Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Skrzypczak
Nr albumu: 234587

Zgrubna równoważność przestrzeni metrycznych

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Tadeusza Koźniewskiego
Instytut Matematyki

Kwiecień 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Poniższa praca omawia tematykę zgrubnej równoważności. Głównym obiektem zainteresowań są przestrzenie metryczne, jednakże większość prezentowanych wyników przenosi się na ogólne przestrzenie zgrubne. Podane są różnorodne sposoby wykazywania zgrubnej równoważności, lub jej braku, zaprezentowane są korzyści płynące z operowania pojęciem zgrubnej równoważności. Ponadto, zdefiniowana zostaje kategoria metrycznych przestrzeni zgrubnych **CorSpace**, zbadane są jej podstawowe własności, wiele faktów znajduje prostą kategoryjną interpretację.

Słowa kluczowe

zgrubna geometria, zgrubna równoważność, przestrzenie metryczne

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

54E40 Special maps on metric spaces

Tytuł pracy w języku angielskim

Coarse equivalence of metric spaces

Spis treści

Wprowadzenie

Zgrubna geometria pozwala badać globalną strukturę przestrzeni. Dobrą intuicją jest stwierdzenie, że dziedzina ta pozwala patrzeć na przestrzenie metryczne „z dalekiej perspektywy”. Wiele z zastosowań zgrubnej geometrii dotyczy przestrzeni metrycznych. Jak w każdej dziedzinie, jednym z podstawowych pojęć zgrubnej geometrii jest pojęcie równoważności, które opisuje jakie obiekty uważamy za jednakowe. W poniższej pracy zaprezentowane są podstawowe pojęcia i konstrukcje zgrubnej geometrii, dokonana jest analiza własności zgrubnej równoważności oraz zdefiniowana jest kategoria metrycznych przestrzeni zgrubnych **CorSpace**.

Istotnym wzbogaceniem pracy są własne przykłady, kontrprzykłady, twierdzenia i fakty pomocnicze. Są to między innymi:

- dowód równoważności pomiędzy strukturami zgrubnymi na danej przestrzeni, a odpowiednimi klasami relacji równoważności na funkcjach w tę przestrzeń,
- wprowadzenie pojęcia lokalnego podstawienia - konkretnego rodzaju zgrubnej równoważności,
- dowód faktu o faktoryzacji zgrubnych równoważności przez lokalne podstawienia i efektywnie zgrubną bijekcję,
- wprowadzenie pojęć liczby spójnych składowych w nieskończoności i liczby spójnych składowych - niezmienników zgrubnej równoważności,
- prezentacja przykładów nieskończonych rodzin zbiorów parami zgrubnie nie równoważnych w przestrzeniach $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ dla $n > 1$,
- wprowadzenie pojęcia kategorii zgrubnych przestrzeni metrycznych **CorSpace**,
- analiza podstawowych pojęć teorii kategorii w kategorii **CorSpace**.

Dzięki szerokiemu wachlarzowi prezentowanych treści, praca może stanowić wprowadzenie do badania zgrubnych własności przestrzeni metrycznych.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia zgrubnej geometrii

W ramach zgrubnej geometrii badane są głównie przestrzenie metryczne. Jednak wykształcony został również aparat pojęciowy pozwalający określić abstrakcyjną strukturę zgrubną na dowolnym zbiorze. Treści zostaną zaprezentowane w tej kolejności: najpierw ogólne pojęcia dotyczące przestrzeni metrycznych, następnie zgrubne spojrzenie na te właśnie przestrzenie, wreszcie abstrakcyjna definicja zgrubnej przestrzeni i sposoby konstrukcji tych obiektów.

1.1. Wstęp

Przyjmijmy, że X jest dowolną ustaloną przestrzenią metryczną. O ile nie jest zaznaczone inaczej, zakłada się, że metryka d na X może przyjmować również wartość $+\infty$. Zdefiniowane zostaną proste pojęcia wykorzystywane w reszcie pracy.

Definicja 1.1. *Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy $\sup_{x,y \in A} d(x,y)$ i oznaczamy $\operatorname{diam}(A)$.*

Definicja 1.2. *Zbiór $B \subseteq X$ nazwiemy ograniczonym, gdy $\operatorname{diam}(B) < \infty$.*

Definicja 1.3. *Poprzez d-ścieżkę o początku $a \in X$ i końcu $b \in X$, dla ustalonego $d > 0$, oznaczam ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$, taki że*

- $x_0 = a$,
- $x_n = b$,
- $\forall_{0 \leqslant i < n} d(x_i, x_{i+1}) < d$.

Definicja 1.4. *Podzbiór $A \subseteq X$ nazywam d-ścieżkowo spójnym, dla ustalonego $d > 0$, gdy każde dwa punkty $a, b \in A$ dają się połączyć d-ścieżką w A.*

Oprócz odległości punktów, rozpatrywane będą również odległości pomiędzy zbiorami. Przez $d(A,B)$ oznaczane jest $\inf_{a \in A, b \in B} d(a,b)$.

Definicja 1.5. *Przestrzeń metryczną X nazwiemy zgrubnie spójną, jeśli metryka na X przyjmuje tylko wartości skończone.*

1.2. Zgrubna geometria przestrzeni metrycznych

Poniżej zostaną zaprezentowane podstawowe definicje i konstrukcje zgrubnej geometrii przestrzeni metrycznych.

Definicja 1.6. *Dla X, Y przestrzeni metrycznych, oraz funkcji $f\colon X \to Y$ niekoniecznie ciągłej, mówimy że f jest*

- *właściwa (ang. proper), gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych, są ograniczone,*
- *bornologiczna (ang. bornologous) jeśli*

$$\forall_{R>0} \exists_{S>0}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S,$$

- *zgrubna (ang. coarse), jeśli spełnia obie powyższe własności.*

Warunek na bornologiczność danej funkcji, można nieco uprościć korzystając z pewnika wyboru. Prezentuje to poniższy fakt.

Fakt 1.7. *Warunek, by funkcja $f\colon X \to Y$ była bornologiczna, jest równoważny następującemu stwierdzeniu*

$$\exists_{b\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+} \forall_{R>0}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < b(R).$$

Funkcja b nazywana jest funkcją bornologiczności f.

Dowód. Gdy funkcja jest bornologiczna, to zależność $\forall_{R>0} \exists S > 0 ...$, można zamienić na $\exists_{b\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+} \forall_{R>0} \exists_{S=b(R)} ...$ korzystając z pewnika wyboru. Z kolei, gdy $f\colon X \to Y$ spełnia podany warunek to jest bornologiczna, bo dla każdego $R > 0$ istnieje $S = b(R)$, takie że dla x, y takich że $d(x,y) < R$, mamy $d(f(x), f(y)) < b(R) = S$. ■

Poniżej podane jest kilka przykładów ilustrujących wprowadzone definicje.

- inwersja na przestrzeni $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ nie jest ani właściwa, ani bornologiczna,
- $n \mapsto 0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nie jest właściwa, ale jest bornologiczna,
- $n \mapsto n^2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest właściwa, ale nie bornologiczna,
- $x \mapsto \lfloor x \rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ jest zgrubna, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x.

Aby precyzyjniej operować wprowadzanymi pojęciami, konieczne jest określenie jakie funkcje i przestrzenie uznawane są za jednakowe ze zgrubnego punktu widzenia.

Definicja 1.8. *Dwa przekształcenia f, g określone na dowolnym zbiorze S w przestrzeń metryczną Y są bliskie (ang. close) gdy zbiór $\{d(f(x), g(x)) : x \in S\}$ jest ograniczony.*

Definicja 1.9. *Dwie przestrzenie metryczne X, Y są zgrubnie równoważne (ang. coarsely equivalent) gdy istnieją funkcje zgrubne $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$, takie że ich złożenia są bliskie identycznościom.*

Oczywiście zgrubna równoważność jest relacją równoważności na klasie przestrzeni metrycznych. Liczne przykłady (i kontr-przykłady) zgrubnych równoważności zostaną podane w rozdziale 2.3.

Definicja 1.10. *Funkcję zgrubną $f\colon X \to Y$ nazwiemy zgrubną równoważnością, jeśli istnieje funkcja zgrubna $g\colon Y \to X$ taka, że złożenia $f \circ g, g \circ f$ są bliskie odpowiednim identycznościom.*

Wyróżniony jest szczególny rodzaj funkcji, które spełniają mocniejszy warunek aniżeli właściwość. Prezentuje to poniższa definicja.

Definicja 1.11. *Funkcję $f\colon X \to Y$ nazwiemy efektywnie właściwą, jeśli*

$$\forall_{R>0} \exists_{S>0}\ d(f(x), f(y)) < R \Rightarrow d(x, y) < S.$$

Podobnie jak warunek bornologiczności, tak samo warunek efektywnej właściwości można uprościć. Zaprezentowane jest to w poniższym fakcie.

