Algebry Boole'a

Michał Skrzypczak

18 listopada 2008

Spis treści

1 Algebry Boole'a **2**

2 Homomorfizmy **3**

3 Ideały, filtry **4**

4 Różnice symetryczne, ilorazy **5**

Streszczenie

Poniższy referat jest wzbogaconym tłumaczeniem rozdziału pt. „Boolean Algebra's" artykułu [1].

Zdefiniowane zostają algebry Boole'a, oraz udowodnione są ich podstawowe własności. Wprowadzamy tu podstawowe pojęcia algebraiczne w odniesieniu do algebr Boole'a (homomorfizm, jądro homomorfizmu, ideał, kongruencje).

Tekst jest wzbogacony pewną ilością przykładów (i kontr-przykładów), prezentujących własności wprowadzanych pojęć.

1 Algebry Boole'a

Rozważmy sygnaturę Σ_B zawierającą symbole $0, 1$ reprezentujące stałe, symbol unarny $'$, oraz symbole binarne $\vee, \wedge$. Ponadto zdefiniujmy zbiór równości Ω nad sygnaturą Σ_B:

1. $0' = 1, \quad 1' = 0,$
2. $p \wedge 0 = 0, \quad p \vee 1 = 1,$
3. $p \wedge 1 = p, \quad p \vee 0 = p,$
4. $p \wedge p' = 0, \quad p \vee p' = 1,$
5. $p'' = p,$
6. $p \wedge p = p, \quad p \vee p = p,$
7. $(p \wedge q)' = p' \vee q', \quad (p \vee q)' = p' \wedge q',$
8. $p \wedge q = q \wedge p, \quad p \vee q = q \vee p,$
9. $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r, \quad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r,$
10. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$

Definicja 1.1. *Dowolną algebrę A nad sygnaturą Σ_B, spełniającą równości Ω nazwiemy algebrą Boole'a (ang. Boolean algebra).*

Fakt 1.2. *Własności $p \wedge 0 = 0, \quad p \vee 1 = 1, p \wedge q = q \wedge p, \quad p \vee q = q \vee p$, jednoznacznie określają wartości stałych $0, 1$ w danej algebrze Boole'a.*

Dowód. Załóżmy, że mamy dane algebry Boole'a A, B o tym samym nośniku i o tej samej interpretacji wszystkich symboli Σ_B, oprócz $0, 1$. Wtedy $0_A \wedge 0_B = 0_A$ z warunku $p \wedge 0 = 0$ w algebrze A, analogicznie $0_B \wedge 0_A = 0_B$, ale jednocześnie $0_A \wedge 0_B = 0_B \wedge 0_A$, więc $0_A = 0_B$.

Analogiczny dowód dla symbolu 1. ■

Generycznym przykładem algebr Boole'a są zbiory potęgowe.

Przykład 1.3. *Dla każdego zbioru X, zbiór jego podzbiorów ozn. $P(X)$, z operacjami $0 = \emptyset, 1 = X, p' = X \setminus p, p \wedge q = p \cap q, p \vee q = p \cup q$ jest algebrą Boole'a. Zbiór równości Ω odpowiada dokładnie prawom rachunku zbiorów.*

Przykład ten można rozszerzyć, rozpatrując dowolną niepustą podrodzinę $A \subseteq P(X)$, zamkniętą ze względu na operacje $X \setminus ., . \cup ., . \cap .$. Taka rodzina oczywiście zawiera $\emptyset = p \cap p'$, oraz $X = p \cup p'$. Więc przy interpretacji symboli Σ_B jak w powyższym przykładzie stanowi ona algebrę Boole'a. Algebry Boole'a tej postaci nazywamy ciałami zbiorów[1].

Przykład 1.4. *Szczególnym i ważnym przypadkiem ciała zbiorów, jest rodzina zbiorów otwarto-domkniętych w danej przestrzeni topologicznej.*

Twierdzenie Stone'a o izomorfiźmie, mówi że każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów. Niestety (na szczęście?) twierdzenia tego nie będę dowodził, gdyż dowód znacznie wykracza poza zakres tego referatu. Schemat tego dowodu jest zaprezentowany w opracowaniu [3].

