ZŁO* — ćwiczenia 12

Randomizacja

Klasa RP obejmuje problemy, dla których istnieje algorytm randomizowany, który każdą yes-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$, a każdą no-instancję zawsze odrzuca. Klasa BPP obejmuje problemy, dla których istnieje algorytm randomizowany, który każdą yes-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej $3/4$, a każdą no-instancję odrzuca z prawdopodobieństwem co najmniej $3/4$. Klasa PP obejmuje problemy, dla których istnieje algorytm randomizowany, który każdą yes-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$, a każdą no-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem mniejszym niż $1/2$.

Zadanie 1. W problemie Permutation k-Path mamy dany graf skierowany G z wierzchołkami pokolorowanymi na k kolorów $1, 2, \ldots, k$. Pytamy się o istnienie ścieżki długości k takiej, że pierwszy wierzchołek jest koloru 1, drugi koloru 2, itd. Wykaż, że problem Permutation k-Path da się rozwiązać wielomianowo.

Zadanie 2. W problemie Colorful k-Path mamy dany graf skierowany G z wierzchołkami pokolorowanymi na k. Pytamy się o istnienie ścieżki długości k takiej, w której wierzchołki są parami różnych kolorów (ale niekoniecznie w określonej kolejności). Wykaż, że problem Permutation k-Path da się rozwiązać w czasie $2^k \cdot \mathrm{poly}(|G|)$.

Zadanie 3. W problemie k-Path mamy dany graf skierowany G i pytamy się o istnienie ścieżki prostej na k wierzchołkach. Wykaż, że problem ten da się rozwiązać algorytmem Monte-Carlo z jednostronnym błędem (fałszywymi negatywami) w czasie $(2e)^k \cdot \mathrm{poly}(n)$. Wysnuj wniosek, że pytanie o istnienie skierowanej ścieżki o długości $k = \mathcal{O}(\log n)$ jest w klasie RP. Czy złożoność powyższej postaci odpowiada jakiejś definicji z ostatniego wykładu?

Zadanie 4. Dany jest graf dwudzielny G, gdzie obie strony dwukolorowania $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mają wielkość n. Rozważmy macierz $M(G)$ wymiaru $n \times n$ nad dowolnym ciałem $\mathbb{F}$, gdzie w i-tym wierszu i j-tej kolumnie kładziemy nową zmienną x_e jeśli $e = a_i b_j$ jest krawędzią w G, oraz kładziemy 0 w przeciwnym przypadku. Wykaż, że G ma doskonałe skojarzenie wtedy i tylko wtedy gdy $\det M(G)$, jako wielomian nad zmiennymi $(x_e)_{e \in E(G)}$, jest niezerowy. Wysnuj wniosek, że problem istnienia doskonałego skojarzenia można rozwiązywać w randomizowanym czasie $\mathcal{O}(n^\omega \cdot \mathrm{polylog}(n))$ z fałszywymi negatywami, gdzie $\mathcal{O}(n^\omega)$ to liczba operacji arytmetycznych potrzebnych do obliczenia wyznacznika macierzy $n \times n$.

Zadanie 5. Wykaż, że $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{RP} \subseteq \mathsf{NP}$.

Zadanie 6. Udowodnij, że BPP jest zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$, to $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$.

Zadanie 8. Wykaż, że $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PP}$.

Klasa ZPP obejmuje problemy posiadające wielomianowy algorytm Las Vegas: algorytm używający randomizacji, który jest zawsze poprawny, ale którego czas działania ma wartość oczekiwaną ograniczoną wielomianowo.

Zadanie 9. Wykaż, że $\mathsf{ZPP} = \mathsf{RP} \cap \mathsf{coRP}$.