Zgrubne spojrzenie na przestrzenie metryczne

Michał Skrzypczak

3 stycznia 2008

Spis treści

1 Przestrzenie metryczne **2**

2 Przekształcenia zgrubne **7**

3 Zgrubna równoważność **10**

4 Podsumowanie **13**

5 Dodatki **14**

A Słowniczek **14**

Streszczenie

Poniższy referat jest zmodyfikowanym i wzbogaconym tłumaczeniem fragmentu książki [1].

Wprowadzamy tu podstawowe pojęcia zgrubnej geometrii w oparciu o przestrzenie metryczne. Jest to podejście podobne do definiowania pojęć topologicznych (ciągłość, zwartość, otoczenia, ...) wpierw w języku metrycznym, a dopiero potem na abstrakcyjnych przestrzeniach topologicznych.

Tekst jest wzbogacony pewną ilością przykładów (i kontr-przykładów), prezentujących własności wprowadzanych pojęć.

1 Przestrzenie metryczne

Zaczniemy od przypomnienia definicji podstawowych pojęć dotyczących przestrzeni metrycznych.

Definicja 1.1. *Przestrzenią metryczną, nazywamy zbiór X, wraz z odwzorowaniem $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ takim, że dla każdych $x, y, z \in X$:*

1. $d(x, y) \geqslant 0$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Czasami dopuszczamy, by odległość d przybierała wartość $+\infty$.

Definicja 1.2. *Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(a,b)\in A^2} d(a, b).$$

Zauważmy, że jeśli $\operatorname{diam}(A) = d$, to zbiór A jest zawarty w pewnej kuli domkniętej o promieniu d.

Czasami będziemy używać pojęcia odległości zbiorów. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $A, B \subseteq X$ to niepuste jej podzbiory. Wtedy definiuję

$$d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a, b).$$

Definicja 1.3. *Dla przestrzeni metrycznej X, oraz ciągłej funkcji $\gamma\colon [0, a] \to X$, definiujemy długość γ, jako supremum*

$$\ell(\gamma) = \sup \left(\sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right),$$

brane po wszystkich $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = a$.

Długość krzywej jest to liczba nieujemna, lub $+\infty$.

Przykład 1.4. *Krzywa $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ zadana wzorem $\gamma(t) = (t \cos(1/t), t)$ ma własność, że $\ell(\gamma) = +\infty$.*

Dowód. Weźmy $t_n = \frac{1}{n\pi}$ dla $n > 0$ i $t_0 = 1$. Oczywiście ciąg (t_n) jest zawarty w $[0, 1]$. Weźmy dowolne $N \in \mathbb{N}$ i rozważmy

$$\ell(\gamma) \geqslant d(\gamma(0), \gamma(t_N)) + d(\gamma(t_N), \gamma(t_{N-1})) + \ldots + d(\gamma(t_1), \gamma(t_0)) \geqslant$$

$$|t_N \cos(1/t_N) - t_{N-1} \cos(1/t_{N-1})| + \ldots + |t_2 \cos(1/t_2) - t_1 \cos(1/t_1)| \geqslant$$

$$2(t_N + t_{N-1} + \ldots + t_2) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty.$$

■

Jeżeli krzywa jest różniczkowalna (prawie wszędzie) to definicja długości krzywej poprzez funkcję ℓ, czy też poprzez całkę po module prędkości parametryzacji, są równoważne.

Lemat 1.5. *Dla danej funkcji różniczkowalnej* $\gamma\colon [0,a] \to \mathbb{R}^n$*, zachodzi*

$$\ell(\gamma) = \int_0^a |\gamma'(t)|\, dt.$$

Dowód. Wykażę, że dla każdego $t \in [0,a]$ zachodzi

$$\ell\left(\gamma|_{[0,t]}\right) = \int_0^t |\gamma'(t)|\, dt.$$

Oznaczmy lewą stronę tej równości jako $L(t)$, a prawą jako $P(t)$. Pozostaje wykazać, że $L(a) = P(a)$. Zauważmy, że ponieważ $|\ |$ jest ciągły, to

$$\frac{L(t+\varepsilon) - L(t)}{\varepsilon} \geqslant \left|\frac{\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)}{\varepsilon}\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |\gamma'(t)|\,. \tag{1.1}$$

Załóżmy, że na jakimś przedziale $[x,y]$ zachodzi $L(y) - L(x) > P(y) - P(x)$. Wtedy istnieje taka łamana $x = l_0 < l_1 < \ldots < l_n = y$, że $\sum_{i=1}^n |\gamma(l_i) - \gamma(l_{i-1})| > P(y) - P(x)$. W szczególności dla pewnych $c = l_k, d = l_{k+1}$, zachodzi

$$|\gamma(d) - \gamma(c)| > P(d) - P(c). \tag{1.2}$$

Niech $d(t) = \left\langle g'(t), \frac{\gamma(d)-\gamma(c)}{|\gamma(d)-\gamma(c)|}\right\rangle$. Oczywiście dla każdego t, $|\gamma'(t)| \geqslant d(t)$. Wobec tego

$$P(d) - P(c) = \int_c^d |\gamma'(t)|dt \geqslant \int_c^d d(t)dt = |\gamma(d) - \gamma(c)|.$$