Fakt 1.12. *Funkcja f jest efektywnie właściwa, wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\exists_{p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+} \forall_{R>0}\ d(f(x), f(y)) < R \Rightarrow d(x, y) < p(R).$$

Funkcja p nazywana jest funkcją efektywnej właściwości f.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak w fakcie 1.7. ∎

Oczywiście każda funkcja efektywnie właściwa, jest właściwa. Poniższy przykład dowodzi, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi.

Przykład 1.13. *Funkcja $\sqrt{x}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jest właściwa, ale nie jest efektywnie właściwa.*

Pojęcie funkcji zgrubnej można wzmocnić. Funkcja efektywnie zgrubna, to funkcja bornologiczna i efektywnie właściwa. Warto zwrócić uwagę, że efektywnie zgrubna bijekcja posiada efektywnie zgrubną funkcję odwrotną. Ponadto obcięcie funkcji (efektywnie) zgrubnej do podzbioru dziedziny daje funkcję (efektywnie) zgrubną.

Definicja 1.14. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej X nazwiemy d-gęstym w X, dla danego $d > 0$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in X$, $d(x, A) < d$. Podzbiór $A \subseteq X$ jest zgrubnie gęsty w X, jeśli istnieje $d > 0$, takie że A jest d-gęste w X.*

1.3. Abstrakcyjne przestrzenie zgrubne

Zgrubna geometria, podobnie jak topologia, posiada aparat pojęciowy pozwalający wprowadzić strukturę zgrubną na dowolnej (nie koniecznie metrycznej) przestrzeni. W tym celu wprowadza się pojęcie rodziny zbiorów kontrolowanych.

Definicja 1.15. *Rodzinę $\mathcal{E}$ podzbiorów zbioru $X \times X$ nazywamy rodziną zbiorów kontrolowanych na X, gdy dla każdych $E, F \in \mathcal{E}$, spełnione są następujące warunki:*

1. $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \in \mathcal{E}$,
2. $\forall_{E' \subseteq E}\ E' \in \mathcal{E}$,
3. $E^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in E\} \in \mathcal{E}$,
4. $E \circ F = \{(x, z) : \exists_{y \in X}\ (x, y) \in E \wedge (y, z) \in F\} \in \mathcal{E}$,
5. $E \cup F \in \mathcal{E}$.

Definicja 1.16. *Przestrzenią zgrubną nazywam parę $(X, \mathcal{E})$, gdzie X to dowolny zbiór, a $\mathcal{E}$ to rodzina zbiorów kontrolowanych na X.*

Najprostszą z przestrzeni zgrubnych jest przestrzeń pusta $(\emptyset, \emptyset)$. Inny trywialny przypadek to przestrzeń jednopunktowa $(\{\bullet\}, \{\{(\bullet, \bullet)\}, \emptyset\})$. Różnorodne sposoby, jak zadać strukturę zgrubną na danym zbiorze, zostały podane w rozdziale 1.4.

W oparciu o rodzinę zbiorów kontrolowanych można zdefiniować w sposób analogiczny do przypadku metrycznego większość pojęć z rozdziału 1.2.

Definicja 1.17. *Dla dowolnego zbioru S, oraz przestrzeni zgrubnej $(X, \mathcal{E})$, powiemy że funkcje $f, g\colon S \to X$ są bliskie, gdy $(f \times g)(S) \in \mathcal{E}$.*

Definicja 1.18. *Przestrzeń zgrubną $(X, \mathcal{E})$ nazwiemy ograniczoną, jeśli $X \times X \in \mathcal{E}$.*

W niektórych definicjach zgrubnej geometrii przydają się następujące operacje na zbiorach kontrolowanych.

Definicja 1.19. *Dla danego zbioru $E \subseteq X \times X$, oraz $A \subseteq X$, definiuje się*

$$E[A] = \{b \in X : \exists_{a \in A} (b, a) \in E\},$$

$$E^{-1}[A] = \{b \in X : \exists_{a \in A} (a, b) \in E\}.$$

Definicja 1.20. *Przestrzeń zgrubną $(X, \mathcal{E})$ nazwiemy zgrubnie spójną, gdy dla każdych $x, y \in X$, zachodzi $\{(x, y)\} \in \mathcal{E}$.*

Definicja 1.21. *Podzbiór B przestrzeni zgrubnej $(X, \mathcal{E})$ nazwiemy zgrubnie ograniczonym, gdy $B \times B \in \mathcal{E}$.*

1.4. Konstrukcje abstrakcyjnych przestrzeni zgrubnych

W poniższym rozdziale zaprezentowane są różnorodne sposoby, jak zadać strukturę zgrubną na danej przestrzeni w oparciu o jej pewne własności (metrykę, topologię, ...).

1.4.1. Metryczne przestrzenie zgrubne

Dla dowolnej przestrzeni metrycznej, można zdefiniować na niej strukturę zgrubną, tak by definicje z rozdziału 1.3 pokrywały się z tymi z rozdziału 1.2.

Definicja 1.22. *Dla danej przestrzeni metrycznej (X, d), rodziną zbiorów kontrolowanych indukowaną z metryki d nazwiemy*

$$\mathcal{E}_d = \left\{ E \subseteq X \times X : \sup_{(x,y) \in E} d(x, y) < \infty \right\}.$$

Jak łatwo sprawdzić, rodzina $\mathcal{E}_d$ faktycznie jest rodziną zbiorów kontrolowanych na X. Przy dowodzie tego faktu korzysta się z symetryczności metryki, nierówności trójkąta, oraz monotoniczności operacji sup ze względu na zbiór po którym jest ono brane.

Można również wykazać, że definicje bliskości par funkcji, oraz ograniczoności przestrzeni naturalnie przenoszą się z przestrzeni metrycznej na utworzoną przestrzeń zgrubną.

Warto zauważyć, że dla dowolnego zbioru kontrolowanego $E \in \mathcal{E}_d$, oraz zbioru ograniczonego $B \subseteq X$, zbiory $E[B], E^{-1}[B]$ są ograniczone.

1.4.2. Topologiczne przestrzenie zgrubne

Podobnie jak w powyższym rozdziale, również dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{O})$ istnieje struktura zgrubna na X, indukowana przez topologię $\mathcal{O}$.

Przy wprowadzeniu powyższej struktury przydaje się następująca definicja.

Definicja 1.23. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X nazwiemy prezwartym, gdy domknięcie A w X jest zwarte.*

Definicja 1.24. *Dla danej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{O})$,przez rodzinę zbiorów kontrolowanych indukowaną z topologii $\mathcal{O}$, nazwiemy rodzinę $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ wszystkich takich zbiorów $E \subseteq X \times X$, że dla każdego zbioru prezwartego $B \subseteq X$, $E[B], E^{-1}[B]$ są prezwarte.*

Jak łatwo sprawdzić, rodzina $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ faktycznie jest rodziną zbiorów kontrolowanych, przy dowodzie korzysta się z faktu, że suma dwóch zbiorów prezwartych też jest prezwarta.

Niestety, jeśli topologia na X podchodzi od metryki d, to rodziny $\mathcal{E}_d, \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ mogą być różne. Konkretnie $\mathcal{E}_d \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, jednak równość nie musi zachodzić. Na przykład jeśli $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}, d$ to odpowiednio naturalna topologia i naturalna metryka na $\mathbb{R}$, to zbiór $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2\}$ należy do rodziny $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, natomiast nie należy do $\mathcal{E}_d$. Źródło powyższego problemu to wymaganie wspólnego ograniczenia na $d(x, y)$ dla wszystkich $(x, y) \in E \in \mathcal{E}_d$. W przypadku przestrzeni topologicznej nie ma metody by wyrazić fakt, że pewne zbiory są wspólnie (jednostajnie) „małe".

1.4.3. Relacje bliskości funkcji

Gdy dana jest przestrzeń zgrubna $(X, \mathcal{E})$, to dla każdego zbioru S zadana jest relacja bliskości $\sim_S$ na rodzinie funkcji $S \to X$.

Korzystając z warunków jakie musi spełniać rodzina $\mathcal{E}$, łatwo sprawdzić, że klasa relacji $\sim$ zdefiniowana jak powyżej ma następujące własności:

1. Dla każdego zbioru S, $\sim_S$ jest relacją równoważności na zbiorze funkcji $S \to X$,
2. Dla dowolnego zbioru S i dowolnego $S' \subseteq S$, oraz $f, g \colon S \to X$, jeśli $f \sim_S g$, to $f|_{S'} \sim_{S'} g|_{S'}$.
3. Dla dowolnych zbiorów S_1, S_2, oraz funkcji $f_1, g_1 \colon S_1 \to X, f_2, g_2 \colon S_2 \to X$, spełniających $f_1 \sim_{S_1} g_1, f_2 \sim_{S_2} g_2$, mamy $f_1 \sqcup f_2 \sim_{S_1 \sqcup S_2} g_1 \sqcup g_2$, gdzie $\sqcup$ to operacja sumy rozłącznej.

