

ZŁO* — ćwiczenia 1

Maszyny Turinga

Ćwiczenia oznaczone przez ♠ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następane ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Przypomnienie maszyn Turinga

Jednotaśmowa, deterministyczna maszyna Turinga M ma następujące komponenty:

- alfabet wejściowy Σ ,
- alfabet roboczy $\Gamma \supseteq \Sigma$ zawierający $\perp, \triangleright \notin \Sigma$,
- zbiór stanów Q , oraz
- funkcja przejścia δ .

Maszyna dostaje na wejściu słowo x nad alfabetem wejściowym Σ , zapisane po lewej prawostronnie nieskończonej taśmy. Po lewej od słowa wejściowego x znajduje się niezmienny znacznik \triangleright , reszta taśmy jest wypełniona blankami \perp . Głowica jest na początku na \triangleright , stan początkowy to jakiś ustalony q_0 . Maszyna porusza się zgodnie z funkcją przejścia δ : w zależności od stanu i litery pod głowicą, maszyna zapisuje coś w komórce lub nie, porusza się o jeden krok w lewo, w prawo, lub zostaje w miejscu, oraz zmienia stan. Zakładamy, że znacznika \triangleright nie da się nadpisać i nie można pójść na lewo od niego (zabronione w funkcji przejścia maszyny). Oprócz tego maszyna może wywołać instrukcję Accept lub Reject, przy której obliczenie się kończy i słowo wejściowe jest akceptowane lub odrzucane.

Maszyna wielotaśmowa, jak sama nazwa wskazuje, ma wiele taśm (ustaloną z góry liczbę). Słowo wejściowe jest napisane na pierwszej taśmie, reszta jest wypełniona blankami. Na każdej taśmie jest głowica, przejścia zależą od stanu maszyny i krotki symboli pod głowicami, zaś instrukcje składają się z krotki instrukcji dla każdej taśmy (lewo/prawo/stój, oraz zapis).

Język $L \subseteq \Sigma^*$ jest *częściowo obliczalny* jeśli istnieje maszyna, która akceptuje każde słowo z L , a na każdym słowie spoza L albo się pętli, albo je odrzuca. Język L jest *obliczalny* jeśli istnieje maszyna, która się zatrzymuje na każdym słowie wejściowym (ma własność stopu) i akceptuje słowa z L oraz odrzuca słowa spoza L . Język L jest w $\text{DTIME}[T(n)]$ jeśli istnieje maszyna wielotaśmowa rozpoznająca czy dane słowo długości n jest w L w $\mathcal{O}(T(n))$ krokach.

Zadania

Zadanie 1. Skonstruuj jednotaśmową maszynę rozpoznającą język palindromów w $\mathcal{O}(n^2)$ krokach.

Zadanie 2. Skonstruuj dwutaśmową maszynę rozpoznającą język palindromów w $\mathcal{O}(n)$ krokach.

Zadanie 3. Pokaż, że następujące modele zarówno dają się symulować przez jednotaśmową maszynę Turinga, oraz potrafią symulować jednotaśmową maszynę Turinga. W każdym przypadku oszacuj wybuch liczby kroków potrzebny do symulacji.

- (1) Maszyna jednotaśmowa, z obustronnie nieskończoną taśmą.
- (2) Maszyna wielotaśmowa, dla każdej ustalonej liczby taśm.
- (3) Maszyna jednotaśmowa, która ma co najwyżej 10 stanów.
- (4) Maszyna dwutaśmowa, która może pisać tylko po blankach.

Zadanie 4 (♠). Udowodnij, że jeśli istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca język L w co najwyżej $T(n)$ krokach, to również istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca L w co najwyżej $T(n)/2 + \mathcal{O}(n)$ krokach.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli język L jest rozpoznawany przez maszynę jednotaśmową, która może pisać tylko po blankach, to L jest regularny.

Zadanie 6 (♠). Wykaż, że jeśli jednotaśmowa maszyna M rozpoznaje język palindromów binarnych, to maksymalna liczba kroków użyta przez M na wejściach długości n jest w $\Omega(n^2)$.

Zadanie 7 (♠). Udowodnij, że jeśli język L jest rozpoznawany przez jednotaśmową maszynę M działającą zawsze w $\mathcal{O}(n)$ krokach na wejściach długości n , to L jest regularny.

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli zarówno język L jak i jego dopełnienie $\bar{L} := \Sigma^* - L$ są częściowo obliczalne, to L jest obliczalny.