ZŁO* — ćwiczenia 8

Zupełność, redukcje

Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Zadania

Zadanie 1. Wykaż, że problem Directed Reachability jest zupełny dla NL pod L-redukcjami nawet jeśli założymy, że dany graf jest acykliczny i każdy wierzchołek ma całkowity stopień co najwyżej 3.

Zadanie 2. Udowodnij, że problem 2SAT jest zupełny dla coNL pod L-redukcjami.

Zadanie 3. Wykaż, że klasa $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{DSPACE}[\log^k n]$ nie ma problemu zupełnego pod L-redukcjami.

Zadanie 4. W problemie Clique dany jest graf G i liczba k; pytamy się czy w G istnieje k parami sąsiadujących wierzchołków. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny.

Zadanie 5. W problemie Subset Sum dane jest n nieujemnych liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, oraz nieujemna liczba całkowita t. Pytamy się, czy istnieje podzbiór $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taki, że $\sum_{i\in S} x_i = t$. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny, jeśli liczby zapisane są binarnie. Czy problem jest nadal NP-zupełny, jeśli są one zapisane unarnie?

Zadanie 6. W problemie Colorful Graph Motif dany jest graf G oraz funkcja kolorująca $\phi\colon V(G) \to \mathcal{C}$ dla pewnego (dowolnie dużego) zbioru kolorów $\mathcal{C}$. Pytamy się o istnienie spójnego podgrafu G, który ma dokładnie jeden wierzchołek w każdym z kolorów z $\mathcal{C}$. Wykaż, że problem ten jest NP-zupełny.

Bonus: Wykaż, że problem jest NP*-zupełny nawet jeśli G jest drzewem o maksymalnym stopniu* 3.

Zadanie 7. Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny. Dany jest alfabet Σ (dowolnie duży, dany na taśmie) oraz wyrażenie regularne r nad Σ. Pytanie: czy istnieje słowo w języku generowanym przez r, które zawiera wszystkie litery z Σ.

Uwaga: Należenie było już na ćwiczeniach 6.

Zadanie 8. W problemie QBF mamy daną formułę logiczną postaci

$$Q_{x_1}\, Q_{x_2}\, \ldots\, Q_{x_n}\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

gdzie każde Q to kwantyfikator $\forall$ lub $\exists$, zaś formuła φ jest w postaci CNF. Wykaż, że problem QBF jest PSPACE-zupełny.

Zadanie 9. Gra Geography rozgrywa się na grafie skierowanym G pomiędzy graczami $\forall$ i $\exists$. Każdy wierzchołek G należy do jednego z graczy. Na początku kładziemy kamień na wierzchołku startowym v_0. W każdej rundzie patrzymy, kto jest właścicielem wierzchołka na którym stoi kamień, i tenże właściciel musi ruszyć kamień wzdłuż jednej z krawędzi wychodzących z wierzchołka, przy czym nie może przesunąć kamienia na wierzchołek, na którym kamień stał już wcześniej w czasie rozgrywki. Jeśli gracz nie może wykonać ruchu, to przegrywa. Rozważmy problem: dana plansza G, pytamy się, czy $\exists$ wygrywa rozgrywkę. Wykaż, że ten problem jest PSPACE-zupełny.

Zadanie 10. Wykaż, że problem niepustości przecięcia dla automatów deterministycznych na słowach (dane automaty $A_1, A_2, \ldots, A_m$, pytamy się czy $\bigcap_{i=1}^{m} L(A_i) \neq \emptyset$) jest PSPACE-zupełny.

Uwaga: Należenie było już na poprzednich ćwiczeniach.

Zadanie 11. Wykaż, że problem uniwersalności dla niedeterministycznych automatów na słowach jest PSPACE-zupełny.

Uwaga: Należenie było już na poprzednich ćwiczeniach.