Okazuje się, że postępowanie to można odwrócić. Wyrazem tego jest poniższy fakt.

Fakt 1.25. *Dowolna klasa relacji $\sim$ spełniająca powyższe trzy warunki zadaje rodzinę zbiorów kontrolowanych na X i pomiędzy klasami takich relacji, a rodzinami zbiorów kontrolowanych na X jest wzajemna jednoznaczność.*

Dowód.

- Weźmy dowolną klasę relacji $\sim$ spełniających powyższe warunki. Niech

$$\mathcal{E} = \{E \subseteq X \times X : \pi_1|_E \sim_E \pi_2|_E\}.$$

Pierwsze trzy warunki na to by tak zdefiniowane $\mathcal{E}$ było rodziną zbiorów kontrolowanych na X, wynikają natychmiast z faktu, że $\sim_E$ jest relacją równoważności. Pozostałe dwa warunki wynikają z ostatnich dwóch warunków jakie musi spełniać klasa relacji $\sim$.

- Fakt, że powyższa konstrukcja wyznacza wzajemną jednoznaczność pomiędzy rodzinami zbiorów kontrolowanych na X, a klasami relacji $\sim$, jest oczywistą konsekwencją następującej obserwacji: $(\pi_1|_E \times \pi_2|_E)(E) = \mathrm{id}_E(E) = E$, gdzie E to dowolny podzbiór $X \times X$.

$\blacksquare$

Rozdział 2

Zgrubna równoważność

Jak sama nazwa wskazuje, przestrzenie zgrubnie równoważne powinny mieć jednakowe zgrubne własności. Dlatego też badanie własności danej przestrzeni można uprościć, badając odpowiednie własności przestrzeni jej równoważnej. W związku z tym ważna jest możliwość wykazywania zgrubnej równoważności odpowiednich przestrzeni. Zadanie to powinno być możliwie proste. Z drugiej strony istotne jest, by wprowadzając nowe definicje i pojęcia zgrubnej geometrii, w sposób jak najbardziej standardowy i prosty wykazywać, że są one niezmiennicze ze względu na zgrubną równoważność.

2.1. Twierdzenia o zgrubnej równoważności

Poniżej zostaną zaprezentowane różnorodne twierdzenia i fakty, mówiące jak wykazać zgrubną równoważność danych przestrzeni metrycznych.

Twierdzenie 2.1. *Każda funkcja efektywnie zgrubna $f\colon X \to Y$, taka że $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y jest zgrubną równoważnością. Ponadto, jeśli $f'\colon X \to Y$ jest zgrubną równoważnością, to f' jest efektywnie zgrubna, oraz $f'(X)$ jest zgrubnie gęste w Y.*

Dowód.

- ($\Rightarrow$) f jest efektywnie właściwa, a $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y.

  Skoro f jest efektywnie zgrubna, to jest zgrubna.

  Niech $f(X)$ będzie d-gęste w Y. Definiuję $g\colon Y \to X$ w następujący sposób: niech $g(y) \in f^{-1}(z)$, gdzie $z \in f(X)$, oraz $d(y,z) < d$.

  Najpierw wykazana zostanie właściwość g. Weźmy dowolny zbiór ograniczony $B \subseteq X$, niech $\operatorname{diam}(B) < D$. Trzeba wykazać, że $g^{-1}(B)$ jest ograniczone. Niech b będzie funkcją bornologiczności f, niech $x \in B$. Wtedy dla każdego $x' \in B$, $d(x,x') < D$, ponadto $g^{-1}(x) \subseteq B(f(x),d)$. Niech $y \in g^{-1}(x), y' \in g^{-1}(x')$. Wtedy $d(y,y') \leqslant d(y,f(x)) + d(f(x),f(x')) + d(f(x'),y') < 2d + b(D)$. Więc $\operatorname{diam}(g^{-1}(B)) < 2d + b(D)$.

  Teraz wykazana będzie bornologiczność g. Weźmy dowolne $R > 0$, oraz $y, y' \in Y$, takie że $d(y,y') < R$. Wystarczy znaleźć stałą zależną tylko od R, która szacuje z góry $d(g(y),g(y'))$. Z definicji g istnieją $z, z' \in f(X)$, takie że $d(y,z) < d$ i $d(y',z') < d$, oraz $g(y) \in f^{-1}(z), g(y') \in f^{-1}(z')$. Niech p będzie funkcją efektywnej właściwości f. Wtedy skoro $d(z,z') < 2d + R$, więc $d(g(y),g(y')) < p(2d+R)$.

  Wykażę, że $g \circ f$ jest bliskie id_X. Niech p będzie funkcją efektywnej właściwości f. Oczywiście $d(f(g(f(x))),f(x)) < d$, wobec tego otrzymujemy $d(g(f(x)),x) < p(d)$.

Teraz pora wykazać, że $f \circ g$ jest bliskie id_Y. Jednak $d(f(g(y)), y) < d$ z definicji g.

- ($\Leftarrow$) f' jest zgrubną równoważnością.

  Niech $g' \colon Y \to X$ będzie funkcją odpowiadającą f' w definicji zgrubnej równoważności f'.

  Bliskość funkcji $f' \circ g', \mathrm{id}_Y \colon Y \to Y$ implikuje między innymi, że $(f' \circ g')(Y)$ jest zgrubnie gęsty w Y.

  Pozostaje wykazać efektywną właściwość f'. Niech $g' \circ f'$ będzie d-bliskie id_X.

  Weźmy dowolne $R > 0$ i $x, y \in f'(X)$. Niech $d(x, y) < R$, oraz $x = f'(a), y = f'(b)$. Wobec tego $d(g'(x), a) < d$, oraz $d(g'(y), b) < d$. Ponadto, niech b będzie funkcją bornologiczności g'. Wtedy $d(g'(x), g'(y)) < b(R)$. Z nierówności trójkąta $d(a, b) < 2d + b(R)$. Wobec tego $p(R) = 2d + b(R)$ jest funkcją efektywnej właściwości f'.

■

Powyższy dowód jest podstawą wielu przykładów i rozumowań prezentowanych w dalszej części pracy. Jednocześnie, korzystając z jego tezy można wykazać, że założenie o efektywnej właściwości f jest konieczne, by f była zgrubną równoważnością.

Fakt 2.2. *Nie jest prawdą, że każda funkcja zgrubna $f \colon X \to Y$, taka że $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y jest zgrubną równoważnością.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie. Wtedy każda funkcja $f \colon X \to Y$ której obraz jest zgrubnie gęsty w Y była by efektywnie zgrubna – korzystamy z implikacji w drugą stronę w twierdzeniu 2.1. Jednak przykład 1.13 prezentuje funkcję, która jest właściwa, jest bornologiczna, jej obraz jest zgrubnie gęsty w przeciwdziedzinie, ale nie jest efektywnie właściwa. Sprzeczność. ■

Fakt 2.3. *Ustalmy przestrzeń metryczną X. Rozważmy dowolne $R > 0$, dowolny zbiór $A \subseteq X$, oraz rodzinę zbiorów $\{B_x \subseteq X\}_{x \in X}$ – po jednym zbiorze dla każdego punktu w x. Załóżmy, że po pierwsze dla każdego $x \in A$ zbiór B_x jest niepusty, po wtóre, że $B_x \subseteq K(x, R)$. Wtedy zbiory A, oraz $\bigcup_{x \in A} B_x$ są zgrubnie równoważne.*

Dowód. Niech $f \colon A \to \bigcup_{x \in A} B_x$ spełnia następujący warunek $\forall_{a \in A} f(a) \in B_a$. Wtedy $f(A)$ zgrubnie gęste w $\bigcup_{x \in A} B_x$. Ponadto f bliskie $\mathrm{id}_A \colon A \to X$, czego prostą konsekwencją jest, że f jest funkcją efektywnie zgrubną. Wobec tego f jest zgrubną równoważnością. ■

Operacja opisana w powyższym fakcie nazywana będzie lokalnym podstawianiem. Powyższy fakt pozwala między innymi na proste dowody zgrubnych równoważności przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{Z}^n$, dla $n = 1, 2, \ldots$.

Przydatną operacją przy dowodzeniu zgrubnej równoważności pewnych zbiorów, jest możliwość usunięcia, lub zmiany pewnego ograniczonego podzbioru danej przestrzeni. Mówi o tym poniższy fakt.