Co daje sprzeczność z nierównością 1.2. Więc dla każdych x, y, $P(y) - P(x) \geqslant L(y) - L(x)$. Więc

$$|\gamma'(t)| \xleftarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{P(t+\varepsilon) - P(t)}{\varepsilon} \geqslant \frac{L(t+\varepsilon) - L(t)}{\varepsilon}. \tag{1.3}$$

Korzystając z nierówności 1.1 i 1.3 i twierdzenia o trzech ciągach

$$\frac{L(t+\varepsilon) - L(t)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |\gamma'(t)|.$$

Oczywiście $L(0) = P(0) = 0$, oraz $P'(t) = |\gamma'(t)| = L'(t)$. Więc $L(t) = P(t)$, w szczególności $L(a) = P(a)$. ■

Definicja 1.6. *Łukowo spójna przestrzeń metryczna jest przestrzenią z długością (ang. length space) jeśli odległość dowolnych dwóch punktów jest równa infimum długości krzywych je łączących.*

Przykładem przestrzeni z długością jest dowolny wypukły podzbiór $\mathbb{R}^n$.

Przykład 1.7. *Dla dowolnej przestrzeni metrycznej, łukowo spójnej (X, d), możemy określić nową metrykę $\delta(a, b)$, równą infimum długości krzywych w X, łączących a z b. Wtedy (X, δ) jest przestrzenią z długością.*

Ponadto naturalna funkcja $(X, \delta) \to (X, d)$ jest ciągła.

Dowód. δ jest metryką, nierówność trójkąta wynika z faktu, że krzywe łączące a z b i b z c, dają się połączyć do krzywej z a do c.

Ponadto dla każdych $a, b \in X$, zachodzi $\delta(a, b) \geqslant d(a, b)$, więc $\mathrm{id}_X \colon (X, \delta) \to (X, d)$ jest ciągła.

Przez $\ell_\rho(\gamma)$ oznaczam długość krzywej γ w metryce ρ.

Weźmy dowolne dwa punkty $x, y \in X$, oraz krzywą z x do y, $\gamma \colon [0, a] \to (X, d)$. Zauważmy, że γ jest ciągła jako funkcja w (X, δ), bo dla dowolnych $t, t_0 \in [0, a]$,

$$\delta(\gamma(t), \gamma(t_0)) \leqslant \ell\left(\gamma_{(t,t_0)}\right) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0,$$

gdzie $\gamma_{(t,t_0)}$, to γ obcięta to przedziału o końcach t, t_0.

Wykazaliśmy więc, że (X, δ) jest łukowo spójna. Wykażę teraz że $\ell_\delta(\gamma) = \ell_d(\gamma)$. Wtedy

$$\delta(x, y) = \inf_\nu \ell_d(\nu) = \inf_\nu \ell_\delta(\nu),$$

gdzie ν łączy x z y w (X, δ). Będzie to oznaczało, że (X, δ) jest przestrzenią z długością.

Skorzystajmy z definicji długości krzywej.

$$\ell_\delta(\gamma) = \sup_{0=t_0<\ldots<t_n=a} \sum_i \delta(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = \sup_{0=t_0<\ldots<t_n=a} \sum_i \inf_{\nu_i} \ell_d(\nu_i).$$

Zauważmy, że

$$\sum_i \inf_{\nu_i} \ell_d(\nu_i) \leqslant \ell_d(\gamma),$$

więc $\ell_\delta(\gamma) \leqslant \ell_d(\gamma)$. Z drugiej strony, powyższe supremum można szacować z dołu, przez jedną z liczb po których je bierzemy, mianowicie przez $\ell_d(\gamma)$. ■

Przy powyższym przykładzie przestrzeni $(X, d), (X, \delta)$ przekształcenie $\mathrm{id}_X \colon (X, d) \to (X, \delta)$ nie musi być ciągłe, kontrprzykład jest następujący.

Przykład 1.8. *Niech $A = \{(t, 0) : \ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$, $B = \{(\sin(1/t), t) : \ 0 < t \leqslant \frac{1}{2\pi}\}$, oraz niech C będzie to duży łuk łączący punkty $(0, 0), (0, \frac{1}{2\pi})$, a poza tym rozłączny ze zbiorami A, B. Wtedy niech przestrzeń (X, d) będzie to $A \cup B \cup C$ z metryką indukowaną z $\mathbb{R}^2$. Naturalne przekształcenie $(X, d) \to (X, \delta)$ nie jest ciągłe, bo ciąg $(\sin(2n\pi), \frac{1}{2n\pi})$ jest zbieżny do $(0, 0)$ w d, a nie jest w δ.*

Poniższy fakt pozwala efektywnie wykorzystać wiedzę, że dana przestrzeń jest przestrzenią z długością.

