# ZŁO$^\star$ — ćwiczenia 5

Obwody logiczne, ciąg dalszy

*Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.*

## Przypomnienie definicji

Klasa $\mathsf{AC}^k$ obejmuje funkcje $\{0,1\}^\star \to \{0,1\}$ obliczalne przez wielomianowe obwody o głębokości $\mathcal{O}(\log^k n)$ używające bramek $\mathsf{NOT}$ oraz $\mathsf{AND}$ i $\mathsf{OR}$ o nieograniczonym stopniu wejściowym. Klasa $\mathsf{NC}^k$ obejmuje funkcje $\{0,1\}^\star \to \{0,1\}$ obliczalne przez wielomianowe obwody o głębokości $\mathcal{O}(\log^k n)$ używające bramek $\mathsf{NOT}$ oraz $\mathsf{AND}$ i $\mathsf{OR}$ o stopniu wejściowym równym 2. Oznaczamy $\mathsf{AC} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathsf{AC}^k$ i $\mathsf{NC} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathsf{NC}^k$. Ciąg obwodów $(C_n)_{n \geqslant 0}$ nazywamy *jednorodnym* jeśli dla danego $n$, obwód $C_n$ można obliczyć w $\mathsf{L}$. Klasy $\mathsf{uniform}\,\mathsf{AC}^k$ i $\mathsf{uniform}\,\mathsf{NC}^k$ definiujemy analogicznie do $\mathsf{AC}^k$ i $\mathsf{NC}^k$, tylko dla jednorodnych ciągów obwodów.

Przez *rozmiaru* obwodu rozumiemy sumaryczną liczbę drutów.

## Zadania

**Zadanie 1.** Wykaż, że dla każdego obwodu istnieje równoważny obwód, który używa bramek $\mathsf{NOT}$ tylko bezpośrednio nad bramkami wejściowymi, i jest rozmiaru liniowego względem rozmiaru oryginalnego obwodu.

**Zadanie 2 ($\diamondsuit$).** Wykaż, że każdy język regularny jest w $\mathsf{NC}^1$.

**Zadanie 3 ($\diamondsuit$).** Język regularny jest *bezgwiazdkowy* (ang. *star-free*) jeśli można go opisać wyrażeniem regularnym nie używającym gwazdki Kleene'ego, tzn. opisywalnym gramatyką

$$R \to \alpha \mid \emptyset \mid (\neg R) \mid (RR) \mid (R + R),$$

gdzie $\alpha$ to symbol alfabetu. Udowodnij, że każdy język bezgwiazdkowy jest w $\mathsf{AC}^0$.

**Zadanie 4 ($\diamondsuit$).** Język $L$ nad alfabetem $\Sigma$ nazwiemy definiowalnym w logice pierwszego rzędu jeśli istnieje formuła $\varphi$ nad sygnaturą $\Sigma \cup \{<\}$ o następującej własności: jeśli dane słowo nad $\Sigma$ rozważymy jako strukturę w której każdy $\sigma \in \Sigma$ jest interpretowany jako relacja unarna kodująca pozycje na których stoi $\sigma$, zaś relacja $<$ jest interpretowana jako relacja binarna kodująca porządek w słowie, to $\varphi_L$ rozpoznaje dokładnie słowa z języka $L$. Wykaż, że każdy język definiowalny w logice pierwszego rzędu należy do $\mathsf{AC}^0$.

**Zadanie 5.** Skonstruuj ciąg obwodów w $\mathsf{AC}^0$ obliczający następującą funkcję: dla dwóch binarnych ciągów wejściowych $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$, reprezentujących zapis binarny dwóch liczb $a$ i $b$, obliczyć ciąg binarny $(z_1, \ldots, z_{n+1})$, reprezentujący zapis binarny liczby $a + b$.

**Zadanie 6** ($\diamondsuit$)**.** Skonstruuj obwód o $\mathcal{O}(n)$ drutach i stałej głębokości, który ma $n$ wejściowych bramek $x_1, \ldots, x_n$ i $n$ wyjściowych bramek $y_1, \ldots, y_n$, oraz wartość bramki wyjściowej $y_i$ jest równa $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_i$. Możesz używać bramek $\mathsf{AND}$ i $\mathsf{OR}$ o nieograniczonym stopniu wejściowym, oraz bramek $\mathsf{NOT}$.

**Zadanie 7.** Udowodnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$, dla dostatecznie dużych $n$ można znaleźć funkcję $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, która nie ma obwodu rozmiaru co najwyżej $1000 \cdot \frac{2^n}{n^{1+\varepsilon}}$.

**Zadanie 8.** Niech $t(n) \geqslant n$ będzie konstruowalna w pamięci $\mathcal{O}(\log t(n))$. Wykaż, że każdy język rozpoznawalny w czasie $t(n)$ da się rozpoznać przy pomocy obwodu wielkości $\mathrm{poly}(t(n))$, konstruowanego przez algorytm działający w pamięci $\mathcal{O}(\log t(n))$.

**Zadanie 9.** Wykaż, że $\mathsf{uniform\,NC} = \mathsf{uniform\,AC} \subseteq \mathsf{P}$.

**Zadanie 10.** Wykaż, że $\mathsf{uniform\,NC}^1 \subseteq \mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{uniform\,AC}^1$.