Fakt 2.4. *Dla dowolnej przestrzeni metrycznej zgrubnie spójnej X i jej nieograniczonego podzbioru A, rozpatrzmy dowolny zbiór ograniczony $B \subseteq X$. Zbiór A jest zgrubnie równoważny zbiorom $A \setminus B, A \cup B$.*

Dowód. Skoro A nieograniczony, to istnieje punkt $a \in A \setminus B$. Niech $B_a = \{a\}$, oraz $B_b = \{a\}$ dla $b \in B$, oraz $B_c = \{c\}$ dla $c \in A \setminus B$. Oczywiście rodzina zbiorów $\{B_d\}_{d \in A}$, spełnia założenia faktu 2.3 dla $R = \sup_{b \in B} d(a, b)$. Ponadto $\bigcup_{d \in A} B_d = A \setminus B$. Więc A jest zgrubnie równoważne $A \setminus B$. Podobnie, rozważmy rodzinę $B'_a = \{a\} \cup B$, $B'_c = \{c\}$ dla $c \in A$. Rodzina ta też spełnia warunki faktu 2.3 dla $R = \sup_{b \in B} d(a, b)$, ponadto $\bigcup_{d \in A} B'_d = A \cup B$. Więc A jest zgrubnie równoważne $A \cup B$. ■

2.1.1. Faktoryzacja zgrubnych równoważności

W tym rozdziale przedstawione są metody, jak ogólną zgrubną równoważność zaprezentować jako złożenie pewnych szczególnych rodzajów funkcji.

Rozważmy zgrubną równoważność $f\colon X \to Y$. Oczywiście f jest funkcją „na" $f(X)$. Niech X' będzie selektorem rodziny $(f^{-1}(y))_{y \in f(X)}$, selektor taki istnieje z pewnika wyboru. Wtedy $f(X') = f(X)$, oraz $f' = f|_{X'}$ jest różnowartościowe. Więc $f'\colon X' \to f(X)$ jest bijekcją. Ponadto f' powstało przez obcięcie funkcji efektywnie zgrubnej f, więc też jest efektywnie zgrubne. Wobec tego funkcja odwrotna do f' też jest efektywnie zgrubna. Oczywiście $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y. Niech p będzie funkcją efektywnej właściwości dla f. Zauważmy że dla każdych $x, y \in X$, takich że $f(x) = f(y)$, mamy $d(x, y) < p(1)$. Wobec tego X' jest $p(1)$-gęsty w X. Rozważania te podsumowuje poniższy fakt.

Fakt 2.5. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest zgrubną równoważnością, to istnieją odpowiednio zgrubnie gęste podzbiory $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$, takie że $f|_{X'}$ jest efektywnie zgrubną bijekcją pomiędzy X', a Y'.*

Jak łatwo sprawdzić, przejście od zbioru do jego zgrubnie gęstego podzbioru i z powrotem, może zostać zaprezentowane poprzez operację lokalnego podstawiania (patrz 2.3). Spostrzeżenie to wraz z powyższym faktem dowodzą, że każda zgrubna równoważność jest złożeniem $p_2 \circ e \circ p_1$, gdzie p_1, p_2 to funkcje realizujące operację lokalnego podstawiania, natomiast e to efektywnie zgrubna bijekcja.

2.2. Niezmienniki zgrubnej równoważności

Oprócz wykazywania, że zgrubna równoważność zachodzi, często istotne jest wykazanie jej braku. Najczęściej, by wykazać brak pewnej równoważności, znajdywana jest określona własność przestrzeni, zachowywana przy wybranym rodzaju równoważności, która jest odmienna dla danych dwóch przestrzeni. Stąd istotne jest, by poznać możliwie szeroki wachlarz własności i parametrów przestrzeni, które są zachowywane przy zgrubnych równoważnościach. Poniższy rozdział prezentuje listę najciekawszych z nich.

2.2.1. Ograniczoność

Ograniczoność przestrzeni jest trywialnym, jednak niekiedy istotnym niezmiennikiem zgrubnej równoważności.

2.2.2. Liczba spójnych składowych w ∞

Definicja 2.6. *Dla danej przestrzeni metrycznej X, mówimy że X ma co najwyżej n spójnych składowych w nieskończoności, gdy istnieje d takie, że dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subseteq X$, istnieje zbiór ograniczony $C \subseteq X$, taki że $B \subseteq C$ oraz, że istnieją punkty $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus C$, takie że dla każdego $x \in X \setminus C$ istnieje $1 \leqslant i \leqslant n$, oraz d-ścieżka łącząca x_i z x w $X \setminus C$.*

Twierdzenie 2.7. *Dla danych przestrzeni metrycznych X, Y, oraz ich zgrubnej równoważności $f\colon X \to Y$, jeśli przestrzeń X spełnia powyższą definicję dla pewnego n, to przestrzeń Y też, dla tego samego n.*

Dowód. Niech b będzie funkcją bornologiczności f. Ponadto niech $f(X)$ będzie D-zgrubnie gęste w Y. Załóżmy, że w definicji 2.6 dla przestrzeni X rozpatrywaliśmi d_X ścieżki. Niech

$d_Y = \max(b(d_X), D)$. Rozważmy dowolny zbiór ograniczony $B_Y \subseteq Y$. Niech $B_X = f^{-1}(B_Y)$. Oczywiście B_X jest ograniczony. Niech $C_X \supseteq B_X$ będzie zbiorem ograniczonym w X pochodzącym z definicji 2.6. Rozważmy $C_Y = f(C_X) \cup (K(d_Y, f(C_X) \cup B_Y) \setminus f(X))$. Oczywiście C_Y jest zbiorem ograniczonym i zawiera B_Y. Niech $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus C_X$ będzie odpowiednim ciągiem z definicji 2.6. Niech $y_i = f(x_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

Weźmy dowolne $y \in Y \setminus C_Y$. Oczywiście $f(X)$ jest d_Y zgrubnie gęste w Y. Jeśli $y \in f(X)$ to niech x takie, że $f(x) = y$. W przeciwnym przypadku $d(y, f(C_X)) > d_Y$. Wtedy niech x takie, że $d(f(x), y) < d_Y$, więc $f(x) \notin f(C_X)$. W obu przypadkach $x \notin C_X$. Wiemy więc, że dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$ istnieje d ścieżka łącząca x_i z x, rozłączna z C_X. Jej obraz wzdłóż f to $b(d)$ ścieżka łącząca y_i z $f(x)$, rozłączna z $f(C_X)$ i zawarta w $f(X)$. Wobec tego ścieżka ta jest rozłączna z C_Y. Ponadto można ją przedłużyć o odcinek $(f(x), y)$, uzyskując d_Y ścieżkę łączącą y_i z y. ■

Definicja 2.8. *Liczbą spójnych składowych w nieskończoności danej przestrzeni zgrubnej X, nazywamy najmniejszą z liczb naturalnych n, takich że X ma co najwyżej n spójnych składowych w nieskończoności. Gdy żadna taka liczba n nie istnieje, to mówimy że X ma ∞ spójnych składowych w nieskończoności.*

Przykład 2.9. *Niech $L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2^{-a})\right)\}$. Zbiór $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ ma liczbę spójnych składowych w nieskończoności równą ∞.*

Dowód. Weźmy dowolne $n \geqslant 0$, dowolne $d > 0$, oraz zbiór $B = K\left(0, \frac{2d}{\sin(2^{-n-1})}\right)$. Zauważmy, że dla $0 \leqslant i < j \leqslant n$, $d(L_i \setminus B, L_j \setminus B) \geqslant 2d > d$. Ponadto zbiory L_i, L_j są nieograniczone, więc dla dowolnego zbioru ograniczonego $C \subseteq \mathbb{R}^2$, zawierającego B, $d(L_i \setminus C, L_j \setminus C) geq 2d$. Wobec tego $X \setminus C$ ma przynajmniej $n + 1$ spójnych składowych.

Wobec dowolności n, wykazaliśmy że X ma nieskończenie wiele spójnych składowych w nieskończoności. ■

2.2.3. Moc rodziny zgrubnie spójnych składowych

Zbiór $A \subseteq X$ nazywam zgrubnie spójnym, gdy metryka na X, obcięta to $A \times A$ przyjmuje tylko wartości skończone.

Zgrubnie spójną składową danej przestrzeni nazywamy maksymalny ze względu na inkluzję jej zgrubnie spójny podzbiór. Oczywiście pojęcie to jest dobrze określone (suma wstępującego łańcucha zbiorów zgrubnie spójnych jest zgrubnie spójna).

