ZŁO* — ćwiczenia 11

Zupełność, randomizacja

Niech $t(n), s(n)$ to funkcje obliczalne w L. Klasa $\mathsf{DTiSp}[t(n), s(n)]$ obejmuje problemy rozwiązywalne przez deterministyczną maszynę Turinga działającą *zarówno* w czasie $\mathcal{O}(t(n))$ jak i pamięci $\mathcal{O}(s(n))$. Klasa $\mathsf{NTiSp}[t(n), s(n)]$ jest zdefiniowana analogicznie, tylko dla niedeterministycznych maszyn. Skrót poly i polylog oznaczają odpowiednio, że sumujemy n^k oraz $(\log n)^k$ po wszystkich naturalnych k. Definiujemy *klasę Scotta*:

$$\mathsf{SC} = \mathsf{DTiSp}[\mathrm{poly}, \mathrm{polylog}].$$

Rozważmy następujący problem CNF-SAT/PATHWIDTH. Dana jest formuła logiczna φ w postaci CNF, oraz następująca *dekompozycja ścieżkowa* tej formuła. Dekompozycja składa się z ciągu worków $(B_1, B_2, \ldots, B_p)$, gdzie każdy worek jest podzbiorem zmiennych, oraz spełnione są następujące warunki:

(P1) Dla każdej klauzuli C, istnieje worek zawierający wszystkie zmienne C.

(P2) Dla każdej zmiennej x, zbiór worków zawierających x jest przedziałem w dekompozycji.

Szerokość dekompozycji to maksymalna wielkość worka. W problemie mamy daną dekompozycję ścieżkową φ o szerokości co najwyżej s; możemy założyć, że $p = \mathcal{O}(n)$.

Zadanie 1. Wykaż, że problem CNF-SAT/PATHWIDTH da się rozwiązać:

- w czasie $2^{\mathcal{O}(s)} \cdot \mathrm{poly}(n)$;
- w czasie $n^{\mathcal{O}(s)}$ i pamięci $\mathcal{O}(s \cdot \log n)$;
- w czasie $2^{\mathcal{O}(s^2)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ i pamięci $\mathrm{poly}(n)$.

Zadanie 2. Udowodnij, że problem CNF-SAT/PATHWIDTH dla $s = s(n) \geqslant \log n$ jest zupełny dla klasy $\mathsf{NTiSp}[\mathrm{poly}, s(n)]$ pod L-redukcjami.

Zadanie 3. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) Problem CNF-SAT/PATHWIDTH posiada algorytm rozwiązujący go w czasie $2^{\mathcal{O}(s)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ i pamięci $\mathrm{poly}(\log n, s)$.

(ii) $\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{SC}$.

Klasa RP obejmuje problemy, dla których istnieje algorytm randomizowany, który każdą yes-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$, a każdą no-instancję zawsze odrzuca. Klasa BPP obejmuje problemy, dla których istnieje algorytm randomizowany, który każdą yes-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej $3/4$, a każdą no-instancję odrzuca z prawdopodobieństwem co najmniej $3/4$. Klasa PP obejmuje problemy, dla których istnieje algorytm randomizowany, który każdą yes-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$, a każdą no-instancję akceptuje z prawdopodobieństwem mniejszym niż $1/2$.

Zadanie 4. W problemie PERMUTATION k-PATH mamy dany graf skierowany G z wierzchołkami pokolorowanymi na k kolorów $1, 2, \ldots, k$. Pytamy się o istnienie ścieżki długości k takiej, że pierwszy wierzchołek jest koloru 1, drugi koloru 2, itd. Wykaż, że problem PERMUTATION k-PATH da się rozwiązać wielomianowo.

Zadanie 5. W problemie COLORFUL k-PATH mamy dany graf skierowany G z wierzchołkami pokolorowanymi na k. Pytamy się o istnienie ścieżki długości k takiej, w której wierzchołki są parami różnych kolorów (ale niekoniecznie w określonej kolejności). Wykaż, że problem PERMUTATION k-PATH da się rozwiązać w czasie $2^k \cdot \mathrm{poly}(|G|)$.

Zadanie 6. W problemie k-PATH mamy dany graf skierowany G i pytamy się o istnienie ścieżki prostej na k wierzchołkach. Wykaż, że problem ten da się rozwiązać algorytmem Monte-Carlo z jednostronnym błędem (fałszywymi negatywami) w czasie $(2e)^k \cdot \mathrm{poly}(n)$. Wysnuj wniosek, że pytanie o istnienie skierowanej ścieżki o długości $k = \mathcal{O}(\log n)$ jest w klasie RP.

Zadanie 7. Dany jest graf dwudzielny G, gdzie obie strony dwukolorowania $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mają wielkość n. Rozważmy macierz $M(G)$ wymiaru $n \times n$ nad dowolnym ciałem $\mathbb{F}$, gdzie w i-tym wierszu i j-tej kolumnie kładziemy nową zmienną x_e jeśli $e = a_i b_j$ jest krawędzią w G, oraz kładziemy 0 w przeciwnym przypadku. Wykaż, że G ma doskonałe skojarzenie wtedy i tylko wtedy gdy $\det M(G)$, jako wielomian nad zmiennymi $(x_e)_{e \in E(G)}$, jest niezerowy. Wysnuj wniosek, że problem istnienia doskonałego skojarzenia można rozwiązywać w randomizowanym czasie $\mathcal{O}(n^\omega \cdot \mathrm{polylog}(n))$ z fałszywymi negatywami, gdzie $\mathcal{O}(n^\omega)$ to liczba operacji arytmetycznych potrzebnych do obliczenia wyznacznika macierzy $n \times n$.

Zadanie 8. Wykaż, że $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{RP} \subseteq \mathsf{NP}$.

Zadanie 9. Udowodnij, że BPP jest zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego.

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$, to $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$.

Zadanie 11. Wykaż, że $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PP}$.

Klasa ZPP obejmuje problemy posiadające wielomianowy algorytm Las Vegas: algorytm używający randomizacji, który jest zawsze poprawny, ale którego czas działania ma wartość oczekiwaną ograniczoną wielomianowo.

Zadanie 12. Wykaż, że $\mathsf{ZPP} = \mathsf{RP} \cap \mathsf{coRP}$.