ZŁO* — ćwiczenia 6

Twierdzenie Barringtona, problemy SAT

Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Zadania

Branching program szerokości k, liczbie zmiennych boolowskich n, oraz długości m, to m-wyrazowy ciąg instrukcji postaci (i, f, g), gdzie:

- $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ to indeks zmiennej;
- $f, g \colon \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, k\}$ to dowolne funkcje.

Bieg programu na boolowskich zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ wygląda następująco. Program zaczyna w stanie 1, a następnie aplikuje kolejne instrukcje. Dla instrukcji (i, f, g), obecny stan q jest zmieniany na $f(q)$ lub $g(q)$, w zależności czy $x_i = 0$ czy $x_i = 1$. Program zwraca końcowy stan. Powiemy, że non-uniform ciąg programów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozpoznaje język L, jeśli $L \cap \{0,1\}^n$ obejmuje dokładnie te słowa $x_1x_2 \dots x_n$, na których program P_n zwraca stan 1. Klasa BWBP obejmuje języki rozpoznawalne przez non-uniform ciągi branching programów o stałej szerokości i wielomianowej długości.

Na poprzednich ćwiczeniach pokazaliśmy, że $\mathsf{BWBP} \subseteq \mathsf{NC}^1$. Teraz wykażemy odwrotne zawieranie. Będziemy teraz pracowali nad grupą S_5, permutacji zbioru o 5 elementach. Element $g \in S_5$ jest 5-*cyklem* jeśli działa tranzytywnie na zbiorze.

Zadanie 1 ($\diamondsuit$)**.** Udowodnij, że w grupie S_5 są dwa 5-cykle g, h, że $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ też jest 5-cyklem.

Każdy branching program szerokości 5 zapuszczony na jakimś wejściu indukuje pewną funkcję $\{1, \dots, 5\} \to \{1, \dots, 5\}$. Ograniczymy się do programów zawsze indukujących jakąś permutacje z S_5. Dla danego obwodu C, powiemy, że branching program P *g-dobrze koduje* C, jeśli P zapuszczony na słowie w daje identyczność jeśli C nie akceptuje w, oraz g w przeciwnym przypadku.

Zadanie 2 ($\diamondsuit$)**.** Niech C będzie obwodem NC^1 kodującym formułę (każda nie-wejściowa bramka ma co najwyżej jeden drut wychodzący) używającą tylko bramek AND i NOT. Udowodnij przez indukcję po wysokości, że dla każdej bramki na d-tym poziomie od dołu, oraz dla każdego 5-cyklu $g \in S_5$, istnieje branching program o długości co najwyżej 4^d, który g-dobrze koduje podformułę pod tą bramką.

Zadanie 3 (Twierdzenie Barringtona, $\diamondsuit$)**.** Skonkluduj, że $\mathsf{BWBP} = \mathsf{NC}^1$.

Zadanie 4. Formuła φ w postaci CNF jest *hornowska* (*Horn formula*) jeśli w każdej klauzuli co najwyżej jedna zmienna występuje pozytywnie. Wykaż, że problem SAT dla formuł hornowskich da się rozwiązać wielomianowo.

Zadanie 5. Niech φ będzie formułą w 2CNF, oraz niech x będzie zmienną. Poprzez *propagację* ustalenia $x = \top$ rozumiemy zwartościowanie x na prawdę, a następnie, dopóki istnieją w formule klauzule o 1 literale, ustawianie wyforsowanych wartości tych zmiennych. Powiemy, że propagacja jest *zgodna* jeśli nie prowadzi do powstania pustej klauzuli (która nie może być spełniona).

Załóżmy, że propagacja ustalenia $x = \top$ jest zgodna, oraz produkuje nową formułę φ'. Udowodnij, że φ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy φ' jest spełnialna.

Zadanie 6. Na podstawie poprzedniego zadania, zaproponuj algorytm dla problemu 2SAT (spełnialność formuł w 2CNF) o liniowej złożoności czasowej.

Zadanie 7. Wykaż, że problem SAT dla formuł CNF, w których każda zmienna występuje co najwyżej dwa razy, da się rozwiązywać wielomianowo.

Zadanie 8. Udowodnij, że klasy NL, P, NP, oraz PSPACE są zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego, czyli jeśli L jest w klasie, to

$$L^\star = \{u_1 u_2 \dots u_n \colon u_i \in L\}$$

też jest w klasie.

Zadanie 9 ($\Diamond$)**.** Udowodnij, że następujący problem jest w NP. Dany jest alfabet Σ (dowolnie duży, dany na taśmie) oraz wyrażenie regularne r nad Σ. Pytanie: czy istnieje słowo w języku generowanym przez r, które zawiera wszystkie litery z Σ.