Fakt 1.9. *Dla dowolnej przestrzeni z długością (X, d), $x, z \in X$, oraz $d_1, d_2 > 0$ takich, że $d_1 + d_2 > d(x, z)$, istnieje takie $y \in X$, że $d(x, y) < d_1$ i $d(y, z) < d_2$.*

Dowód. Zakładam, że $d_2 < d(x,z)$ w przeciwnym przypadku teza jest oczywista dla $y = x$. Z definicji przestrzeni z długością istnieje wtedy droga γ z x do z o długości l mniejszej niż $d_1 + d_2$. Ponadto z ciągłości funkcji odległości istnieje ostatni taki moment t, że $d(\gamma(t), z) = d_2$. Ale $d(x, \gamma(t)) + d(\gamma(t), z) \leqslant l < d_1 + d_2$, więc $d(x, \gamma(t)) < d_1$. Wobec tego istnieje taki $\varepsilon > 0$, że wciąż $d(x, \gamma(t+\varepsilon)) < d_1$, a jednocześnie $d(\gamma(t+\varepsilon), z) < d_2$. Oznaczam $y = \gamma(t+\varepsilon)$. ■

Definicja 1.10. *Krzywa $\gamma\colon [0,a] \to X$ jest nazywana geodezyjną (ang. geodesic) gdy jest ona izometrią pomiędzy $[0,a]$, a X.*

Przestrzeń X nazywamy przestrzenią geodezyjną, jeśli każdą parę punktów można połączyć krzywą geodezyjną.

Oczywiście każda przestrzeń geodezyjna jest przestrzenią z długością. Implikacja w drugą stronę nie zachodzi czego dowodzi poniższy przykład.

Przykład 1.11. *Niech $K \subset \mathbb{R}^2$ będzie kołem domkniętym. Niech $L_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$. Niech $A = \bigcup_{a,b,c \in \mathbb{Q}} L_{a,b,c} \cap K$. Niech $o \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ i niech $i = (i_x, i_y)\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{o\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{o\}$ będzie inwersją o środku o. Niech $B = i(A)$. Twierdzę, że B z metryką indukowaną z $\mathbb{R}^2$ jest przestrzenią z długością, ale żadne dwa różne punkty w B nie dadzą się połączyć geodezyjną.*

Dowód. Odcinków składających się na A jest przeliczalnie wiele, więc B jest sumą przeliczalnie wielu łuków okręgów. Oznaczmy zbiór tych okręgów $\mathcal{G}$. Każdy okrąg daje w przecięciu z prostą co najwyżej dwa punkty, więc B nie zawiera żadnego odcinka. Wobec tego żadne dwa różne punkty B nie dadzą się połączyć krzywą geodezyjną.

Wykażę teraz, że B jest przestrzenią z długością. Zauważmy, że po pierwsze każdy okrąg z rodziny $\mathcal{G}$ przechodzi przez o. Po drugie dowolny okrąg przechodzący przez o i przecinający B ma promień większy niż pewne $r_{min} > 0$.

Skorzystam z poniższego lematu.

Lemat 1.12. *Dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$, taka że dla każdych $a, b \in B$, jeśli $d(a,b) < \delta$, to istnieje krzywa zawarta w B, łącząca a z b, długości co najwyżej $(1+\varepsilon)d(a,b)$.*

Dowód. Weźmy dowolne punkty $a, b \in K$. Istnieją pewne okręgi $O_a, O_b \in \mathcal{G}$, takie że $a \in O_a$ i $b \in O_b$. Połączmy a i b łukiem okręgu przechodzącego przez o, a, b, o promieniu r. Okrąg ten nie musi być w rodzinie $\mathcal{G}$. Długość tej krzywej wyniesie

$$L = 2r \arcsin\left(\frac{d(a,b)}{2r}\right)$$

co jest malejące ze względu na r, więc

$$L \leqslant 2r_{min} \arcsin\left(\frac{d(a,b)}{2r_{min}}\right).$$

Ponieważ $\arcsin'(0) = 1$, to dla $d(a,b)$ mniejszych od pewnej $\delta > 0$, powyższe wyrażenie jest mniejsze niż $(1+\varepsilon/2)d(a,b)$. Ponadto wybrany okrąg można dowolnie dobrze przybliżać okręgiem $O \in \mathcal{G}$. Pozostaje tylko uzupełnić tę łamaną łukami dwóch okręgów należących do $\mathcal{G}$, łączącymi odpowiednio O_a z O w pobliżu a i O z O_b w pobliżu b. Możemy to zrobić dowolnie małym kosztem, tak by uzyskana łamana (składająca się z łuków pięciu okręgów) była nie dłuższa niż $(1+\varepsilon)d(a,b)$. ∎

Weźmy dowolne $c, d \in B$, oraz $E > 0$. Skonstruuję krzywą zawartą w B, długości większej niż $(1+E)d(c,d)$. Niech δ będzie dobrana jak w powyższym lemacie 1.12, do $\varepsilon = 1 - \sqrt{1+E}$. Niech $c = a_1, a_2, \ldots, a_n = d$ będzie łamaną zawartą w B, długości mniejszej niż $\sqrt{1+E}d(c,d)$, składającą się z odcinków krótszych niż δ. Każdy z odcinków mogę połączyć krzywą zawartą w B wydłużając go co najwyżej $\sqrt{1+E}$ krotnie. Gdy je wszystkie połączę, uzyskam krzywą długości co najwyżej $(1+E)d(c,d)$, co chciałem osiągnąć.

