ZŁO* — ćwiczenia 9

Redukcje, alternacja

Ćwiczenia oznaczone przez ♢ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez ♠ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Zadania

Zadanie 1 (♢). W problemie Colorful Graph Motif dany jest graf G oraz funkcja kolorująca $\phi\colon V(G) \to \mathcal{C}$ dla pewnego (dowolnie dużego) zbioru kolorów $\mathcal{C}$. Pytamy się o istnienie spójnego podgrafu G, który ma dokładnie jeden wierzchołek w każdym z kolorów z $\mathcal{C}$. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny.

Bonus: Wykaż, że problem jest NP*-zupełny nawet jeśli G jest drzewem o maksymalnym stopniu* 3.

Zadanie 2 (♢). Wykaż, że problem niepustości przecięcia dla automatów deterministycznych na słowach (dane automaty $A_1, A_2, \ldots, A_m$, pytamy się czy $\bigcap_{i=1}^{m} L(A_i) \neq \emptyset$) jest PSPACE-zupełny.

Uwaga: Należenie było już wcześniej.

Zadanie 3 (♢). Wykaż, że problem uniwersalności dla niedeterministycznych automatów na słowach jest PSPACE-zupełny.

Uwaga: Należenie było już wcześniej.

Zadanie 4. Wykaż, że następujące problemy są NP-zupełne:

(a) Vertex Cover: Dany jest graf G i liczba k. Pytamy się o istnienie zbioru wierzchołków X wielkości co najwyżej k, że każda krawędź ma co najmniej jeden koniec w X.

(b) Dominating Set: Dany jest graf G i liczba k. Pytamy się o istnienie zbioru wierzchołków X wielkości co najwyżej k, że każdy wierzchołek jest albo w X albo ma sąsiada w X.

(c) Set Cover: Dane jest uniwersum U, rodzina jego podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^U$, i liczba k. Pytamy się o istnienie podrodziny $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mocy co najwyżej k, dla której $\bigcup \mathcal{G} = U$.

Zadanie 5. W problemie Distance ℓ Edge Deletion dany jest graf nieskierowany G, dwa różne wierzchołki $s, t \in V(G)$, oraz liczba k. Pytamy się, czy z G da się usunąć co najwyżej k krawędzi tak, by w uzyskanym grafie nie było ścieżki długości co najwyżej ℓ pomiędzy s i t.

(a) Wykaż, że Distance ℓ Edge Deletion da się rozwiązać wielomianowo dla $\ell \leqslant 3$ (♠).

(b) Wykaż, że Distance ℓ Edge Deletion jest NP-zupełny dla każdego $\ell \geqslant 4$.

Maszyna alternująca to maszyna Turinga, której stany są podzielone na podzbiory $Q_\forall$, $Q_\exists$, Q_{acc} i Q_{rej}. W konfiguracjach ze stanami Q_{acc}, Q_{rej} maszyna odpowiednio akceptuje lub odrzuca. Maszyna akceptuje z konfiguracji ze stanem z $Q_\exists$ jeśli *istnieje* przejście prowadzące do konfiguracji, z której akceptuje. Maszyna akceptuje z konfiguracji ze stanem z $Q_\forall$ jeśli *każde* przejście prowadzi do konfiguracji, z której akceptuje. Maszyna działa w czasie $t(n)$ jeśli dla każdego słowa wielkości

n można określić, czy maszyna akceptuje czy odrzuca na podstawie konfiguracji osiągalnych w co najwyżej $t(n)$ krokach. Maszyna używa pamięci $s(n)$ jeśli dla każdego słowa wielkości n można określić, czy maszyna akceptuje czy odrzuca na podstawie konfiguracji o pamięci roboczej $s(n)$.

Klasy $\mathsf{ATIME}(t(n))$ oraz $\mathsf{ASPACE}(s(n))$ są zdefiniowane naturalnie. Oznaczamy

$$\mathsf{AL} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{ASPACE}(c \log n) \qquad \text{oraz} \qquad \mathsf{AP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{ATIME}(n^c).$$

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli język L jest w klasie $\mathsf{ATIME}(t(n))$, to również dopełnienie L jest w tej klasie. Udowodnij również taki sam fakt dla klasy $\mathsf{ASPACE}(s(n))$.

Zadanie 7. Wykaż, że $\mathsf{AP} = \mathsf{PSPACE}$.

Zadanie 8. Wykaż, że $\mathsf{AL} = \mathsf{P}$.

Zadanie 9 (♠). Ustalmy jakiekolwiek sensowne kodowanie problemu SAT przy pomocy ciągu bitów, np. po kolei podajemy klauzule kodując binarne indeksy zmiennych w literałach. W problemie Succint SAT dany jest obwód C o n wejściach i jednym wyjściu. Przez $\varphi(C)$ oznaczamy formułę logiczną uzyskaną następująco: do C wstawiamy po kolei wszystkie ciągi bitowe długości n, w kolejności leksykograficznej, wyniki C na tych ciągach ustawiamy w słowo, i interpretujemy to słowo jako zapis bitowy formuły $\varphi(C)$. W ten sposób, $\varphi(C)$ jest zapisywana na 2^n bitach. Dla danego obwodu C, pytamy się, czy $\varphi(C)$ jest spełnialna. Udowodnij, że problem Succint SAT jest zupełny dla klasy $\mathsf{NEXPTIME}$ pod P-redukcjami. Kodowanie bitowe dla problemu SAT możesz sobie dobrać dowolnie.