Weźmy dowolne przestrzenie metryczne X, Y. Niech $\approx_X, \approx_Y$ będą relacjami odpowiednio na X, Y, zdefiniowanymi następująco: $x \approx y$ wtedy i tylko wtedy gdy x, y leżą w tej samej zgrubnie spójnej składowej odpowiedniej przestrzeni. Oczywiście obie te relacje są relacjami równoważności. Niech $[x]_X, [y]_Y$ będzie klasami abstrakcji odpowiednio x względem $\approx_X$ i y względem $\approx_Y$.

Niech $f\colon X \to Y$ będzie zgrubna. Ponieważ f jest bornologiczna, to jeśli $x \approx_X y$, to też $f(x) \approx_Y f(y)$. Więc istnieje $\overline{f}\colon X/{\approx_X} \to Y/{\approx_Y}$, takie że dla każdego $x \in X$, $[f(x)]_Y = \overline{f}([x]_X)$.

Analogicznie, jeśli $f\colon X \to Y$ jest efektywnie zgrubna, to $\overline{f}$ jest różnowartościowa. Wreszcie, jeśli $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y, to $\overline{f}$ jest „na". Łącząc te spostrzeżenia, otrzymujemy fakt, że jeśli f jest zgrubną równoważnością, to $\overline{f}$ jest bijekcją, więc moc rodziny zgrubnie spójnych składowych jest niezmiennikiem zgrubnych równoważności.

Przy okazji warto zauważyć, że jeśli funkcje zgrubne $f, g\colon A \to B$ są bliskie, to funkcje $\overline{f}, \overline{g}$ są równe.

2.3. Przykłady zgrubnych równoważności

Poniższy rozdział prezentuje możliwie szeroki zasób różnorodnych przykładów zgrubnych równoważności. Zapoznanie się z tymi przykładami pozwala wyrobić dobrą intuicję. Jednocześnie, przykłady te dają silny aparat pojęciowy pozwalający w wielu przypadkach w sposób analogiczny wykazać zgrubną równoważność (lub jej brak).

2.3.1. Klasy konkretnych zgrubnych równoważności

Treść rozdziału 2.1.1dowodzi, że ważnymi rodzajami zgrubnych równoważności są lokalne podstawienia (patrz 2.3), oraz bijektywne zgrubne równoważności. Oczywiście przekształcenia obu wymienionych rodzajów są zgrubnymi równoważnościami. Ponadto, jak wykazano w rozdziale 2.1.1 każda zgrubna równoważność powstaje poprzez ich odpowiednie złożenie.

Kolejny przykład zgrubnych równoważności, to operacje opisane w fakcie 2.4. Często, dowody zgrubnych równoważności są znacznie uproszczone, po usunięciu (lub zmianie) pewnych ograniczonych podzbiorów odpowiednich przestrzeni.

Co warto zaznaczyć izometrie, podobieństwa oraz przekształcenia bilipschitzowskie są zgrubnymi równoważnościami pomiędzy swoją dziedziną, a obrazem.

Definicja 2.10. *Dla danych przestrzeni metrycznych X, Y, przekształcenie $f\colon X \to Y$ nazywam podobieństwem, gdy istnieje stała $c > 0$, taka że dla dowolnych $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) = c \cdot d(x, y)$.*

2.3.2. Zgrubna równoważność w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$

Szczególne przypadki zgrubnych równoważności, to równoważność pewnych podzbiorów przestrzeni euklidesowych. Rozmaite przykłady obrazujące tę tematykę zostały zaprezentowane poniżej.

Łatwo sprawdzić, że przestrzeń $\mathbb{R}$ ma dwie spójne składowe w nieskończoności, natomiast dla $n > 1$ przestrzenie $\mathbb{R}^n$ mają po jednej spójnej składowej w nieskończoności. Wnioskiem jest brak zgrubnej równoważności przestrzeni $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^k$, dla $k > 1$.

Poniższy przykład prezentuje nieskończenie wiele, parami zgrubnie nierównoważnych podzbiorów $\mathbb{R}$.

Przykład 2.11. *Wprowadźmy funkcję $E(x, n)$ przez indukcję: $E(x, 0) = e^x$, $E(x, n+1) = e^{E(x,n)}$. Oczywiście E jest monotoniczna ze względu na obie współrzędne i $E(x, n) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, niezależnie od $n \geqslant 0$.*

Niech

$$U_{k,j} = \left[j^2 + \sum_{i=0}^{j-1} E(i,k),\ j^2 + \sum_{i=0}^{j} E(i,k) \right] \subseteq \mathbb{R}.$$

Oczywiście $\operatorname{diam}(U_{k,j}) = E(j,k)$, *oraz $d(U_{k,j}, U_{k,j+1}) = 2j + 1$.*

Niech $A_k = \bigcup_{j\geqslant 0} U_{k,j}$. Zbiory $A_1, A_2, \ldots$ są parami zgrubnie nie równoważne.

Dowód. Weźmy $0 < x < y \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $f\colon A_x \to A_y$ jest zgrubną równoważnością. Niech $f(A_x)$ będzie d gęste w A_y, oraz niech b, p będą odpowiednio funkcjami bornologiczności i efektywnej właściwości f. Oczywiście zbiory $U_{x,j}$ dla $j \geqslant 0$ są 1-ścieżkowo spójne. W związku z tym ich obrazy są $b(1)$-ścieżkowo spójne. Zbiór $B = \bigcup_{0\leqslant j<b(1)} U_{x,j}$ jest ograniczony, więc $f^{-1}(B)$ też jest ograniczony. Weźmy takie j_0, że dla $j \geqslant j_0$, $U_{x,j} \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Wtedy dla $j \geqslant j_0$, $f(U_{x,j}) \cap B = \emptyset$, oraz $f(U_{x,j})$ jest $b(1)$-ścieżkowo spójny, natomiast zbiory U_{y,j_1}, U_{y,j_2},

dla $j_1, j_2 > b(1)$ są odległe o ponad $b(1)$. Więc dla każdego $j > j_0$, istnieje $f^\sharp(j)$, takie że $f(U_{x,j}) \subseteq U_{y,f^\sharp(j)}$.

Wykażę teraz, że od pewnego miejsca, funkcja $f^\sharp$ jest różnowartościowa. Niech $j_0' > \max(j_0, p(d))$. Niech $j_0'' > f^{\sharp^{-1}}(f^\sharp(\{j_0, \ldots, j_0'\}))$. Załóżmy, że dla pewnego $j > f(j_0'')$, $f^{\sharp^{-1}}(j) = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ i $n > 1$. Ale zbiory $U_{x,j_1}, U_{x,j_2}, \ldots, U_{x,j_n}$ są parami $p(d)$-rozłączne, więc ich obrazy są parami d-rozłączne, więc nie mogą d-pokrywać zbioru d-ścieżkowo spójnego $U_{y,j}$. Uzyskana sprzeczność, dowodzi że $f^\sharp|\{j_0'', \ldots\}$ jest różnowartościowa.

Zauważmy, że $\mathrm{diam}(f(U_{x,j})) \leqslant C \cdot \mathrm{diam}(U_{x,j})$ dla pewnej stałej $C > 0$. Wynika to z faktu, że istnieje 1-gęsta 1-ścieżka w $U_{x,j}$, której długość jest równa $\mathrm{diam}(U_{x,j})$, ścieżka ta jest przeprowadzona na $b(1)$ ścieżkę, $b(1)$ gęstą w $f(U_{x,j})$, długości $\mathrm{diam}(U_{x,j})$. Jednocześnie, dla $j > j_0''$, $f(U_{x,j})$ jest d-gęste w $U_{y,f^\sharp(j)}$, czyli dla pewnej stałej $C' > 0$, $\mathrm{diam}(U_{y,f^\sharp(j)}) \leqslant C' \cdot \mathrm{diam}(U_{x,j})$, czyli $E(f^\sharp(j), y) \leqslant C' \cdot E(j, x)$.

Ponieważ $y > x$, to $y \geqslant x + 1$, więc

$$C' \cdot e^{E(j,x-1)} \geqslant E(f^\sharp(j), y) > e^{E(e^{f^\sharp(j)}, x-1)}.$$

Więc dla dostatecznie dużych j, $f^\sharp(j) \leqslant \ln j + 1$. Co przeczy różnowartościowości $f^\sharp$. ■

Ciekawym, ze zgrubnego punktu widzenia, przykładem podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zdefiniowane poniżej k-gwiazdki.