Wobec tego każde dwa punkty można łączyć krzywą zawartą w B, długości dowolnie bliskiej odległości tych punktów. Więc B jest przestrzenią z długością. ∎

Jedyne geodezyjne podzbiory $\mathbb{R}^n$ to zbiory wypukłe, bo jedyne geodezyjne w $\mathbb{R}^n$ to odcinki. W przestrzeni z metryką miasto może być kontinuum różnych geodezyjnych między dwoma punktami.

Definicja 1.13. *Funkcja f pomiędzy przestrzeniami topologicznymi jest właściwa (ang. proper) jeśli przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów zwartych są prezwarte.*

Definicja 1.14. *Przestrzeń metryczna X jest właściwa (ang. proper), jeśli każdy domknięty i ograniczony podzbiór X jest zwarty.*

Definicja 1.15. *Przestrzeń topologiczna jest lokalnie zwarta, jeśli każdy punkt x, wraz z pewnym otoczeniem, należy do pewnego zbioru zwartego.*

Fakt 1.16. *Przestrzeń metryczna (X,d) jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $x \mapsto d(x_0, x)$ jest właściwa dla każdego (jakiegoś) $x_0 \in X$.*

Dowód. Dowód w prawą stronę jest oczywisty.

Pozostaje wykazać, że jeśli $\delta = x \mapsto d(x_0, x)$ jest funkcją właściwą dla jakiegoś $x_0 \in X$, to (X,d) jest przestrzenią właściwą. Weźmy dowolny zbiór domknięty i ograniczony K w X. Dla pewnego $R > 0$ $K \subseteq \overline{B}(x_0, R)$. Jednak $\overline{B}(x_0, R) = \delta^{-1}(R)$ jest zwarte więc K też jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. ∎

Twierdzenie 1.17 (Hopfa-Rinowa)**.** *Zachodzą następujące trzy własności przestrzeni metrycznych.*

a) *Każda zupełna, lokalnie zwarta przestrzeń z długością jest właściwa.*

b) *Każda właściwa przestrzeń z długością jest zupełna i lokalnie zwarta.*

c) *Wszystkie powyższe przestrzenie są geodezyjne.*

Dowód. a) Ustalmy punkt $x_0 \in X$. Niech U będzie to zbiór tych $r \geqslant 0$, że $\overline{B}(x_0, r)$ jest zwarta. Oczywiście $0 \in U$, z lokalnej zwartości U jest otwarty, oraz oczywiście U jest wypukły. Więc $U = \mathbb{R}^+$ i mamy tezę, lub też istnieje $a > 0$ takie, że $U = [0, a)$. Wykażemy, że druga możliwość prowadzi do sprzeczności.

Weźmy ciąg $(x_n) \subseteq \overline{B}(x_0, a)$. Korzystając z faktu 1.9 istnieje multi ciąg $y_{n,k} \in \overline{B}(x_0, a - 1/k)$, taki że $d(x_n, y_{n,k}) < 2/k$. Dla każdego ustalonego k ciąg $(y_{n,k})_n$ ma zbieżny podciąg, bo odpowiednia kula jest zwarta. Korzystając z metody przekątniowej znajdziemy podciąg n_j, taki że $y_{n_j,k}$ zbiega po j dla każdego k. Proste szacowanie dowodzi, że x_{n_j} jest ciągiem Cauchy'ego, więc zbiega, bo przestrzeń jest zupełna. Oczywiście granica leży w zbiorze domkniętym $\overline{B}(x_0, a)$, co dowodzi, że zbiór ten jest zwarty (z dowolnego ciągu jego elementów wybraliśmy podciąg zbieżny).

b) wynika natychmiast z definicji przestrzeni właściwych.

c) jest prostą konsekwencją warunku Arzela-Ascoli'ego na zwartość przestrzeni funkcyjnej z metryką sup. ∎

Definicja 1.18. *Dla X, Y przestrzeni metrycznych, przekształcenie $f\colon X \to Y$ nazywamy przekształceniem Lipschitz'a ze stałą L, gdy*

$$\forall_{x,y \in X}\ d_Y(f(x), f(y)) \leqslant L \cdot d_X(x, y).$$

Homeomorfizm $h\colon X \to Y$ jest bi-lipschitzowski, gdy zarówno h, jak i h^{-1} są lipschitzowskie dla pewnych stałych L_1, L_2.

2 Przekształcenia zgrubne

Jeżeli interesują nas tylko topologiczne własności przestrzeni metrycznej, możemy zastąpić daną metrykę d, przez $d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$, a topologia indukowana pozostanie ta sama. Niestety postępując w ten sposób tracimy kluczowe informacje na temat rozmiaru i globalnych własności naszej przestrzeni.

Zgrubna geometria próbuje podejść do rzeczy dokładnie odwrotnie, zaniedbać małe - lokalne różnice, a skupić się na globalnych.

Problem 2.1. *Czy tak jak przejście od metryki $d(a, b)$, do $d'(a, b) = \min(d(a, b), 1)$ dawało przestrzeń równoważną topologicznie, tak przejście do*

$$d''(x, y) = \max(d(x, y), 1), \quad d''(x, x) = 0$$

da przestrzeń równoważną zgrubnie?