Definicja 1.5. *Dla danej algebry Boole'a A, jej podzbiór $B \subseteq A$ nazwiemy podalgebrą Boole'a, gdy jest zamknięty ze względu na wszystkie operacje Σ_B.*

Oczywiście jeśli $B \subseteq A$ jest podalgebrą Boole'a A, to można indukować na B operacje z A, uzyskując w ten sposób strukturę algebry Boole'a na B.

Wobec tej definicji dowolne ciało podzbiorów zbioru X, jest podalgebrą $P(X)$.

Definicja 1.6. *Dla każdej algebry Boole'a A, określony jest następujący porządek częściowy:*

$$p \leqslant q \quad \text{wtw.} \quad p \wedge q = p.$$

[1] Zauważmy, że σ-ciało to szczególny rodzaj ciała zbiorów, zamkniętego ze względu na przeliczalne operacje sumy i przecięcia, stąd nazwa.

Jak łatwo sprawdzić korzystając z równości Ω, powyżej zdefiniowana relacja jest porządkiem częściowym. Ponadto 1 jest jej elementem największym.

Jeśli dana algebra Boole'a jest ciałem zbiorów, to powyższy porządek jest równy porządkowi definiowanemu przez inkluzję

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Zauważmy, że równości ze zbioru Ω są wewnętrznie „dualne". Uściśla to poniższy fakt.

Fakt 1.7. *Dla każdej algebry Boole'a A, istnieje algebra do niej dualna B, której nośnik jest nośnikiem algebry A, a operacje są zdefiniowane następująco:*

- $0_B = 1_A$,
- $1_B = 0_A$,
- $'_B =' _A$,
- $\wedge_B = \vee_A$,
- $\vee_B = \wedge_A$.

Poniżej zaprezentowane są dwie ciekawe algebry Boole'a.

Przykład 1.8. *Niech A będzie to rodzina podzbiorów $\mathbb{N}$, składająca się z wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ i ich dopełnień. A jest ciałem, zawiera singletony wszystkich liczb naturalnych, jednak nie jest izomorficzny z żadną algebrą potęgową.*

Dowód. Wykazanie, że A jest ciałem, to proste ćwiczenie polegające na sprawdzeniu, że rodzina A jest zamknięta na odpowiednie operacje. Ponadto moc nośnika tej algebry to $\aleph_0$, co nie jest postaci $2^{|X|}$, dla jakiegokolwiek zbioru X. ■

Przykład 1.9. *Rozważmy rodzinę A takich podzbiorów $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, których funkcje charakterystyczne są ciągłe. Rodzina ta jest ciałem, oraz isnieje w niej zstępujący łańcuch elementów, o przecięciu $\{\infty\}$, a jednak $\{\infty\} \notin A$.*

Dowód. A jest ciałem, co łatwo sprawdzić, zauważając, że operacje teoriomnogościowe na zbiorach można zapisać jako proste operacje arytmetyczne na funkcjach charakterystycznych.

Przykładowy łańcuch, to

$$B_n = \{k : k \geqslant n\} \in A.$$

Jest to zstępujący ciąg zbiorów, którego przecięcie to $\{\infty\}$. Jednocześnie oczywiście $\{\infty\} \notin A$. ■

2 Homomorfizmy

Definicja 2.1. *Rozważmy algebry Boole'a A, B, oraz funkcję pomiędzy ich nośnikami $f \colon A \to B$. Powiemy, że f jest homomorfizmem algebr Boole'a, jeśli f zachowuje operacje $', \wedge, \vee$.*

Jak łatwo sprawdzić z faktu 1.2, jeśli dana funkcja $f \colon A \to B$ jest homomorfizmem algebr Boole'a, to $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Definicja 2.2. *Homomorfizm algebr Boole'a $f \colon A \to B$, który jest bijekcją nazwiemy izomorfizmem tych algebr. Dwie algebry Boole'a są izomorficzne jeśli istnieje izomorfizm między nimi.*

Oczywiście jeśli f jest izomorfizmem, to f^{-1} też nim jest. Wobec tego powyższa definicja izomorfizmu jest równoważna następującej.

Warto w tym momencie zauważyć, że przekształcenie identycznościowe $A \to A$ jest homomorfizmem (a nawet izomorfizmem), algebry Boole'a, A. Podobnie, jeśli $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ są homomorfizmami algebr Boole'a, to $g \circ f \colon A \to C$ też jest homomorfizmem.