Definicja 2.12. *Dla ustalonej przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, oraz dowolnego $k > 0$, przez k-gwiazdkę oznaczany jest zbiór składający się z dowolnych k parami nierównoległych prostych zawartych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.*

Jak łatwo wykazać, dla każdego $k > 0$, każde dwie k-gwiazdki są zgrubnie równoważne. Ponadto łatwo sprawdzić, że każda k-gwiazdka ma dokładnie $2k$ spójnych składowych w nieskończoności. Wobec tego dla $k \neq l$, dowolna k-gwiazdka nie jest zgrubnie równoważna żadnej l-gwiazdce. Oczywiście $\mathbb{R}$ jest 1-gwiazdką.

Ustalmy rodzinę $\{g_n \subseteq \mathbb{R}^2\}_{n>0}$, gdzie g_n to pewna n-gwiazdka. Jak wykazano powyżej, składniki tej rodziny są parami nie zgrubnie równoważne. Wobec tego, rodzina ta stanowi przeliczalnie wiele podzbiorów $\mathbb{R}^2$ parami zgrubnie nie równoważnych.

2.3.3. Zgrubne zanurzenia

Szczególnym przypadkiem zgrubnej równoważności, jest zgrubna równoważność z podzbiorem pewnej szerszej przestrzeni. Każde przekształcenie efektywnie zgrubne $f\colon X \to Y$ stanowi zgrubną równoważność z X do dowolnego $Z \subseteq Y$, o ile tylko $f(X) \subseteq Z$ i $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Z. Jednocześnie każda zgrubna równoważność $f'\colon X' \to Z' \subseteq Y'$ jest właśnie tej postaci na mocy faktu 2.1.

Zgrubne zanurzenia są o tyle istotne, że pozwalają badać zgrubne własności rozmaitych przestrzeni poprzez analizę podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni, w którą tamte zanurzają się. Przykładem takiego postępowania są zanurzenia przestrzeni o skończonym wymiarze asymptotycznym w przestrzenie Hilberta.

2.3.4. Grupy

W poniższym rozdziale zostaje zaprezentowany ważny, a w pewnym sensie fundamentalny, przykład zgrubnych równoważności.

Wpierw wprowadzona zostanie metryka na dowolnej grupie skończenie generowanej.

Definicja 2.13. *Niech G grupa generowana przez skończony zbiór F. Niech $g \in G$. Wtedy g rozpisuje się na przynajmniej jeden sposób jako $f_1 f_2 f_3 \dots f_n$, dla $f_i^{\pm 1} \in F$. Definiujemy $||g||$ jako najmniejsze ze wszystkich n w rozpisaniach jak powyżej.*

Zauważmy, że $||e|| = 0$ dla $f \in F$, $||f|| = 1$ oraz dla $g, h \in G$ $||gh|| \leqslant ||g|| + ||h||$. Zdefiniujmy metrykę na G.

Definicja 2.14. *Dla grupy G generowanej przez F definiujemy metrykę*

$$d(g,h) = ||gh^{-1}||.$$

Łatwo wykazać, że powyżej faktycznie zdefiniowaliśmy metrykę. Ponadto dla dowolnych $f, g, h \in G$ zachodzi następujący wzór

$$d(g,h) = ||gh^{-1}|| = ||gff^{-1}h^{-1}|| = ||(gf)(hf)^{-1}|| = d(gf, hf).$$

Czyli metryka ta jest niezmiennicza ze względu na wymnażanie z prawej strony przez elementy grupy. Tak zdefiniowaną metrykę nazywamy metryką długości słowa.

Fakt 2.15. *Niech grupa G będzie generowana przez dwa skończone zbiory generatorów F_1, F_2. Niech d_1, d_2 to metryki długości słowa na G pochodzące od F_1, F_2 odpowiednio. Wtedy przestrzenie metryczne $(G, d_1), (G, d_2)$ są zgrubnie równoważne.*

Dowód powyższego faktu nie jest bardzo skomplikowany, wystarczy zauważyć, że każdy element F_2 daje się uzyskać poprzez wymnożenie pewnej ilości elementów F_1. A ponieważ F_2 jest zbiorem skończonym, możemy ograniczyć z góry, ile co najwyżej elementów F_1 potrzeba wziąć by uzyskać dowolny element F_2. Wobec tego $d_2(g,h)$ szacuje się z jakąś stałą przez $d_1(g,h)$. I vice-versa.

Powyższy fakt pokazuje, że jeśli patrzymy na skończenie generowaną grupę G ze zgrubnego punktu widzenia, nie jest istotny wybór zbioru generatorów.

2.4. Sposoby wykorzystania zgrubnej równoważności

By wykazać pewną zgrubną własność ϕ, dla pewnej przestrzeni X, często łatwiej jest znaleźć przestrzeń Y, zgrubnie równoważną X, i dla niej wykazać daną własność ϕ. Pozwala to uprościć problem, uniknąć dodatkowych trudności i skupić się na istocie zagadnienia. Jednakże w tym celu trzeba wiedzieć, że własność ϕ jest niezmiennicza ze względu na zgrubną równoważność, oraz wykazać zgrubną równoważność X, Y. Powyższe przykłady zgrubnych równoważności w założeniu mają pomóc znaleźć odpowiednią przestrzeń Y, oraz wykazać zgrubną równoważność X, Y. W następnym rozdziale z kolei, przedstawiony jest pewien schemat postępowania, gwarantujący niezmienniczość wprowadzonych definicji ze względu na zgrubną równoważność.

Rozdział 3

Kategoria przestrzeni zgrubnych

W poniższym rozdziale zostaje zaprezentowane krótkie wprowadzenie do teorii kategorii, następnie wprowadzona jest kategoria przestrzeni zgrubnych **CorSpace**, dokonana jest analiza jej własności, oraz wyciągnięte wnioski.

3.1. Podstawy teorii kategorii

Teoria kategorii to stosunkowo młoda dziedzina matematyki. Pozwala ona w bardzo ogólny i abstrakcyjny sposób patrzeć na rozmaite pojęcia matematyczne. Ponadto daje wygodny język do operowania nimi oraz upraszcza dostrzeganie nowych, nieznanych zależności. Wreszcie, dzięki tak abstrakcyjnemu i ogólnemu podejściu do rzeczy, zagwarantowane są pewne własności wprowadzanych definicji. Między innymi, wszelkie wysławiane w języku teorii kategorii własności są niezmiennicze ze względu na izomorfizm (odpowiednik równoważności) w danej kategorii.

Definicja 3.1. *Kategoria jest to dowolna klasa $\mathcal{O}$, której elementy nazywane są obiektami, oraz dla każdej pary obiektów A, B, klasa $\mathcal{K}(A, B)$, jej elementy nazywane są morfizmami z A do B (ozn. $A \xrightarrow{f} B$), spełniające poniższe warunki:*

- *dla każdej pary morfizmów $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ istnieje morfizm $A \xrightarrow{g \circ f} C$, operację $\circ$ nazywamy składaniem morfizmów, zakłada się, że operacja ta jest łączna,*
- *dla każdego obiektu A istnieje morfizm $\mathrm{id}_A \in \mathcal{K}(A, A)$, który jest obustronnym elementem neutralnym składania.*

Generyczny przykład kategorii, to kategoria **Set**, w której obiekty to zbiory, morfizmy to funkcje pomiędzy zbiorami, złożenie morfizmów to złożenie funkcji, natomiast identyczności to funkcje identycznościowe. Inny przykład to kategoria **Top**, w której obiekty to przestrzenie topologiczne, a morfizmy to odwzorowania ciągłe.

Kolejne ważne pojęcie teorii kategorii to funktor.

Definicja 3.2. *Dla danych kategorii C, D, funktorem $F\colon C \to D$ nazwiemy przyporządkowanie obiektom C, obiektów D, morfizmom C, morfizmów D, z zachowaniem dziedziny i przeciwdziedziny morfizmów, złożenia i identyczności.*

Często obiekty danej kategorii to zbiory z dodatkową strukturą, a morfizmy to pewne funkcje daną strukturę zachowujące. Dla każdej kategorii C tej postaci dany jest funktor zapominania $|.|\colon C \to$ **Set**, który obiektowi X przypisuje zbiór X, a morfizmowi f, funkcję f.

Definicja 3.3. *Dla danych funktorów* $F, G\colon C \to D$ *rozważmy klasę* $\eta = \{m_A\}_{A \in C}$*, gdzie* $F(A) \overset{m_A}{\to} G(A)$*. Klasę* η *nazwiemy transformacją naturalną z* F *do* G*, jeśli następujące diagramy komutują*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ {\scriptstyle m_A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle m_B} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

dla wszystkich $A \overset{f}{\to} B$ *w* C*.*

Ciekawy przykład funktora to funktor $Conn\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, który przestrzeni topologicznej przyporządkowuje zbiór jej spójnych składowych, a funkcji ciągłej $f\colon X \to Y$, funkcję $\overline{f}$ która każdej spójnej składowej $A \subseteq X$ przypisuje spójną składową Y zawierającą $f(A)$. Warto zwrócić uwagę, że dana jest transformacja naturalna $q\colon |.| \to Conn$, dana w następujący sposób: dla danej przestrzeni topologicznej X, q_X to funkcja, która każdemu punktowi $x \in X$ przyporządkowuje spójną składową X zawierającą x. Oczywiście q jest transformacją naturalną, gdyż odpowiednie prostokąty komutują.

