ZŁO* — ćwiczenia 7

Zupełność dla NL i NP

Zadanie 1. Wykaż, że problem Directed Reachability jest zupełny dla NL pod L-redukcjami nawet jeśli założymy, że dany graf jest acykliczny i każdy wierzchołek ma całkowity stopień co najwyżej 3.

Zadanie 2. Wykaż, że klasa $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{DSPACE}[\log^k n]$ nie ma problemu zupełnego pod L-redukcjami.

Zadanie 3. Niech φ będzie formułą w 2CNF, oraz niech x będzie zmienną. Poprzez *propagację* ustalenia $x = \top$ rozumiemy zwartościowanie x na prawdę, a następnie, dopóki istnieją w formule klauzule o 1 literale, ustawianie wyforsowanych wartości tych zmiennych. Powiemy, że propagacja jest *zgodna* jeśli nie prowadzi do powstania pustej klauzuli (która nie może być spełniona).

Załóżmy, że propagacja ustalenia $x = \top$ jest zgodna, oraz produkuje nową formułę φ'. Udowodnij, że φ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy φ' jest spełnialna.

Zadanie 4. Na podstawie poprzedniego zadania, zaproponuj algorytm dla problemu 2SAT (spełnialność formuł w 2CNF) o liniowej złożoności czasowej.

Zadanie 5. Udowodnij, że problem 2SAT jest zupełny dla coNL pod L-redukcjami.

Zadanie 6. Rozważmy problem następujący problem MinCut. Dany jest graf nieskierowany G, wierzchołki s, t, oraz liczba k. Pytanie: czy istnieje cięcie wierzchołkowe separujące s od t o wielkości nie większej niż k. Wykazać, że problem ten da się rozwiązać w pamięci $\mathcal{O}(k \cdot \log n)$.

Uwaga: Undirected Reachability *jest w* L.

Problem otwarty: Czy ten problem da się rozwiązać w pamięci $f(k) + \mathcal{O}(\log n)$ dla jakiejkolwiek obliczalnej funkcji f?

Zadanie 7. W problemie Clique dany jest graf G i liczba k; pytamy się czy w G istnieje k parami sąsiadujących wierzchołków. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny.

Zadanie 8. W problemie Subset Sum dane jest n nieujemnych liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, oraz nieujemna liczba całkowita t. Pytamy się, czy istnieje podzbiór $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taki, że $\sum_{i \in S} x_i = t$. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny, jeśli liczby zapisane są binarnie. Czy problem jest nadal NP-zupełny, jeśli są one zapisane unarnie?

Zadanie 9. W problemie Colorful Graph Motif dany jest graf G oraz funkcja kolorująca $\phi\colon V(G) \to \mathcal{C}$ dla pewnego (dowolnie dużego) zbioru kolorów $\mathcal{C}$. Pytamy się o istnienie spójnego podgrafu G, który ma dokładnie jeden wierzchołek w każdym z kolorów z $\mathcal{C}$. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny.

Bonus: Wykaż, że problem jest NP*-zupełny nawet jeśli G jest drzewem o maksymalnym stopniu* 3.

Zadanie 10. Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny. Dany jest alfabet Σ (dowolnie duży, dany na taśmie) oraz wyrażenie regularne r nad Σ. Pytanie: czy istnieje słowo w języku generowanym przez r, które zawiera wszystkie litery z Σ.

Zadanie 11 (♠). Wykaż, że L jest zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego wtw. gdy $\mathsf{L} = \mathsf{NL}$.