Definicja 2.3. *Izomorfizmem algebr A, B nazwiemy taki homomorfizm $f\colon A \to B$, dla którego istnieje homomorfizm $g\colon B \to A$, taki by złożenia $f \circ g, g \circ f$ były odpowiednimi identycznościami.*

Definicja 2.4. *Jądrem homomorfizmu $f\colon A \to B$ nazwiemy $f^{-1}(0)$. Oznaczamy je $\ker(f)$.*

Przykład 2.5. *Przykład zbioru potęgowego $P(X)$ jako algebry Boole'a można rozszerzyć, mianowicie dla dowolnej funkcji $f\colon X \to Y$, dany jest homomorfizm algebr Boole'a $\overleftarrow{f}\colon Y \to X$.*

Zauważmy, że powyższy przykład można sformuować następująco: istnieje kontrawariantny funktor potęgowy $P\colon Set \to Alg_B$.

3 Ideały, filtry

Definicja 3.1. *Ideałem w algebrze Boole'a A, nazwiemy taki podzbiór $M \subseteq A$, że*

- $0 \in M$,
- $\forall_{p,q \in M}\ p \vee q \in M$,
- $\forall_{p \in M,\ q \in A}\ q \leqslant p \Rightarrow q \in M$.

Ideał $\{0\}$ nazywamy trywialnym, każdy inny jest nietrywialny. Podobnie ideał równy A nazywamy niewłaściwym, każdy inny jest właściwy. Zauważmy, że jeśli ideał M zawiera 1, to z trzeciej własności ideału, dla każdego $q \in A$ mamy $q \leqslant 1$ więc $q \in M$. Więc ideał jest właściwy, wtw. nie zawiera 1.

Przykład 3.2. *Skończone podzbiory określonego zbioru są ideałem.*

Fakt 3.3. *Zauważmy, że jądro każdego homomorfizmu $f\colon A \to B$ jest ideałem.*

Dowód. Oczywiście $f(0) = 0$, więc $0 \in \ker(f)$. Podobnie dla p, q takich, że $f(p) = f(q) = 0$, mamy $f(p \vee q) = f(p) \vee f(q) = 0 \vee 0 = 0$. Wreszcie dla p, q takich, że $f(p) = 0$, i $p \wedge q = q$, mamy

$$0 = 0 \wedge f(q) = f(p) \wedge f(q) = f(p \wedge q) = f(q).$$

■

W każdej algebrze Boole'a A, przecięcie dowolnej rodziny ideałów jest ideałem, więc dla każdego $K \subseteq A$ jest określony najmniejszy ze względu na inkluzję ideał w A, zawierający K. Ideał taki nazywamy ideałem generowanym przez K.

Jeśli $K \subseteq A$, zawiera 1, to ideał generowany przez K w A jest niewłaściwy. Podobnie jeśli $K = \{0\}$, to K jest ideałem w A, więc ideał generowany przez K to K – ideał trywialny.

Definicja 3.4. *Filtrem w algebrze Boole'a A, nazwiemy taki podzbiór $N \subseteq A$, że*

- $1 \in N$,
- $\forall_{p,q \in N}\ p \wedge q \in N$,
- $\forall_{p \in N,\ q \in A}\ p \leqslant q \Rightarrow q \in N$.

Powyższą definicję można wyrazić też następująco.

Fakt 3.5. *N jest filtrem w algebrze Boole'a A, wtw. N jest ideałem w algebrze dualnej do A.*

Definicja 3.6. *Dla zbioru $E \subseteq B$, filtrem generowanym przez E w B, nazywamy filtr będący przecięciem wszystkich filtrów w B, zawierających E.*

Dla filtrów zachodzi fakt dualny do faktu dla ideałów. Mianowicie filt jest właściwy (różny od całej algebry), wtw. gdy nie zawiera 0.

Przydatne jest poniższe spostrzeżenie.

Fakt 3.7. *Rozważmy zbiór $E \subseteq B$, dla którego istnieją $p, q \in E$, takie że $p \wedge q = 0$. Wtedy filtr generowany przez E w B to B.*

Dowód. Skoro $p, q \in E$, to p, q są zawarte w każdym filtrze zawierającym E. A każdy filtr jest z definicji zamknięty ze względu na $\wedge$. Wobec tego każdy filtr zawierający E, zawiera też 0, a wobec tego jest równy B. ■

Definicja 3.8. *Ultrafiltrem w algebrze A, nazywamy każdy filtr maksymalny ze względu na inkluzję spośród filtrów właściwych w A.*

Fakt 3.9. *Dany filtr $F \subseteq A$ jest ultrafiltrem, wtw. dla każdego $a \in A$, zachodzi $a \in F \vee a' \in F$.*

Dowód. Jeśli filtr F spełnia dla każdego $a \in A$, $a \in F \vee a' \in F$, to dorzucenie do niego dowolnego elementu który tam nie należał, powoduje istnienie takiego $a \in A$, że $a \in F \wedge a' \in F$. Ale wtedy F jest niewłaściwy.

