenie metryczne*, http://students.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/referat_prosem.pdf