Po wprowadzeniu odpowiednich pojęć odpowiemy na powyższe pytanie i wykażemy, że ze zgrubnego punktu widzenia przestrzenie $\mathbb{Z}$, oraz $\mathbb{R}$ są równoważne.

W większości dziedzin matematyki badanie nowego rodzaju przestrzeni zaczynamy od zdefiniowania funkcji, które w jakimś sensie zachowują własności danej struktury. W przypadku grup mamy homomorfizmy, dla przestrzeni liniowych przekształcenia liniowe, w topologii rozważamy przekształcenia ciągłe. Dlatego zaczniemy od definicji przekształceń zgrubnych.

Definicja 2.2. *Dla X, Y przestrzeni metrycznych, oraz funkcji $f\colon X \to Y$ niekoniecznie ciągłej, mówimy że f jest*

- *metrycznie właściwa (ang. proper), gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych, są ograniczone,*
- *bornologiczna (ang. bornologous) jeśli*

$$\forall_{R>0}\exists_{S>0}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S,$$

- *zgrubna (ang. coarse), jeśli spełnia obie powyższe własności.*

Jeśli X, Y są przestrzeniami właściwymi, a f jest ciągła, to zdefiniowane powyżej pojęcie funkcji *metrycznie właściwej* jest równoważne pojęciu funkcji *właściwej* z definicji 1.13.

Od teraz funkcje metrycznie właściwe nazywać będziemy w skrócie właściwymi.

Zauważmy, że:

- inwersja na przestrzeni $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ nie jest ani właściwa, ani bornologiczna,
- $n \mapsto 0$ nie jest właściwa, ale jest bornologiczna,
- natomiast $n \mapsto n^2$, jest właściwa, ale nie bornologiczna,

Lemat 2.3. *Wszystkie przestrzenie metryczne wraz z odwzorowaniami zgrubnymi, funkcjami identycznościowymi i złożeniem funkcji stanowią kategorię.*

Dowód. Ponieważ obiekty to zbiory z dodatkową strukturą, a strzałki to funkcje, wobec tego pozostaje wykazać, że

- dla dowolnej przestrzeni metrycznej X, id_X jest przekształceniem zgrubnym,
- złożenie funkcji zgrubnych jest funkcją zgrubną.

Oba powyższe fakty są oczywiste. ∎

Definicja 2.4. *Funkcję $f\colon X \to Y$ nazwiemy lipschitzowską w wielkiej skali (ang. large scale Lipschitz) gdy istnieją dodatnie stałe c, A, takie że dla dowolnych $x, y \in X$, zachodzi*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x,y) + A.$$

Oczywiście każda funkcja lipschitzowska w wielkiej skali jest bornologiczna. W przeciwną stronę implikacja nie zachodzi, co prezentuje następujący przykład.

Przykład 2.5. *Rozważmy przestrzenie* $X = (\mathbb{N}, d_1)$*, gdzie* $d_1(n,m) = n+m$ *dla* $n \neq m$ *i* $d_1(n,n) = 0$*, oraz* $Y = (\mathbb{N}, d_2)$*, gdzie* $d_2(n,m) = n^2+m^2$ *dla* $n \neq m$ *i* $d_2(n,n) = 0$*, oraz funkcję* $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$*. Twierdzę, że* X, Y *są metryczne,* f *jest bornologiczna, ale nie jest lipschitzowska w wielkiej skali.*

Dowód. X, Y są oczywiście przestrzeniami metrycznymi.

Ponadto dla dowolnego $R > 0$, możemy wziąć $S = R^2$. Warunek $d_1(x,y) < R$, oznacza że $x+y < R$. Wtedy $d_2(x,y) = x^2+y^2 < (x+y)^2 < R^2 = S$. Wobec tego f jest bornologiczna.

Jednak dla $x = 0$, oraz $y_n = n$, $d_1(x, y_n) = n$, oraz $d_2(x, y_n) = n^2$, więc nie mogą istnieć $c, A > 0$, takie że $n^2 \leqslant cn + A$. Wobec tego f nie jest lipschitzowska w wielkiej skali. ■

W przypadku przestrzeni z długością zachodzi jednak poniższy lemat.

Lemat 2.6. *Jeśli* X *jest przestrzenią z długością, a* Y *dowolną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnej funkcji* $f\colon X \to Y$ *poniższe własności są równoważne*

a) *f jest bornologiczna,*

b) *f jest lipschitzowska w wielkiej skali,*

c) *istnieją* $R, S > 0$*, takie że* $d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$*.*

Dowód. Oczywiście $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$. Pozostaje więc wykazać, że $c) \Rightarrow a)$.

Weźmy $R, S > 0$ jak w c). Określmy $c = 2\frac{S}{R}$, oraz $A = 2S$. Biorę dowolne $x, y \in X$. Ponieważ X jest przestrzenią z długością, więc możemy wziąć drogę $\gamma\colon [0,a] \to X$ z x do y, taką, że $\ell(\gamma) < d(x,y) + \frac{R}{2}$.