Załóżmy, że filtr F jest ultrafiltrem, ale istnieje takie $a \in A$, że $a \notin F \wedge a' \notin F$. Doprowadzimy te założenia do sprzeczności. Rozpatrzmy

$$F' = F \cup \{a \wedge b : b \in F\},$$

$$\text{oraz } \overline{F} = \{c \in A : \exists_{d \in F'}\ d \leqslant c\}.$$

Twierdzę, że $\overline{F}$ jest filtrem właściwym w A, oraz $F \subsetneq \overline{F}$.

- $\overline{F}$ zawiera 1,
- Jeśli $p \in \overline{F}$, oraz $p \leqslant q$, to $q \in \overline{F}$.
- Jeśli $\overline{p}, \overline{q} \in \overline{F}$, to istnieją $p \leqslant \overline{p}, q \leqslant \overline{q}$, takie że $p, q \in F'$. Wtedy jak łatwo sprawdzić $p \wedge q \in F'$, oraz $p \wedge q \leqslant \overline{p} \wedge \overline{q}$, więc $\overline{p} \wedge \overline{q} \in \overline{F}$.
- Oczywiście $F \subsetneq \overline{F}$.
- Wykażę, że $a' \notin \overline{F}$. Gdyby dla jakiegoś $b \leqslant a'$, było $b \in F$, to było by $a' \in F$. Więc $0 \notin \{a \wedge b : b \in F\}$. W sumie otrzymujemy, że dla każdego $b \leqslant a'$, zachodzi $b \notin F'$. Więc $a' \notin \overline{F}$.

Wobec tego $\overline{F}$ jest filtrem właściwym ostro większym od F, co daje sprzeczność. ■

Przykład 3.10. *Rozważmy dowolne $x \in \beta\omega \setminus \omega$. Zdefiniujmy*

$$F_x = \{A \subseteq \omega : x \in \overline{A}^{\beta\omega}\}.$$

Wtedy F_x jest filtrem w $P(\beta\omega)$.

Dowód. Powyższa definicja pokrywa się z definicją podaną w ramach poprzedniego referatu. Wszystkie wymagane własności filtru zostały wtedy sprawdzone. ■

4 Różnice symetryczne, ilorazy

Definicja 4.1. *Zdefiniujmy różnicę symetryczną dwóch elementów algebry Boole'a A*

$$p \triangle q = (p \wedge q') \vee (p' \wedge q).$$

Oczywiście $p \triangle q = q \triangle p$. Jeśli dana algebra Boole'a jest ciałem zbiorów, to powyższa definicja pokrywa się z definicją różnicy symetrycznej zbiorów $A \div B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$. Zauważmy też, że dla każdego homomorfizmu algebr Boole'a f, $f(a \triangle b) = f(a) \triangle f(b)$.

Fakt 4.2. *W każdej algebrze Boole'a, zachodzi następujący fakt $a = b \Leftrightarrow a \triangle b = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $0 = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$. Wtedy

$$a = a \wedge 1 = a \wedge ((a' \vee b) \vee ((a \wedge b') \vee (a' \wedge b))) =$$

$$a \wedge ((a' \vee b) \vee 0) = a \wedge (a' \vee b) = a \wedge b.$$

Ale analogicznie $b = a \wedge b$. Więc w sumie $a = b$.

Oczywiście dla $a = b$, mamy $a \triangle b = 0$. ■

Definicja 4.3. *Dla danego ideału właściwego $M \subseteq A$, zdefiniujmy relację równoważności $\equiv_M$ na A, następująco*

$$p \equiv_M q \quad \text{wtw.} \quad p \triangle q \in M.$$

Relacja ta jest faktycznie relacją równoważności, ponieważ

- $p \triangle p = 0 \in M$,
- $p \triangle q = q \triangle p$,
- dla $p \equiv_M q$ i $q \equiv_M r$, mamy $p \triangle r \leqslant p \triangle q \vee q \triangle r$, więc $p \triangle r \in M$.