3.2. Wprowadzenie kategorii przestrzeni zgrubnych CorSpace

Kategoryjne spojrzenie na daną dziedzinę opera się na założeniu, że wewnętrzne własności obiektów można badać jedynie, poprzez analizę funkcji pomiędzy nimi. Warto w tym momencie przytoczyć spostrzeżenia paragrafu 1.4.3. Wykazane jest tam, że wiedza o rodzinie zbiorów kontrolowanych w danej przestrzeni jest dokładnie równoważna znajomości relacji bliskości na funkcjach w dany zbiór. Stąd wydaje się być uzasadniona poniższa definicja.

Definicja 3.4. *Rozważmy kategorię* **CorSpace***, w której obiekty to wszystkie przestrzenie metryczne, natomiast dla pary przestrzeni metrycznych* X, Y $\mathcal{K}(X, Y) = F/\sim$*, gdzie* $\sim$ *to relacja bliskości, a* F *to rodzina funkcji zgrubnych z* X*, do* Y*. Przez* $[f]$ *oznaczam klasę równoważności funkcji* f *względem relacji* $\sim$*. Niech identyczność na* X *to* $[\mathrm{id}_X]$*, natomiast złożenie* $X \overset{[f]}{\to} Y, Y \overset{[g]}{\to} Z$*, to* $[g \circ f]$*.*

Poniżej wykazana jest poprawność tej definicji.

Dowód. Po pierwsze należy wykazać, że zdefiniowane powyżej złożenie morfizmów w **CorSpace** nie zależy od wyboru reprezentantów. Niech $X \overset{[f_1]}{\to} Y = X \overset{[f_2]}{\to} Y, Y \overset{[g_1]}{\to} Z = Y \overset{[g_2]}{\to} Z$, należy udowodnić, że $[g_1 \circ f_1] = [g_2 \circ f_2]$. Niech b będzie funkcją bornologiczności dla g_1, niech f_1, f_2 będą d_f bliskie, natomiast g_1, g_2 będą d_g bliskie. Twierdzę, że $g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2$ są $b(d_f) + d_g$ bliskie. Weźmy $x \in X$. $d(f_1(x), f_2(x)) < d_f$. Więc $d(g_1(f_1(x)), g_1(f_2(x))) < b(d_f)$. Ponadto $d(g_1(f_2(x)), g_2(f_2(x))) < d_g$. Więc z nierówności trójkąta $d(g_1(f_1(x)), g_2(f_2(x))) < b(d_f) + d_g$.

Łączność złożenia, oraz neutralność identyczności wynikają natychmiast z definicji. ■

Wygodnie jest spojrzeć na kategorię **CorSpace**, jako kategorię ilorazową pewnej szerszej kategorii.

Definicja 3.5. *Niech kategoria* **MetaCorSpace** *ma za obiekty przestrzenie metryczne, natomiast morfizmy niech będą to funkcje zgrubne.*

Istotny jest funktor $./\sim\colon$ **MetaCorSpace** $\to$ **CorSpace**, który na obiektach działa identycznościowo, a funkcji f przypisuje $[f]$.

3.3. Analiza własności kategorii CorSpace

3.3.1. Izo, mono, epi morfizmy

Najbardziej podstawowym pojęciem teorii kategorii jest pojęcie izomorfizmu.

Definicja 3.6. *Morfizm $A \xrightarrow{j} B$ w kategorii C nazwiemy izomorfizmem, jeśli istnieje morfizm $B \xrightarrow{k} A$, taki że $j \circ k = \mathrm{id}_B, k \circ j = \mathrm{id}_A$.*

Fakt 3.7. *$A \xrightarrow{[f]} B$ jest izomorfizmem w* **CorSpace** *wtedy i tylko wtedy gdy $f \colon A \to B$ jest zgrubną równoważnością.*

Dowód. Jeśli $f \colon A \to B$ jest zgrubną równoważnością, to istnieje $h \colon B \to A$, taka że odpowiednie złożenia są bliskie identycznościom. Ale wtedy odpowiednie złożenia $[f]$ i $[g]$ są równe identycznościom w **CorSpace**, więc $[f]$ jest izomorfizmem.

Jeśli $A \xrightarrow{[f]} B$ jest izomorfizmem, to istnieje $B \xrightarrow{[h]} A$, taki że odpowiednie złożenia są identycznościami w **CorSpace**. Ale wtedy złożenia $f \circ g, g \circ f$ są bliskie identycznościom, więc f jest zgrubną równoważnością. ■

Pojęciami związanymi z izomorfizmem są dwa zdefiniowane poniżej.

Definicja 3.8. *Morfizm $B \xrightarrow{f} C$ jest monomorfizmem, gdy dla każdej pary morfizmów $A \xrightarrow{g,h} B$, zachodzi*

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

Analogicznie, morfizm $A \xrightarrow{f} B$ jest epimorfizmem, gdy dla każdej pary morfizmów $B \xrightarrow{g,h} C$, zachodzi

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Pojęcia mono/epi morfizmu realizują intuicję funkcji odpowiednio różnowartościowej/na. Nie w każdej kategorii jest prawdą, że morfizm będący jednocześnie mono i epi, jest izomorfizmem.

Poniższe fakty charakteryzują mono/epi morfizmy w **CorSpace**.

Fakt 3.9. *Morfizm $B \xrightarrow{[f]} C$ jest monomorfizmem w* **CorSpace***, wtedy i tylko wtedy gdy f jest efektywnie właściwa.*

Dowód. Załóżmy, że f jest p-efektywnie właściwa. Niech $g, h \colon A \to B$, będą funkcjami zgrubnymi, oraz niech $f \circ g$ d-bliskie $f \circ h$. Wtedy dla każdego $a \in A$, $d(f(g(a)), f(h(a))) < d$. Ale wobec tego $d(g(a), h(a)) < p(d)$, więc g, h są $p(d)$-bliskie. Co, wobec dowolności g, h, dowodzi że $[f]$ jest monomorfizmem.

Niech $B \xrightarrow{[f]} C$ będzie monomorfizmem. Zdefiniuję funkcję p efektywnej właściwości f. Weźmy $R > 0$. Niech $P = \{(x, y) \in B \times B : d(f(x), f(y)) < R\}$. Wtedy $f \circ \pi_1$ R-bliskie $f \circ \pi_2$ jako funkcje z P w C. Więc π_1 jest bliskie π_2, niech będą one $p(R)$-bliskie. Ale to oznacza, że dla każdych $x, y \in B$, jeśli $d(f(x), f(y)) < R$, to $d(x, y) < p(R)$. Co wobec dowolności R, dowodzi że p jest funkcją efektywnej właściwości f. ■

Fakt 3.10. *Morfizm $A \xrightarrow{[f]} B$ jest epimorfizmem w* **CorSpace***, wtedy i tylko wtedy gdy $f(A)$ jest zgrubnie gęste w B.*

Dowód. Niech $f(A)$ będzie d_B-gęste w B. Weźmy funkcje zgrubne $g, h\colon B \to C$, takie że $g \circ f$ d-bliskie $h \circ f$. Weźmy dowolne $x \in B$. Istnieje wtedy $y \in f(A) \subseteq B$, taki że $d(x, y) < d_B$. Niech b_g, b_h będą funkcjami bornologiczności odpowiednio g, h. Wtedy $d(g(x), g(y)) < b_g(d_B)$, $d(g(y), h(y)) < d$, $d(h(y), h(x)) < b_h(d_B)$, więc z nierówności trójkąta $d(g(x), h(x)) < b_g(d_b) + d + b_h(d_B)$, więc wobec dowolności x, g, h są bliskie.

Niech $A \xrightarrow{[f]} B$ będzie epimorfizmem. Rozważmy dwie funkcje $g, h\colon B \to B \times \mathbb{R}$, określone następująco $g(b) = (b, 0), h(b) = (b, d(b, f(A)))$. Rozważmy metrykę d na $B \times \mathbb{R}$, zdefiniowaną $d((b_1, x_1), (b_1, x_1)) = d(b_1, b_2) + |x_1 - x_2|$. Oczywiście g jest izometrią, więc jest zgrubna. Ponadto jeśli $d(b_1, b_2) < R > 0$, to $d(h(b_1), h(b_2)) = d(b_1, b_2) + |d(b_1, f(A)) - d(b_2, f(A))| \leqslant 2d(b_1, b_2)$, więc h jest bornologiczna. Wreszcie dla ograniczonego $X \subseteq B \times \mathbb{R}$, $h^{-1}(X) \subseteq \pi_1(X)$ też jest ograniczone. Wobec powyższych h jest funkcją zgrubną.