Ponieważ zbiór $[0,a]$ jest zwarty, a γ ciągła, istnieją takie liczby $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$, że

$$\forall_{i<N}\ d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = \frac{R}{2}, \quad d(\gamma(t_{N-1}), \gamma(t_N)) < R.$$

Wtedy

$$d(f(x), f(y)) = d(f(\gamma(t_0)), f(\gamma(t_N))) \leqslant$$
$$d(f(\gamma(t_0)), f(\gamma(t_1))) + \ldots + d(f(\gamma(t_{N-1})), f(\gamma(t_N))) < N \cdot S,$$

jednocześnie z definicji długości krzywej γ

$$(N-1) \cdot \frac{R}{2} \leqslant \ell(\gamma) \leqslant d(x,y) + \frac{R}{2},$$

czyli

$$(N-2)\frac{R}{2} \leqslant d(x,y),$$

korzystając z powyższych

$$d(f(x), f(y)) < N \cdot S = 2\frac{S}{R} \cdot (N-2)\frac{R}{2} + 2S \leqslant 2\frac{S}{R} \cdot d(x,y) + 2S.$$

■

3 Zgrubna równoważność

Aby w dalszym ciągu badać zgrubne własności przestrzeni, chcemy zdefiniować pojęcie zgrubnej równoważności, które pozwoli nam podzielić przestrzenie na klasy przestrzeni podobnych z naszego punktu widzenia.

Analogicznie do definicji równoległych funkcji homotopijnych w topologii, wprowadzamy następujące definicje.

Definicja 3.1. *Dwa przekształcenia f, g określone na dowolnym zbiorze X w przestrzeń metryczną Y są bliskie (ang. close) gdy zbiór*

$$\{d(f(x), g(x)) : \ x \in X\}$$

jest ograniczony.

Definicja 3.2. *Dwie przestrzenie metryczne X, Y są zgrubnie równoważne (ang. coarsely equivalent) gdy istnieją funkcje zgrubne $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$, takie że ich złożenia są bliskie identycznościom.*

Oczywiście zgrubna równoważność jest relacją równoważności na klasie przestrzeni metrycznych.

Poniżej wprowadzamy kilka definicji, które pomogą nam wykazać fakt 3.8.

Definicja 3.3. *Dla przestrzeni metrycznych X, Y, funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy efektywnie właściwą (ang. effectively proper), jeśli dla każdego $R > 0$ istnieje $S > 0$, takie że przeciwobraz wzdłuż f dowolnej kuli o promieniu R w Y, zawiera się w pewnej kuli o promieniu S w X.*

Fakt 3.4. *Powyższy warunek można sformułować równoważnie*

$$\forall_{R>0}\exists_{S>0}\ d(f(x), f(y)) < R \Rightarrow d(x, y) < S.$$

Dowód. Jeśli f jest efektywnie właściwa, i $d(f(x), f(y)) < R$ to w szczególności $f(x), f(y) \in B(f(x), R)$, więc istnieje $z \in X$ takie, że $x, y \in B(z, S)$, ale wtedy $d(x, y) \leqslant 2S$.

Załóżmy teraz, że f spełnia warunek

$$\forall_{R>0}\exists_{S>0}\ d(f(x), f(y)) < R \Rightarrow d(x, y) < S.$$

Weźmy dowolną kulę $K = B(z, \frac{R}{2}) \subseteq Y$. Jeśli $K \cap f(X) = \emptyset$, to dowolne $S > 0$ jest ok. Jeśli nie, to istnieje $x \in X$, takie że $f(x) \in K$. Wtedy $K \subseteq B(f(x), R)$. Czyli $f^{-1}(K) \subseteq B(x, S)$. ■

Oczywiście każda funkcja efektywnie właściwa jest właściwa, ale w drugą stronę ta własność nie zachodzi.

Przykład 3.5. *Funkcja $\sqrt{x}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jest właściwa, ale nie jest efektywnie właściwa.*

Definicja 3.6. *Dla przestrzeni metrycznych* X, Y*, funkcję* $f\colon X \to Y$ *nazwiemy efektywnie zgrubną (ang. rough), jeśli jest ona efektywnie właściwa i bornologiczna.*

Funkcje efektywnie zgrubne są oczywiście szczególnym typem funkcji zgrubnych.

Definicja 3.7. *Podzbiór* A *przestrzeni metrycznej* X *nazwiemy zgrubnie gęstym, jeśli*

$$\exists_{D>0}\forall_{x\in X}\exists_{a\in A}\ d(x,a) < D.$$

Możemy teraz udowodnić dosyć istotny fakt.

Fakt 3.8. *Jeśli* $f\colon X \to Y$ *jest funkcją efektywnie zgrubną, oraz* $f(X)$ *jest zgrubnie gęsty w* Y*, to* f *jest zgrubną równoważnością.*

Dowód. Oczywiście f jest funkcją zgrubną.

Niech D będzie parametrem zgrubnej gęstości $f(X)$ w Y. Definiuję $g\colon Y \to X$ w następujący sposób: niech $g(y) \in f^{-1}(z)$, gdzie $z \in f(X)$, oraz $d(y,z) < D$.

Właściwość g wynika z bornologiczności f dla R będącego średnicą danego zbioru ograniczonego w X.

Bornologiczność g z kolei, to konsekwencja efektywnej zgrubności f, pogarszanej o stały czynnik $2D$.

