ZŁO* — ćwiczenia 8

Zupełność, ciąg dalszy

Zadanie 1 ($\Diamond$)**.** W problemie Colorful Graph Motif dany jest graf G oraz funkcja kolorująca $\phi\colon V(G) \to \mathcal{C}$ dla pewnego (dowolnie dużego) zbioru kolorów $\mathcal{C}$. Pytamy się o istnienie spójnego podgrafu G, który ma dokładnie jeden wierzchołek w każdym z kolorów z $\mathcal{C}$. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny.

Bonus: Wykaż, że problem jest NP*-zupełny nawet jeśli G jest drzewem o maksymalnym stopniu* 3.

Zadanie 2 ($\Diamond$)**.** Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny. Dany jest alfabet Σ (dowolnie duży, dany na taśmie) oraz wyrażenie regularne r nad Σ. Pytanie: czy istnieje słowo w języku generowanym przez r, które zawiera wszystkie litery z Σ.

Zadanie 3 ($\Diamond$)**.** Wykaż, że L jest zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego wtw. gdy $\mathsf{L} = \mathsf{NL}$.

Zadanie 4. Gra Geography rozgrywa się na grafie skierowanym G pomiędzy graczami $\forall$ i $\exists$. Każdy wierzchołek G należy do jednego z graczy. Na początku kładziemy kamień na wierzchołku startowym v_0. W każdej rundzie patrzymy, kto jest właścicielem wierzchołka na którym stoi kamień, i tenże właściciel musi ruszyć kamień wzdłuż jednej z krawędzi wychodzących z wierzchołka, przy czym nie może przesunąć kamienia na wierzchołek, na którym kamień stał już wcześniej w czasie rozgrywki. Jeśli gracz nie może wykonać ruchu, to przegrywa. Rozważmy problem: dana plansza G, pytamy się, czy $\exists$ wygrywa rozgrywkę. Wykaż, że ten problem jest PSPACE-zupełny.

Zadanie 5. Wykaż, że problem niepustości przecięcia dla automatów deterministycznych na słowach (dane automaty $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$, pytamy się czy $\bigcap_{i=1}^m L(\mathcal{A}_i) \neq \emptyset$) jest PSPACE-zupełny. A jak jest dla niedeterministycznych?

Zadanie 6. Wykaż, że problem uniwersalności dla niedeterministycznych automatów na słowach jest PSPACE-zupełny.

Zadanie 7. Rozważmy następujący problem obliczeniowy: mamy dany niedeterministyczny automat na słowach $\mathcal{A}$ oraz słowo w nad alfabetem wejściowym $\mathcal{A}$. Pytamy się, czy $\mathcal{A}$ akceptuje w. Wykazać, że ten problem da się rozstrzygnąć w deterministycznej pamięci $\mathcal{O}(\log|\mathcal{A}| \cdot \log|w|)$.

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, to $\mathsf{EXPTIME} = \mathsf{NEXPTIME}$.