Oczywiście $g \circ f = h \circ f$, więc $[g] \circ [f] = [h] \circ [f]$, więc ponieważ $[f]$ jest epimorfizmem, to $[g] = [h]$. Niech g, h będą d-bliskie. Wobec tego dla każdego $b \in B$, $d(b, f(A)) < d$, czyli $f(A)$ jest d-gęste w B. ∎

Powyższe dwa fakty, w połączeniu z twierdzeniem 2.1 dowodzą poniższy fakt.

Fakt 3.11. *Morfizm $[f]$ w* **CorSpace** *jest izomorfizmem, wtedy i tylko wtedy gdy jest mono i epi morfizmem.*

3.3.2. Produkty, koprodukty

Definicja 3.12. *Produktem obiektów A, B, nazywamy obiekt P wraz z morfizmami $P \xrightarrow{\pi_1} A, P \xrightarrow{\pi_2} B$, takie że dla każdego obiektu C i morfizmów $C \xrightarrow{f} A, C \xrightarrow{g} B$, istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{h} P$, komutujący trójkąty C, P, A i C, P, B.*

W większości przypadków iloczyn kartezjański odpowiednich zbiorów, zaopatrzony w odpowiednią strukturę jest produktem. Niestety tak nie jest w przypadku **CorSpace**. Oczywiście istnieje produkt dowolnych dwóch przestrzeni metrycznych, jednak zazwyczaj rzutowania nie są zgrubne. Poniżej zaprezentowany jest przykład dwóch przestrzeni których produkt w **CorSpace** istnieć nie może.

Przykład 3.13. *Rozważmy dwie przestrzenie metryczne $A, B = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$. Wykażę, że ich produkt w* **CorSpace** *nie może istnieć.*

Dowód. Niech $i_1, i_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ będą włożeniami. Ponadto niech metryka na $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$, będzie metryką geodezyjną na dwóch prostych równoległych. Wtedy na przykład $d(i_1(0), i_2(0)) = \infty$.

Załóżmy, że istnieje produkt P, obiektów A, B w **CorSpace**, wraz z rzutowaniami $[\pi_1], [\pi_2]$. Niech $B = \pi_1^{-1}(i_1(0))$. Oczywiście B jest ograniczone, wobec tego $\pi_2(B)$ też jest ograniczone, więc jest zawarte w $i_1(\mathbb{R})$, lub $i_2(\mathbb{R})$. Dla ustalenia uwagi, załóżmy że $\pi_2(B) \subseteq i_1(\mathbb{R})$. Niech teraz $f = i_1, g = i_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$. Z własności uniwersalnej produktu, istnieje morfizm $\mathbb{R} \xrightarrow{[h]} P$ komutujący odpowiednie trójkąty. Wobec tego $\pi_1 \circ h(0)$ jest bliskie $i_1(0)$. Więc zbiór $\pi_1^{-1}(\{\pi_1 \circ h(0), i_1(0)\})$ jest ograniczony, więc $\pi_2(\pi_1^{-1}(\{\pi_1 \circ h(0), i_1(0)\})$ jest ograniczone. Ale $\pi_2(B) \subseteq \pi_2(\pi_1^{-1}(\{\pi_1 \circ h(0), i_1(0)\})$, więc $\pi_2 \circ h(0) \in i_1(\mathbb{R})$. Ale to znaczy, że $\pi_2 \circ h$ nie może być bliskie i_2. ∎

Definicja 3.14. *Koproduktem obiektów A, B, nazywamy obiekt S wraz z morfizmami $A \xrightarrow{\iota_1} S, B \xrightarrow{\iota_2} S$, takie że dla każdego obiektu C i morfizmów $A \xrightarrow{f} C, B \xrightarrow{g} C$, istnieje dokładnie jeden morfizm $S \xrightarrow{h} C$, komutujący trójkąty C, S, A i C, S, B.*

Koprodukt realizuje intuicję sumy rozłącznej. Ma on własności zarówno obiektu A, jak i B. Okazuje się, że w kategorii **CorSpace** istnieją koprodukty.

Fakt 3.15. *Dla danych przestrzeni metrycznych* $(A, d_1), (B, d_2)$*, przestrzeń* $S = A \sqcup B$ *wraz z włożeniami* $A \overset{[i_1]}{\to} S, B \overset{[i_2]}{\to} S$ *stanowi koprodukt w kategorii* **CorSpace**. *Przez* $A \sqcup B$ *oznaczona jest przestrzeń metryczna, której zbiór punktów to* $A \sqcup B$*, natomiast metryka przyjmuje wartości takie jak* d_1, d_2 *odpowiednio na* A, B*, natomiast dla pary punktów* $a \in A, b \in B$*,* $d(a, b) = \infty$*.*

Dowód. Po pierwsze należy sprawdzić, że włożenia i_1, i_2 są przekształceniami zgrubnymi, jednakże włożenia te są izometriami, więc są zgrubne.

Po wtóre należy sprawdzić własność uniwersalną koproduktu. Weźmy dowolną przestrzeń metryczną C, wraz z funkcjami zgrubnymi $f\colon A \to C, g\colon B \to C$. Rozważmy funkcję $h\colon S \to C$, zdefiniowaną na A tak jak f, na B tak jak g. h jest funkcją zgrubną, jej funkcja bornologiczności to maximum funkcji bornologiczności f i g, ponadto jest ona właściwa. Oczywiście $S \overset{[h]}{\to} C$ komutuje odpowiednie trójkąty. Weźmy teraz dowolny morfizm $S \overset{[h']}{\to} C$ komutujący odpowiednie trójkąty. Wykażę, że h bliskie h', czyli $[h] = [h']$. Skoro odpowiednie trójkąty komutują, to $h \circ i_1$ bliskie $h' \circ i_1$, analogicznie $h \circ i_2$ bliskie $h' \circ i_2$. Ale w takim razie h bliskie h', gdyż $S = i_1(A) \cup i_2(B)$. ■

3.3.3. Zależności z innymi kategoriami

Jedną z podstawowych własności każdego funktora jest, że zachowuje on izomorfizm. Stąd wiele niezmienników ma charakter funktorialny. Jest to jedna z motywacji, by powiązać kategorie **MetaCorSpace**, **CorSpace** możliwie gęstą siecią zależności z innymi znanymi kategoriami.

Oczywiście, podobnie jak w przypadku kategorii **Top**, dla kategorii **MetaCorSpace**, zdefiniowany jest funktor zapominania $|.|\colon$ **MetaCorSpace** $\to$ **Set**. Ponadto istnieje funktor ilorazowy $./\sim\colon$ **MetaCorSpace** $\to$ **CorSpace**, zdefiniowany w rozdziale 3.2.

Dosyć ciekawym faktem jest, że niezmiennik z rozdziału 2.2.3 ma charakter funktorialny. Mianowicie istnieje funktor $Conn\colon$ **CorSpace** $\to$ **Set** który danej przestrzeni zgrubnej przypisuje zbiór jej zgrubnie spójnych składowych, natomiast klasie bliskich funkcji zgrubnych, ich działanie na zgrubnie spójnych składowych. Uzyskaną strukturę można wzbogacić, gdyż dla każdej przestrzeni metrycznej X, istnieje funkcja $q_X\colon X \to Conn(X)$, która punktom przestrzeni przypisuje ich zgrubnie spójne składowe. Dodatkowo odpowiednie prostokąty komutują, więc q jest naturalną transformacją pomiędzy $|.|\colon$ **CorSpace** $\to$ **Set**, a $Conn\colon$ **CorSpace** $\to$ **Set**.

Rozdział 4

Podsumowanie

Powyższa praca omawia pojęcie zgrubnej równoważności przestrzeni metrycznych. Zaprezentowane są różnorodne przykłady, twierdzenia i fakty. Dodatkowo zdefiniowana zostaje kategoria **CorSpace**. Dokonana jest analiza własności tej kategorii i jej powiązań z innymi kategoriami. W ramach tych rozważań, wiele wcześniejszych faktów znajduje prezentację w języku teorii kategorii. Spojrzenie na problem w tak abstrakcyjny i ogólny sposób pozwala zrozumieć w szerszym kontekście resztę treści prezentowanych w pracy.

Bibliografia

[1] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003).

[2] E. H. Spanier, *Topologia algebraiczna*, PWN Warszawa (1972), s 22–38.

[3] S. MacLane, *Categories for the Working Matematician*, Springer (1998).