Wykażę, że $g \circ f$ jest bliskie id_X. Skorzystajmy z definicji efektywnej zgrubności f dla $R = D$, otrzymując jakąś stałą $S > 0$. Wtedy $d(f(g(f(x))), f(x)) < D$, więc $d(g(f(x)), x) < S$.

Teraz pora wykazać, że $f \circ g$ jest bliskie id_Y. Jednak $d(f(g(y)), y) < D$ z definicji g. ∎

Poniższy fakt dowodzi, że każda zgrubna równoważność przestrzeni ma powyższą postać.

Fakt 3.9. *Jeśli funkcje* $f\colon X \to Y$*,* $g\colon Y \to X$ *są zgrubną równoważnością* X *i* Y*, to* $f(X)$ *jest zgrubnie gęste w* Y *i* f *jest efektywnie właściwa.*

Dowód. Bliskość funkcji $h, j\colon A \to B$ implikuje między innymi, że $h(A)$ jest zgrubnie gęsty w $j(A)$. Wobec tego, skoro $f \circ g$ jest bliskie id_Y, to $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y.

Wykażę teraz efektywną właściwość f. Niech $g \circ f$ będzie D bliskie id_X.

Weźmy dowolne $R > 0$ i $y \in Y$. Niech $A = f^{-1}(B(y,R))$. Oszacuję z góry $\mathrm{diam}(A)$ w sposób zależny tylko od R. Oznaczmy przez S szacowanie odpowiadające $2R$ w definicji bornologiczności g. Wtedy $\mathrm{diam}(g(B(y,R))) < S$. Weźmy $x, y \in A$. Wtedy $d(g \circ f(x), g \circ f(y)) \leqslant S$. Ale $d(g \circ f(x), x) < D$ i $d(g \circ f(y), y) < D$, więc $\mathrm{diam}(A) \leqslant S + 2D$. Istnieje więc kula o promieniu $2S + 4D$ pokrywająca A. ∎

Dzięki faktowi 3.8 możemy przeprowadzić krótkie i zgrabne dowody pewnych faktów.

Po pierwsze odpowiadamy twierdząco na postawiony problem 2.1. Otóż id_X jako funkcja $(X, d) \to (X, d'')$ jest oczywiście bornologiczna, jest efektywnie właściwa, a $\mathrm{id}_X(X) = X$. Spełnia więc założenia faktu 3.8, czyli jest zgrubną równoważnością.

Po wtóre wykażemy poniższy fakt.

Fakt 3.10. *Przestrzenie metryczne $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}$ są zrubnie równoważne.*

Dowód. Weźmy $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Oczywiście $i(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ jest zgrubnie gęste w $\mathbb{R}$. Ponadto i jest bornologiczne i efektywnie właściwe. Więc i jest zgrubną równoważnością. ■

Fakt 3.11. *Dla każdego $n > 1$, przestrzenie metryczne $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ nie są zgrubnie równoważne.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że istnieje zgrubna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, będąca zgrubną równoważnością $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$. Wtedy na mocy faktu 3.9, $f(\mathbb{R})$ jest D zgrubnie gęste w $\mathbb{R}^n$ dla pewnego $D > 0$ i f jest efektywnie właściwa.

Niech $\frac{S_1}{2}$ odpowiada $R = \frac{3}{2}D$ w definicji efektywnej właściwości f. Wynika z tego w szczególności, że jeśli $d(x, y) > S_1$, to $d(f(x), g(x)) > 3D$. Zauważmy, że $d((-\infty, -S_1], [S_1, +\infty)) > S_1$, więc

$$d(f((-\infty, -S_1]), f([S_1, +\infty))) > 3D.$$

Z drugiej strony, skoro f jest zgrubna, to istnieje takie S_2, że $f([-S_1, S_1]) \subseteq B(0, S_2)$. Niech

$$A = f((-\infty, -S_1]) \cap \mathbb{R}^n \setminus B(0, S_2),$$

$$B = f([S_1, +\infty)) \cap \mathbb{R}^n \setminus B(0, S_2).$$

Pozostaje zauważyć, że zbiory A, B są nieograniczone, gdyby tak nie było, to przeciwobraz zbioru ograniczonego byłby nieograniczony w $\mathbb{R}$. Ponadto $d(A, B) > 3D$ i $A \cup B$ jest D gęste w $\mathbb{R}^n \setminus B(0, S_2)$.

Niech $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) \leqslant D\}$, oraz $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, B) \leqslant D\}$. Oczywiście $d(\overline{A}, \overline{B}) > D$ i zbiory te są niepuste. Ponieważ $\mathbb{R}^n \setminus B(0, S_2 + D)$ jest spójna, to istnieje $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, S_2 + D) \setminus \overline{A} \setminus \overline{B}$. Wtedy $d(x, A), d(x, B) > D$, czyli $d(x, f(\mathbb{R})) > D$ co przeczy D-gęstości $f(\mathbb{R})$ w $\mathbb{R}^2$. ■

Przy okazji zaprezentujmy rozwiązanie przykładowego zadania.