Dla danego zbioru X, jeśli za M przyjmiemy ideał skończonych podzbiorów tego zbioru, to relacja $\equiv_M$ na algebrze zbioru potęgowego X skleja wszystkie zbiory które różnią się skończoną liczbą elementów.

Rozpatrzmy algebrę Boole'a A i jej ideał właściwy M. Naszym celem będzie teraz wprowadzenie na zbiorze $A/\equiv_M$ struktury algebry Boole'a, zgodnej z A. Wykarzemy w tym celu, że $\equiv_M$ jest kongruencją (jest zachowywana ze względu na operacje w A).

Fakt 4.4. *Dla każdej algebry Boole'a A i ideału właściwego M, relacja równoważności $\equiv_M$ jest kongruencją.*

Dowód. Rozważmy pary $p \equiv_M P, q \equiv_M Q$ elementów z A. Wystarczy sprawdzić, że:

- $p' \equiv_m P'$, bo $p' \triangle P' = p \triangle P$.
- $p \vee q \equiv_M P \vee Q$, bo

$$p \vee q \triangle P \vee Q = ((p \vee q) \wedge (P' \wedge Q')) \vee ((p' \wedge q') \wedge (P \vee Q)) =$$

$$((p \vee q) \wedge P' \wedge Q') \vee (p' \wedge q' \wedge (P \vee Q)) =$$

$$(((p \wedge P') \vee (q \wedge P')) \wedge Q') \vee (p' \wedge ((q' \wedge P) \vee (q' \wedge Q))) =$$

$$(p \wedge P' \wedge Q') \vee (q \wedge P' \wedge Q') \vee (p' \wedge q' \wedge P) \vee (p' \wedge q' \wedge Q),$$

  a jednocześnie $p \wedge P', q \wedge Q', p' \wedge P, q' \wedge Q \in M$. Wobec tego powyższe wyrażenie, jako $\vee$ obiektów z których każdy jest $\leqslant$ od pewnego z M, również należy do M.
- $p \wedge q \equiv_M P \wedge Q$, analogicznie.

■

Wobec tego iloraz $A/\equiv_M$ jest dobrze określoną algebrą Boole'a, z działaniami zadanymi przez reprezentantów klas abstrakcji. Iloraz taki oznaczać będziemy A/M. Co ważne, jest również określony homomorfizm $q_M \colon A \to A/M$, taki że $q_M(p) = [p]_{\equiv_M}$.

Warto w tym momencie zauważyć, że w związku z tym każdy ideał właściwy jest jądrem pewnego homomorfizmu.

Fakt 4.5. *Dla danej algebry Boole'a B, oraz epimorfizmu $f \colon B \to E$, E jest izomorficzne z $B/\ker(f)$.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $g\colon E \to B/\ker(f)$, następująco

$$g(f(a)) = [a]_{\equiv_M}.$$

Zauważmy, że jest to poprawna definicja, gdyż dla $f(a) = f(b)$, mamy $f(a \triangle b) = 0$, więc $a \triangle b \in \ker(f)$, więc $a \equiv_M b$.

Jak łatwo sprawdzić tak określone g jest homomorfizmem.

Zdefiniujmy dodatkowo funkcję $h\colon B/\ker(f) \to E$, następująco

$$h([a]_{\equiv_M}) = f(a).$$

Zauważmy, że jest to poprawna definicja, gdyż dla $[a]_{\equiv_M} = [b]_{\equiv_M}$, mamy $a \triangle b \in \ker f$, więc $f(a \triangle b) = 0$, więc $f(a) \triangle f(b) = 0$, więc $f(a) = f(b)$.

Jak łatwo sprawdzić tak określone h jest homomorfizmem.

Ponadto $g \circ h$ i $h \circ g$ są identycznościami odpowiednio na $B/\ker(f)$ i E, więc zbiory te są izomorficzne. ■

Literatura

[1] J. van Mill, *An invitation to $\beta\omega$*,
http://www.math.vu.nl/~vanmill/teaching/caput/caput.pdf, s 11–13.

[2] Wikipedia, *Algebry Boole'a*,
http://pl.wikipedia.org/wiki/Algebra_Boole'a.

[3] Wikipedia, *Twierdzenie Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a*,
http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Stone'a_o_reprezentacji_algebr_Boole'a