ZŁO* — ćwiczenia 7

Klasy złożoności

Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Zadania

Zadanie 1. Wykaż, że problem Directed Reachability (dla danego grafu skierowanego G i wierzchołków s, t, czy w G istnieje ścieżka z s do t) jest zupełny dla klasy NL pod L-redukcjami. To znaczy, dla każdego problemu $P \in \mathsf{NL}$ istnieje L-redukcja z P do Directed Reachability.

Zadanie 2. Wykaż, że L jest zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathsf{L} = \mathsf{NL}$.

Zadanie 3 ($\spadesuit$). Udowodnij, że Undirected Reachability jest w klasie RL, tzn., że da się go rozwiązać w logarytmicznej pamięci przy pomocy algorytmu randomizowanego, który na instancjach negatywnych odpowiada zawsze "NIE", a na instancjach pozytywnych odpowiada "TAK" z prawdopodobieństwem co najmniej 1/2.

Uwaga: Tak naprawdę Undirected Reachability jest w L, ale to jest dość trudne.

Zadanie 4. Rozważmy problem następujący problem MinCut. Dany jest graf nieskierowany G, wierzchołki s, t, oraz liczba k. Pytanie: czy istnieje cięcie wierzchołkowe separujące s od t o wielkości nie większej niż k. Wykazać, że problem ten da się rozwiązać w pamięci $\mathcal{O}(k \cdot \log n)$.

Problem otwarty: Czy ten problem da się rozwiązać w pamięci $f(k) + \mathcal{O}(\log n)$ dla jakiejkolwiek obliczalnej funkcji f.

Zadanie 5. Wykaż, że problemy pustości i uniwersalności dla deterministycznych automatów na słowach są w klasie P.

Zadanie 6. Wykaż, że problem uniwersalności dla niedeterministycznych automatów na słowach jest w klasie PSPACE.

Zadanie 7. Wykaż, że problem niepustości przecięcia dla automatów deterministycznych na słowach (dane automaty $A_1, A_2, \ldots, A_m$, pytamy się czy $\bigcap_{i=1}^m L(A_i) \neq \emptyset$) jest w klasie PSPACE.

Niedeterministyczny automat A na drzewach (binarnych) ma skończony alfabet Σ, skończony zbiór stanów Q, podzbiór stanów akceptujących $F \subseteq Q$, relację początkową $\sigma \subseteq \Sigma \times Q$ oraz relację przejścia $\delta \in \Sigma \times Q \times Q \times Q$. Bieg A na drzewie binarnym T, etykietowanym Σ przy pomocy funkcji $\lambda \colon T \to \Sigma$, to etykietowanie ρ wierzchołków T stanami z Q o następujących własnościach:

- Dla każdego liścia u mamy, że $(\lambda(u), \rho(u)) \in \sigma$.
- Dla każdego węzła wewnętrznego v, o synach v_1, v_2, mamy, że $(\lambda(v), \rho(v_1), \rho(v_2), \rho(v)) \in \delta$.
- Etykieta korzenia należy do F.

Zadanie 8. Udowodnij, że problem pustości dla niedeterministycznych automatów na drzewa binarnych jest w klasie P.

Zadanie 9. Udowodnij, że następujący problem jest w klasie NP: dla danego niedeterministycznego automatu A na drzewach binarnych etykietowanych Σ stwierdzić, czy w A akceptuje jakieś drzewo w którym istnieje gałąź zawierająca wszystkie litery z Σ.

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, to $\mathsf{EXPTIME} = \mathsf{NEXPTIME}$.