Problem 3.12. *Niech $X = \{2^{2^n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ z metryką indukowaną z $\mathbb{R}$. Wykazać, że*

a) *każda bijekcja $f\colon X \to X$ jest zgrubną równoważnością,*

b) *bijekcja $f\colon X \to X$ jest bi-lipschitzowska wtedy i tylko wtedy, gdy jest identycznością poza zbiorem skończonym.*

Dowód. Weźmy dowolną bijekcję $f\colon X \to X$.

a) Oczywiście $f(X)$ jest gęste w X. Ponadto dla każdego $R > 0$ jest tylko skończenie wiele par $(a, b) \subseteq X$ takich, że $d(a, b) < R$, więc f jest bornologiczne i jest efektywnie właściwe. Więc f jest zgrubną równoważnością.

b) Jeśli f jest identycznością poza zbiorem skończonym, to by wyznaczyć stałą Lipschitza f i f^{-1} wystarczy rozpatrzyć skończenie wiele przypadków, więc taka stała istnieje.

Załóżmy, że f nie jest identycznością na zbiorze nieskończonym $A \subseteq X$. Rozważmy zbiór $U = \{n \in X : \ f(n) > n\}$. Wykażę, że zbiór U jest nieskończony.

Gdyby U był skończony, niech $M = \max(f(U))$. Zauważmy, że

$$f(\{n \in X : \ n \leqslant M\}) = \{n \in X : \ n \leqslant M\}.$$

Niech $N = \min\{k \in X : \ k > M \wedge f(k) < k\}$. Zbiór z którego bierzemy minimum jest niepusty, bo funkcja działa nie identycznościowo na zbiorze nieskończonym, a działa rosnąco tylko dla argumentów mniejszych niż M. Ale w takim razie

$$f(\{n \in X : \ n \leqslant N\}) = \{n \in X : \ n < N\},$$

co daje sprzeczność z bijektywnością f.

Wobec tego wiem, że U jest nieskończony. Niech $u_0 < u_1 < \ldots$ takie, że $U = \{u_0, u_1, \ldots\}$. Rozważmy dla dostatecznie dużych i

$$\frac{f(u_i) - f(2)}{u_i - 2} \geqslant \frac{2^{2^{u_i}} - f(2)}{u_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty,$$

wobec czego nie istnieje stała Lipschitza L dla funkcji f.

■

4 Podsumowanie

W ramach tego referatu dokonujemy klasyfikacji funkcji pomiędzy przestrzeniami metrycznymi ze względu na ich własności metryczne. Oto lista wprowadzonych definicji.

1. f jest lipschitzowska, gdy

$$\exists_{L>0}\ d(f(x), f(y)) \leqslant L \cdot d(x, y),$$

2. f jest lipschitzowska w wielkiej skali, gdy

$$\exists_{L,A>0}\ d(f(x), f(y)) \leqslant L \cdot d(x, y) + A,$$

3. f jest bornologiczna, gdy

$$\forall_{R>0}\exists_{S>0}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x0 < f(y)) < S,$$

4. f jest (topologicznie) właściwa, gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów zwartych są prezwarte,
5. f jest (metrycznie) właściwa, gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych są ograniczone,
6. f jest efektywnie właściwa, gdy

$$\forall_{R>0}\exists_{S>0}\ d(f(x), f(y)) < R \Rightarrow d(x,y) < S,$$

7. f jest zgrubna, gdy jest metrycznie właściwa i bornologiczna,
8. f jest efektywnie zgrubna, gdy jest efektywnie właściwa i bornologiczna.

Zauważmy, że definicje $1, 2, 3$ opisują jak bardzo funkcja rozciąga przestrzeń, definicje $4, 5, 6$ opisują jak funkcja skleja-zgniata przestrzeń, a $7, 8$ to kombinacje opisujące jak funkcja robi i to i to.

Ponadto $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ i $5 \Rightarrow 6$, a co za tym idzie $7 \Rightarrow 8$. 4 jest definicją topologiczną, przy pewnych założeniach równoważną 5. Implikacje w drugą stronę nie zachodzą.

Oprócz tego wykazaliśmy bardzo istotny i przydatny fakt.

Fakt 4.1. *Dla danych przestrzeni metrycznych X, Y i funkcji $f\colon X \to Y$, f jest zgrubną równoważnością X i Y, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest efektywnie zgrubna i $f(X)$ jest zgrubnie gęste w Y.*

5 Dodatki

A Słowniczek

- funkcja efektywnie właściwa – effectively proper funcion,
- funkcja efektywnie zgrubna – rough,
- funkcja właściwa – proper function,
- funkcja bornologiczna – bornologous function,
- funkcja zgrubna – coarse function,
- funkcja lipschitzowska w wielkiej skali – large scale Lipschitz function
- funkcje bliskie – close functions,
- geodezyjna – geodesic,
- przestrzenie zgrubnie równoważne – coarsely equivalent spaces,
- przestrzeń lokalnie zwarta – locally compact space,

- przestrzeń metryczna – metric space,
- przestrzeń właściwa – proper space,
- przestrzeń z długością – length space,
- przestrzeń zupełna – complete space,
- średnica – diameter,
- zbiór zgrubnie gęsty – coarsely dense set.

Literatura

[1] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003), s 3–7.