ZŁO* — ćwiczenia 2

Złożoność pamięciowa i czasowa

Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Przypomnienie definicji

Maszyna *wsadowa* to maszyna w której taśma wejściowa jest read-only: zawiera ona jedynie słowo wejściowe ograniczone znacznikami $\triangleright$ i $\triangleleft$, zaś całe obliczenie odbywa się na taśmach roboczych.

Funkcja f jest *pamięciowo konstruowalna* jeśli istnieje maszyna wsadowa, która dostawszy słowo 1^n, zapisuje na taśmie roboczej dokładnie $f(n)$ komórek używając pamięci $\mathcal{O}(f(n))$. Funkcja f jest *czasowo konstruowalna* jeśli istnieje maszyna wsadowa, która dostawszy słowo 1^n, zapisuje na taśmie roboczej dokładnie $f(n)$ komórek używając czasu $\mathcal{O}(f(n))$. Uwaga: W obu przypadkach można używać więcej niż jednej taśmy roboczej.

Zadania

Zadanie 1 ($\diamondsuit$). Wykaż, że jeśli jednotaśmowa maszyna M rozpoznaje język palindromów binarnych, to maksymalna liczba kroków użyta przez M na wejściach długości n jest w $\Omega(n^2)$.

Zadanie 2 ($\diamondsuit$). Udowodnij, że jeśli język L jest rozpoznawany przez jednotaśmową maszynę M działającą zawsze w $\mathcal{O}(n)$ krokach na wejściach długości n, to L jest regularny.

Zadanie 3 ($\diamondsuit$). Udowodnij, że jeśli istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca język L w co najwyżej $T(n)$ krokach, to również istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca L w co najwyżej $T(n)/2 + \mathcal{O}(n)$ krokach.

Zadanie 4. Wykaż, że język $\{a^k b^{2^k} : k \in \mathbb{N}\}$ da się rozpoznawać:

- W czasie $\mathcal{O}(n \log n)$ na maszynie jednotaśmowej.
- W pamięci $\mathcal{O}(\log n)$ na maszynie wsadowej.

Zadanie 5. Na wejściu dany jest opis labiryntu: plansza to kwadrat $n \times n$ reprezentowany jako kolejne wiersze oddzielone #. Pola labiryntu to 0 (wolne pole), 1 (ściana), $\downarrow$ (wejście) oraz $\uparrow$ (wyjście). Zakładamy, że wejście i wyjście są na brzegu planszy, zaś pozostałe pola brzegu to ściany. Udowodnij, że da się rozstrzygnąć w pamięci logarytmicznej czy z wejścia da się dotrzeć do wyjścia.

Zadanie 6. *Automat wielogłowicowy* chodzi po słowie wejściowym przy pomocy pewnej stałej liczby głowic. Przejścia automatu zależą od krotki symboli pod głowicami, a operacja wykonana w przejściu polega na ruszeniu się każdej głowicy. Uwaga: automat nie pisze po słowie, jedynie czyta symbole i rusza głowicami. Wykazać, że dany język L jest rozpoznawalny przez pewien automat wielogłowicowy wtedy i tylko wtedy gdy jest rozpoznawalny przez maszynę Turinga działającą w logarytmicznej pamięci.

Zadanie 7. Wykazać, że maszyna wsadowa o roboczej pamięci $\mathcal{O}(1)$ może jedynie rozpoznawać języki regularne.

Zadanie 8 (♠). Język L jest zdefiniowany jako zbiór słów postaci:

$$\#0\ldots000\#0\ldots001\#0\ldots010\#0\ldots011\#\ldots\#1\ldots111\#.$$

gdzie każdy blok ma długość k dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ (czyli zapisy binarne wszystkich liczb od 0 do $2^k - 1$). Udowodnić, że L da się rozpoznać w pamięci $\mathcal{O}(\log\log n)$.

Zadanie 9. Rozstrzygnąć, które funkcje są pamięciowo i/lub czasowo konstruowalne:

(a) $f(n) = n$;

(b) $f(n) = n^2$;

(c) $f(n) = 2^n$;

(d) $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$.